MTH1102 - Exercices de la semaine 6

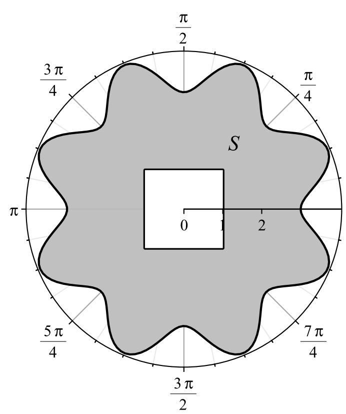
Exercices de routine

Section 6.5 nos. 3, 7.

Section 9.4 nos. 1, 11, 13.

Applications des intégrales doubles

1. On considère une plaque mince occupant la région du plan définie par $25y \geq (x+5)(5-x)$, $x \geq y^2 - 5$ et $x \leq 5 - y^2$. La densité de la plaque est proportionnelle au cube la distance à l'axe des x.
   (a) Calculez la masse de la plaque.
   (b) Déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque.
2. La section transversale S d'une pièce métallique de densité constante et de longueur égale à 2 a la forme représentée ci-dessous. Cette section peut être modélisée par la région du plan située entre le carré de sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ et la courbes polaire et $r = 3 + \sin^2(4\theta)$. Calculez la masse de la pièce métallique.



3. Déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque mince de l'exercice 1. Le centre de masse est-il situé sur la plaque ? Justifiez soigneusement votre réponse.
4. On considère la plaque mince de l'exercice 2.
   (a) Sans faire de calculs, déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque. Justifiez soigneusement votre réponse.
   (b) Si, plutôt qu'être constante, la densité de la plaque est proportionnelle à la distance au coin supérieur droit du « trou » carré en son centre, est-ce que le centre de masse est au même endroit ?
5. On considère une plaque mince occupant la région D située au-dessus de la droite $y = 0$ et en dessous des paraboles $y = (x+1)^2$ et $y = (x-1)^2$. La densité de cette plaque est proportionnelle à la distance à l'axe des x.
   (a) Calculez le moment d'inertie (second moment) de la plaque par rapport à l'axe vertical $x = 1$ (l'axe A_1).
   (b) Calculez le moment d'inertie (second moment) de la plaque par rapport à l'axe horizontal $y = 1$ (l'axe A_2).
   (c) Est-il plus facile de faire tourner la plaque autour de l'axe A_1 ou autour de l'axe A_2 ?

   Vous devez justifer vos démarches et vos réponses rigoureusement en utilisant des concepts du cours.

Théorème de Green

6. À l'aide du théorème de Green, évaluez l'intégrale suivante

$$J_1 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où $\vec{F}(x,y) = (x+y)\,\vec{i} + (xy + \sin(y^2))\,\vec{j}$ et C est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,0)$, orienté dans le sens horaire.

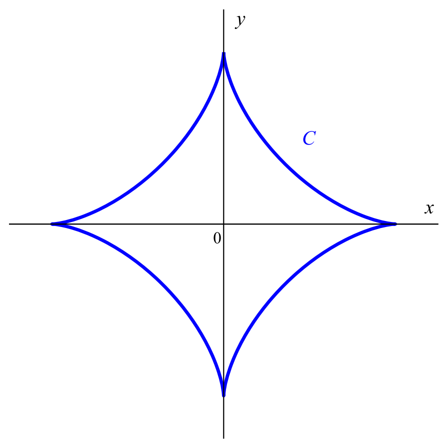
7. Calculez le travail effectué par le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y) = (x^2 + y^2)\,\vec{i} + (xy - \ln(y^2+1))\,\vec{j}$$

le long de la partie C de la parabole $y = x^2 - 4$ située en dessous de l'axe des x. La courbe C est orientée de « gauche à droite » lorsqu'on la dessine avec les axes de coordonnées en position habituelle.

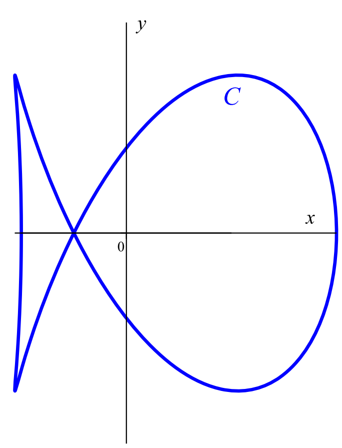
8. Soit $C = C_1 \cup C_2$, où C_1 est le segment reliant le point $(2,-2)$ au point $(2,2)$ et C_2 est une courbe quelconque reliant ces deux mêmes points. Sachant que C délimite une aire égale à 12, calculez le travail du champ vectoriel défini par $\vec{F}(x,y) = (y - \sin(x^2))\,\vec{i} + (5x - 5y^2)\,\vec{j}$ le long de la courbe C_2.

