Coordonnées polaires et Intégration

Flore Caye

D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

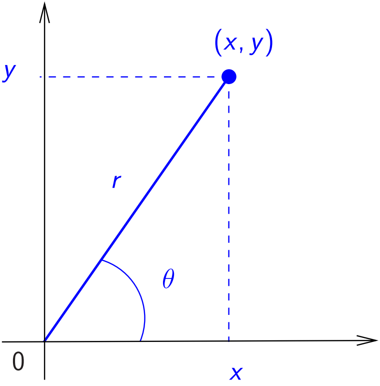
Polytechnique Montréal

27 septembre 2024

Coordonnées polaires

Un point (x, y) du plan peut être représenté en coordonnées polaires (r, θ), où

- r est la distance du point à l'origine
- θ est l'angle entre l'axe positif des x et le segment de l'origine jusqu'au point (x, y).



Coordonnées polaires (2)

Relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes :

1. $x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$

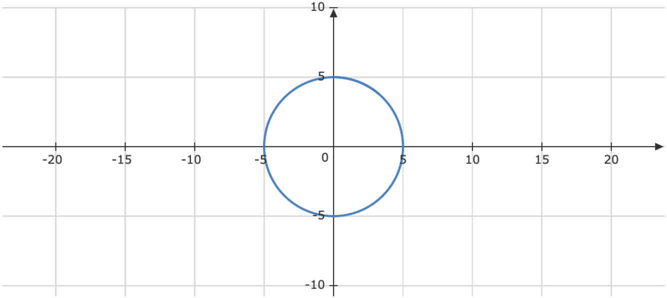
Coordonnées polaires (2)

Relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes :

1. $x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$

2. $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = \dfrac{y}{x}.$

Exemple

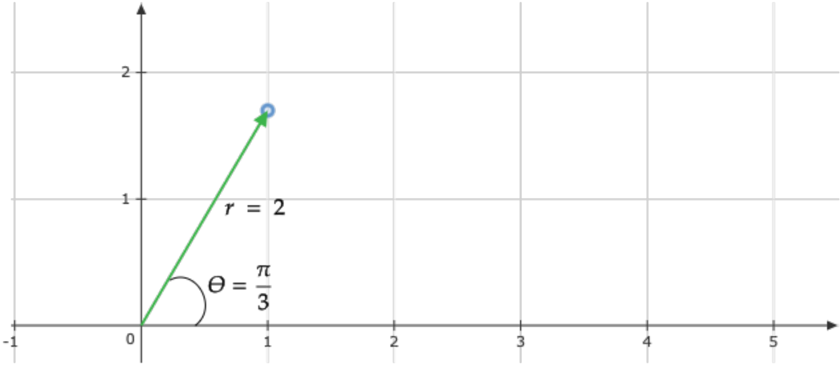


$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\vec{r}(t) = 5\cos(t)\vec{\mathrm{i}} + 5\sin(t)\vec{\mathrm{j}}$$

$$r = 5$$

Exemple : Conversion



Exprimons les coordonnées du point en coordonnées cartésiennes.

Exemple

Décrire la courbe en coordonnées cartésiennes

- $r = 2$

Exemple

Décrire la courbe en coordonnées cartésiennes

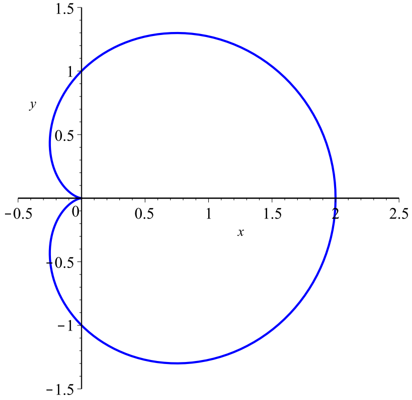
- $r = 2$
- $\theta = 1$

Exemple

Décrire la courbe en coordonnées cartésiennes

- $r = 2$
- $\theta = 1$
- $r = 2\cos(\theta)$

Exemple



La cardioïde $r = 1 + \cos(\theta)$.

Exemple : Description de surfaces

Ex. 6.3 8,12

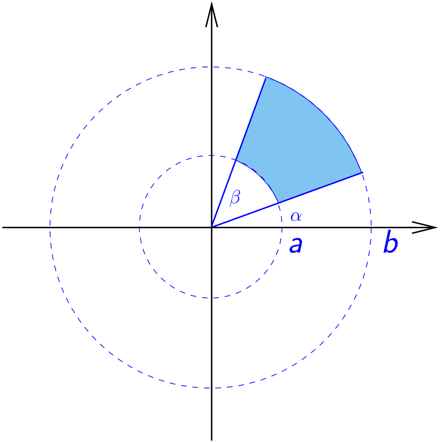
- $0 \leq r < 2, \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

Exemple : Description de surfaces

Ex. 6.3 8,12

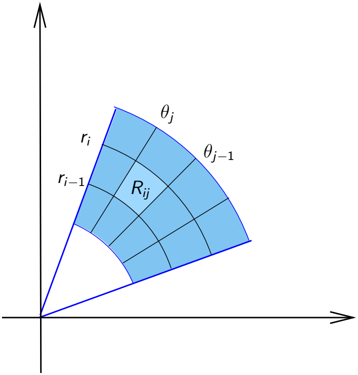
- $0 \leq r < 2, \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$
- $r \geq 1, \pi \leq \theta \leq 2\pi$

On construit une intégrale double en coordonnées polaires en subdivisant d'abord un rectangle polaire en sous-rectangles polaires.



