Applications des intégrales doubles et théorème de Green

Flore Caye

D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

4 octobre 2024

Sommaire

Sommaire

Aire et volume

Soit D une région du plan bornée par des courbes lisses.
L'aire de D est donnée par

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dA.$$

Soit D une région du plan bornée par des courbes lisses et f, g deux fonctions continues de deux variables telle que $f(x, y) \geq g(x, y)$ sur D.
Le volume de la région E de l'espace bornée par les surfaces $z = f(x, y)$ et $z = g(x, y)$ et au-dessus de la région D est donné par

$$\text{Vol}(E) = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] \, dA.$$

Sommaire

Masse d'une plaque mince

Définition

Soit une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité en chaque point (x, y) est donnée par la fonction $\sigma(x, y)$.
La **masse** de la plaque est

$$m = \iint_D \sigma(x, y)\, dA.$$

Centre de masse d'une plaque mince

Définition

Soit une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité en chaque point (x, y) est donnée par la fonction $\sigma(x, y)$.

1. Le **(premier) moment par rapport à l'axe des x** de la plaque est

$$M_x = \iint_D y\sigma(x, y)\, dA.$$

2. Le **(premier) moment par rapport à l'axe des y** de la plaque est

$$M_y = \iint_D x\sigma(x, y)\, dA.$$

Centre de masse d'une plaque mince (2)

Définition

Le **centre de masse** de la plaque est le point $(\bar{x}, \bar{y})$ de coordonnées

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Exemples

6.5.14

Déterminer la masse et le centre de masse de la plaque délimitée par les demi-cercles

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Et les segments de l'axe x qui les rejoignent.
La densité en tout point est inversement proportionelle à la distance à l'origine.

Moments d'inertie d'une plaque mince

Définition

Soit une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité en chaque point (x, y) est donnée par la fonction $\sigma(x, y)$.

1. Le **moment d'inertie par rapport à l'axe des x** de la plaque est

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \sigma(x, y)\, dA.$$

2. Le **moment d'inertie par rapport à l'axe des y** de la plaque est

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \sigma(x, y)\, dA.$$

Moments d'inertie d'une plaque mince (2)

Définition

Soit une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité en chaque point (x, y) est donnée par la fonction $\sigma(x, y)$.

3. Le **moment d'inertie par rapport à l'origine** de la plaque est

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\sigma(x, y)\, dA.$$

Moments d'inertie d'une plaque mince (2)

Définition

Soit une plaque mince occupant une région D du plan et dont la densité en chaque point (x, y) est donnée par la fonction $\sigma(x, y)$.

3. Le **moment d'inertie par rapport à l'origine** de la plaque est

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\sigma(x, y)\, dA.$$

Remarques :

- Les moments d'inertie sont reliés par la relation $I_0 = I_x + I_y$.
- On appelle parfois les moments d'inertie *seconds moments*.

Rayon de giration d'une plaque mince

Définition

Le **rayon de giration** de la plaque par rapport à chaque axe est donné par :

$$\bar{\bar{x}}^2 = \frac{I_y}{m} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m}.$$

Le point $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ est le point où pourrai être concentrée la masse de la plaque mince sans changer son moment d'inertie.

Exemples

6.5.18

Trouver les moments d'inertie I_x, I_y, I_0 de la plaque délimitée par les courbes

$$y = 0$$
$$y = 2x$$
$$x = 1 - 2y$$

de densité $\sigma(x, y) = x$.

Exemples

6.5.24

Trouver les moments d'inertie I_x, I_y, I_0 ainsi que les rayons de giration de la plaque délimitée par les courbes :

$$y = 0$$
$$y = sin(x)$$
$$0 \leq x \leq \pi$$

de densité constante $\sigma(x, y) = \sigma$.

Sommaire

Orientation d'une courbe fermée

Définition

Soit C une courbe simple, fermée et lisse par morceaux dans le plan et D la région délimitée par C.

La courbe C est **orientée positivement** si elle parcourue dans le sens antihoraire.

Orientation d'une courbe fermée

Définition

Soit C une courbe simple, fermée et lisse par morceaux dans le plan et D la région délimitée par C.

La courbe C est **orientée positivement** si elle parcourue dans le sens antihoraire.

Ainsi, si nous parcourons C dans le sens positif alors la région D est toujours à *notre gauche*.

Sommaire

Notation :

Si C est une courbe fermée alors on note l'intégrale sur C par $\displaystyle\oint_C$.

Théorème de Green

Notation :

Si C est une courbe fermée alors on note l'intégrale sur C par $\oint_C$.

Théorème de Green

Soit C une courbe fermée, simple et lisse par morceaux du plan, orientée positivement. Soit D le domaine délimité par C.

Si P et Q sont des fonctions de deux variables ayant des dérivées partielles continues dans un voisinage de D, telles que $\vec{F} = P\vec{\mathrm{i}} + Q\vec{\mathrm{j}}$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Théorème de Green

On peut réécrire le terme de gauche du théorème comme :

$$\int_C Pdx + Qdy$$

$$\oint_C Pdx + Qdy$$

$$\int_{\partial C} Pdx + Qdy$$

Exemple : 9.4.2

Calculez l'intégrale curviligne sans puis avec le théorème de Green

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$, C est le cercle centré à l'origine et de rayon 4.

Exemples

Exemple : 9.4.2

Calculez l'intégrale curviligne sans puis avec le théorème de Green

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$, C est le cercle centré à l'origine et de rayon 4.

Exemple : 9.4.10

10. $\int_C (1-y^3)\,dx + (x^3 + e^{y^2})\,dy$, C est la frontière de la région comprise entre les cercles $x^2+y^2=4$ et $x^2+y^2=9$.

Sommaire

Application du théorème de Green au calcul d'aire

Théorème

Soit C une courbe fermée lisse par morceaux orientée positivement et paramétrée par $\mathrm{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}}$, et soit D la région du plan délimitée par C. Alors

$$\text{aire}(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

Exemple

Utiliser le théorème de Green pour calculer l'aire d'une boucle de la courbe paramétrée par $\mathrm{r}(t) = \sin(t)\cos(t)\mathrm{i} + \sin(t)\mathrm{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.