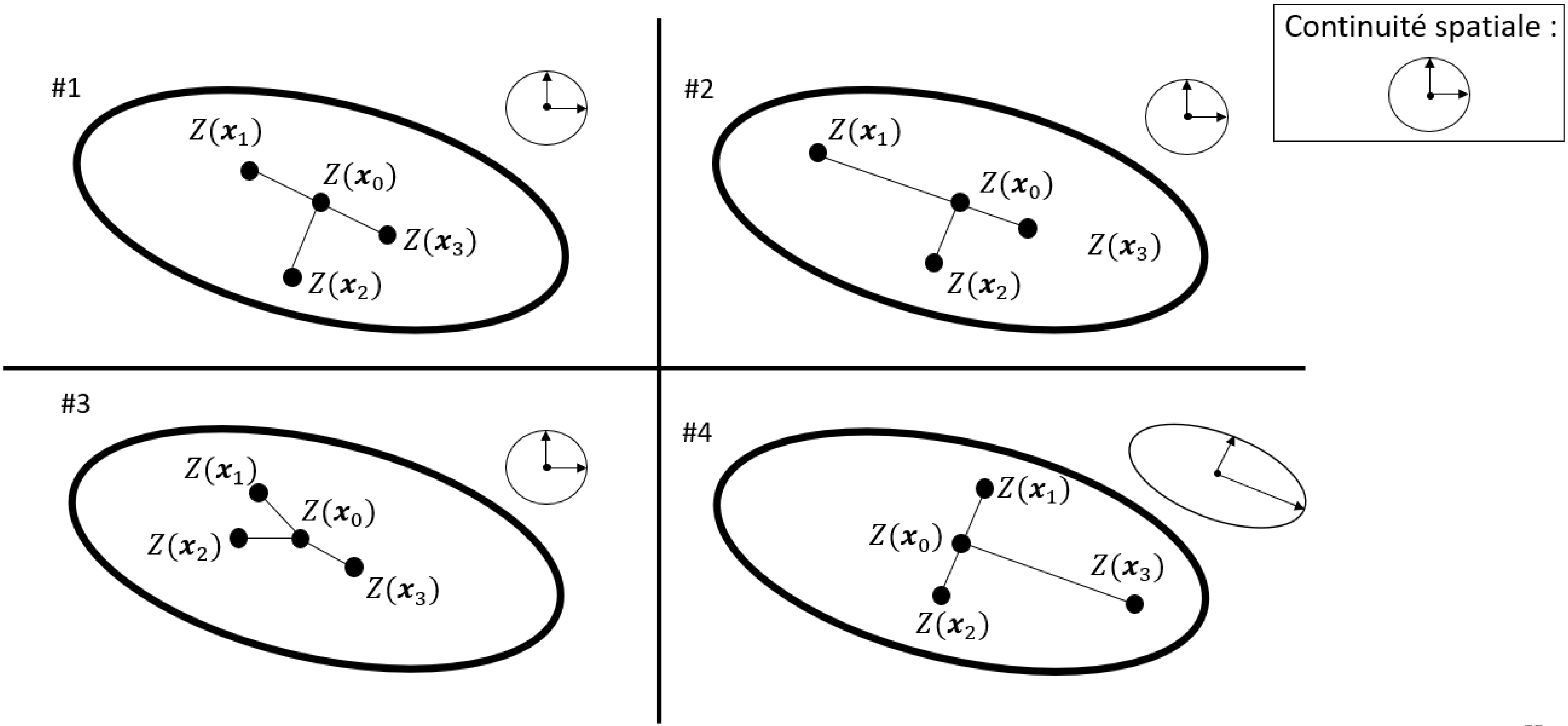
GML6402A : Géostatistique

Cours 3-4 : Krigeage et co-krigeage

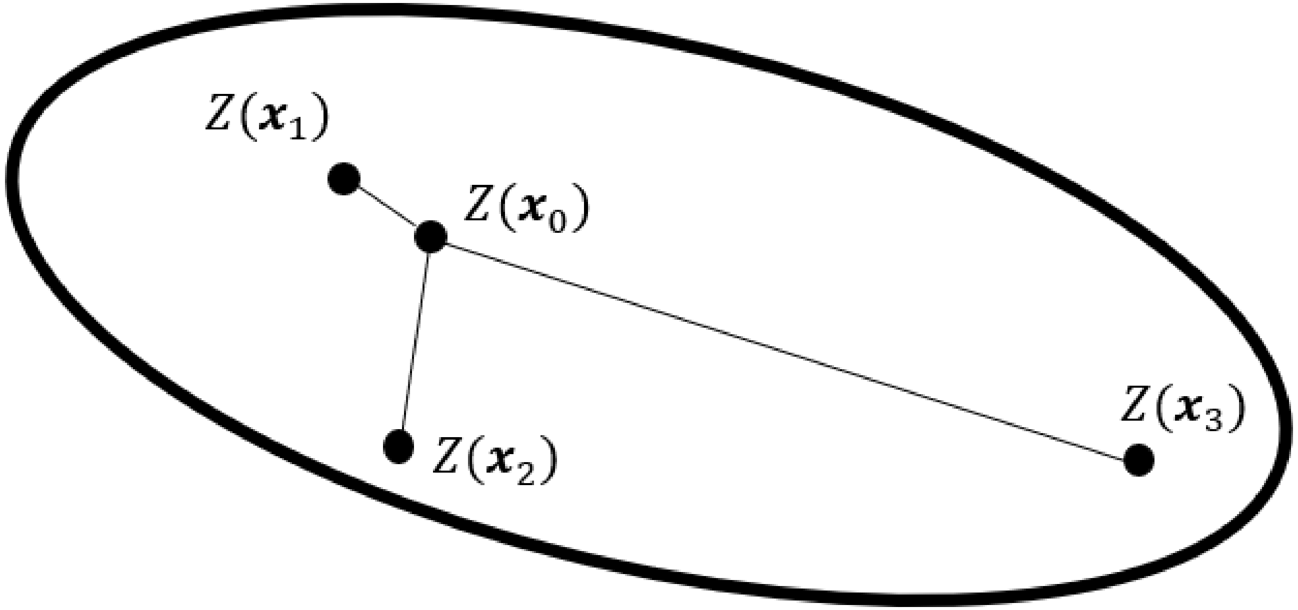
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Mise en situation (2D)



Mise en situation (2D)



Comment déterminer les poids associés aux données $Z(\boldsymbol{x}_1)$, $Z(\boldsymbol{x}_2)$ et $Z(\boldsymbol{x}_3)$?

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Variance d'estimation

Variance d'estimation

$$\sigma_e^2 = Var(Z) + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \, Cov(Z_i, Z_j) - 2 \sum_i \lambda_i Cov(Z_i, Z)$$

Ce que l'on cherche à estimer est-il foncièrement variable ou non ?

Quel est le degré de redondance entre les observations ?

Les observations sont-elles bien placées par rapport à ce que l'on veut estimer ?

Quelques notations d'usage

$Z(x)$ une fonction aléatoire utilisée comme modèle pour la variable d'intérêt régionalisée représentant la réalité

$$\{Z(x): x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$$

$z(x)$ une réalisation de $Z(x)$

$$\{z(x): x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$$

S un ensemble d'observation de $Z(x)$ composes de N points

$$S = \{x_\alpha: \alpha = 1, \dots, N\}$$

Estimateur du krigeage

$$Z^* = \sum_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha + \lambda_0$$

Quelques notations d'usage

Les valeurs des fonctions aux points d'échantillonnage sont référencées par les indices de ces points, tels que

$Z_\alpha = Z(x_\alpha)$; les données
$m_\alpha = m(x_\alpha)$; la moyenne de $Z(x_\alpha)$ ($= \mathrm{E}(Z(x_\alpha))$)
$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma(x_\alpha, x_\beta)$; la covariance entre $Z(x_\alpha)$ et $Z(x_\beta)$

Support

- Krigeage de points (*point-kriging*) → Le même support que les échantillons
- Krigeage de blocs (*block-kriging*) → Un support plus grand que les échantillons

Note : le bloc doit soit être très grand par rapport aux échantillons, qui sont alors traités comme :

- des points;
- soit être une union finie d'unités d'échantillonnage.