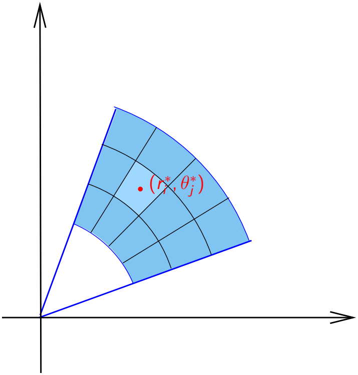
Intégrale double sur un rectangle polaire (2)

On construit une intégrale double en coordonnées polaires en subdivisant d'abord un rectangle polaire en sous-rectangles polaires.



Intégrale double sur un rectangle polaire (3)

On construit une intégrale double en coordonnées polaires en subdivisant d'abord un rectangle polaire en sous-rectangles polaires.



Intégrale double sur un rectangle polaire (4)

Théorème

Soit f une fonction continue sur un rectangle polaire

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ avec } 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi\}\,.$$

Alors

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\, dr\, d\theta.$$

Intégrale double sur un rectangle polaire (5)

Théorème

Soit f une fonction continue sur un rectangle polaire

$$R = \{(r, \theta) \,|\, a \leq r \leq b, \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ avec } 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi\}.$$

Alors

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r \, dr\, d\theta.$$

Le facteur r dans l'intégrale est appelé le **jacobien** du changement de variables.

Construction de l'intégrale

Deux façons de se convaincre :

- En faisant le changement de variables

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$det(J) = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta \end{pmatrix} \right| = r$$

Construction de l'intégrale

Deux façons de se convaincre :

- En faisant le changement de variables

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$det(J) = \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta \end{pmatrix} \right| = r$$

- En calculant l'aire d'un sous-rectangle polaire :

$$\Delta A_{ij} = r_i \Delta r \Delta \theta$$

Exemple

Exercice 6.4.5

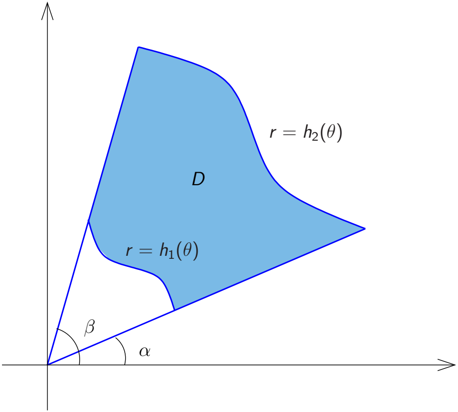
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{1}^{2} r dr d\theta$$

Intégrale double en coordonnées polaires

Soit le domaine du plan

$$D = \{(r, \theta) \mid h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta, \leq \beta\},$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions continues et $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.



Intégrale double en coordonnées polaires (2)

Théorème

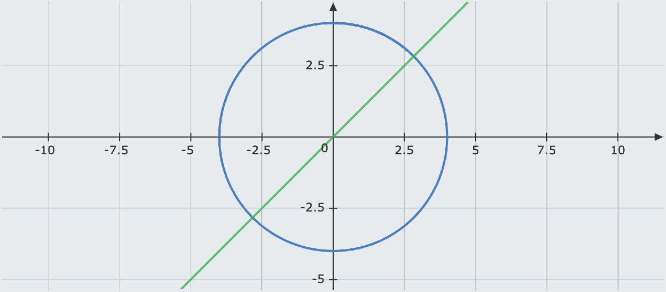
Soit f une fonction continue sur le domaine D ci-dessus.
Alors

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\, dr\, d\theta.$$

Ex. 6.4 8

$$\int\int_R (2x - y)\, dA$$

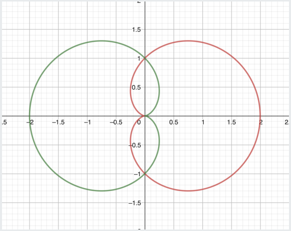
Avec R la région du premier cadran comprise entre le cercle $x^2 + y^2 = 4$ et les droites $x = 0$, $y = x$



Exemples

Ex. 6.4 18

Calculer l'aire de R, la région à l'intérieur de la cardioïde $r = 1 + \cos(\theta)$ et de la cardioïde $r = 1 - cos(\theta)$



Exemples

Ex. 6.4 24

Calculer le volume sous le cône $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ et au dessus de l'anneau $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$