9. Soit C la courbe, appelée *astroïde*, paramétrée par $\vec{r}(t) = \sin^3(t)\,\vec{i} + \cos^3(t)\,\vec{j}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$ et représentée ci-dessous.



Calculez l'aire délimitée par la courbe C.

10. La courbe C illustrée ci-dessous est paramétrée par $\vec{r}(t) = [\cos(2t) + 3\cos(t)]\,\vec{i} + 3\sin(2t)\,\vec{j}$ avec $-\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$.



(a) Calculez l'aire de chacune des boucles de la courbe C.

(b) Donnez une interprétation géométrique de l'intégrale $\oint_C x\,dy$. Que vaut cette intégrale ?

11. On considère une plaque mince de densité constante occupant un domaine D du plan délimité par une courbe C.

(a) Montrez que les coordonnées du centre de masse de la plaque sont

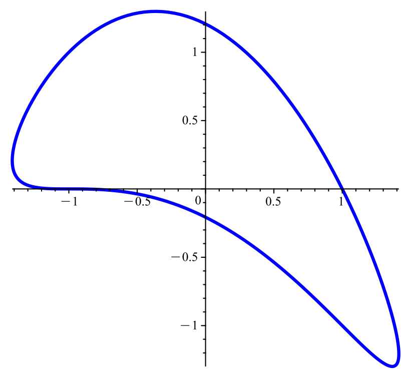
$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \text{et} \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx,$$

où A est l'aire de D. Ici, vous devez utiliser la forme du théorème de Green donnée à la p. 420 du livre.

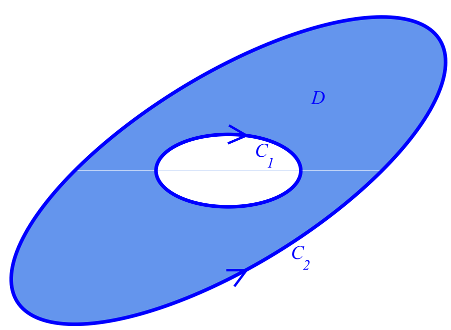
(b) Utilisez le résultat de la partie (a) pour déterminer les coordonnées du centre de masse d'une plaque mince occupant le domaine délimité par la courbe C paramétrée par

$$\vec{r}(t) = [\cos(t) - \sin(t)]\,\vec{i} + [\cos(t)\sin(t) + \sin(t)]\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

et représentée ci-dessous.



12. Le théorème de Green peut être généralisé à des courbes qui sont constituées de plusieurs morceaux, si celles-ci sont orientées correctement de façon à ce que la région D qu'elles délimitent soit toujours à gauche lorsqu'on parcourt la courbe (*l'orientation positive*). Ceci est illustré ci-dessus et également à la page 423 du livre.



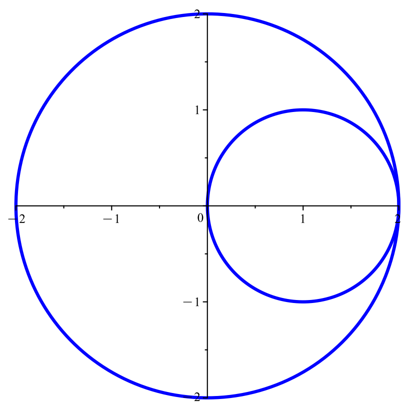
Dans ce cas, $C = C_1 \cup C_2$ et le théorème de Green devient :

$$\oint_{C_1} \vec{F} \bullet \vec{dr} + \oint_{C_2} \vec{F} \bullet \vec{dr} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA,$$

où $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ et D est le domaine entre les deux courbes (en bleu sur la figure).
Utilisez cette généralisation pour calculer l'intégrale

$$J_3 = \oint_C \vec{F} \bullet \vec{dr},$$

où $\vec{F}(x,y) = [\cos(x) - xy^2]\,\vec{i} + [\sin(y) - 2x^2]\,\vec{j}$ et D est la région située entre les deux cercle représentés ci-dessous. La courbe C est orientée positivement au sens généralisé.



Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 6.5 nos. 13, 15, 20.

Section 9.4 nos. 13, 23, 33.