Voisinage

La théorie est toujours dérivée comme si tous les N points de données étaient utilisés dans l'estimation

Les formes classiques du krigeage

TABLEAU 3.1: Les principales formes de krigeage linéaire (Chilès and Delfiner, 2012, p.170)

Forme du krigeage	Moyenne	Modèle de dérive	Prérequis
Krigeage simple (KS)	Connue	Aucun	Covariance
Krigeage Ordinaire (OK)	Inconnue	Constant	Variogramme
Krigeage universel (UK)	Inconnue	Fonction des coordonnées	Variogramme
Krigeage avec dérive externe (KED)	Inconnue	Variable(s) externe(s)	Variogramme

Forme non-linéaire : krigeage disjonctif (le krigeage d'indicatrices est une forme de KD) → $h\big(Z(x)\big)^* = \sum_i \; f_i\big(Z(x_i)\big)$
Note : Rivoirard (1994) explicite la méthode, qui est très exigeante en terme de conditions de stationnarité et de ressources informatiques.

Rivoirard, J. (1994). Introduction to Disjunctive Kriging and Non- Linear Geostatistics. Oxford University Press, New York.

Krigeage simple

Connaissance de la moyenne : Simplifie la théorie et confère au krigeage ses propriétés avantageuses.

Cas gaussien : L'estimateur krigeage coïncide avec l'espérance conditionnelle $E(Z_0 \mid Z_1, \dots, Z_\mathrm{n})$.

Estimateur idéale : L'espérance conditionnelle est l'estimateur optimal en termes de l'erreur quadratique moyenne.

Erreur non corrélée : L'erreur $Z * - Z_0$ est non corrélée avec chaque Z_α et avec l'estimateur Z^* lui-même.

Dans le monde réel : La moyenne est connue seulement en cas de répétitions (processus espace-temps) ou lorsque le nombre de données est suffisant pour une estimation précise.

Krigeage simple

Estimateur

$$Z^* = m_0 + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha (Z_\alpha - m_\alpha)$$

Détermination des poids

$$\sigma_e^2 = \sigma_{00} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \, \sigma_{\alpha\beta} - 2 \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \sigma_{\alpha 0}$$

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \lambda_\alpha} = 2 \sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} - 2\sigma_{\alpha 0} = 0; \alpha = 1, \dots, N$$

Note : Il s'agit d'un minimum, garanti par la propriété de positivité de la fonction de covariance — l'erreur quadratique moyenne est une fonction convexe.

Krigeage simple

Système de krigeage simple $$\sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha 0}\,, \alpha = 1, \dots, N$$

Le système de krigeage simple (SK), a une solution unique, à condition que la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ soit non singulière

Forme matricielle $$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\sigma}_0$$

Variance du krigeage simple $$\sigma^2_{SK} = \sigma_{00} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\sigma}_0$$

$$\underbrace{\overset{\boldsymbol{K}_S = \boldsymbol{\Sigma}}{\begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) & Cov(Z_1, Z_3) \\ Cov(Z_2, Z_1) & Cov(Z_2, Z_2) & Cov(Z_2, Z_3) \\ Cov(Z_3, Z_1) & Cov(Z_3, Z_2) & Cov(Z_3, Z_3) \end{bmatrix}}}_{\textbf{Matrice de redondance}} \overset{\boldsymbol{\lambda}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}} = \underbrace{\overset{\boldsymbol{k}_S = \boldsymbol{\sigma}_0}{\begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_0) \\ Cov(Z_2, Z_0) \\ Cov(Z_3, Z_0) \end{bmatrix}}}_{\textbf{Vecteur de proximité}}$$

Propriétés

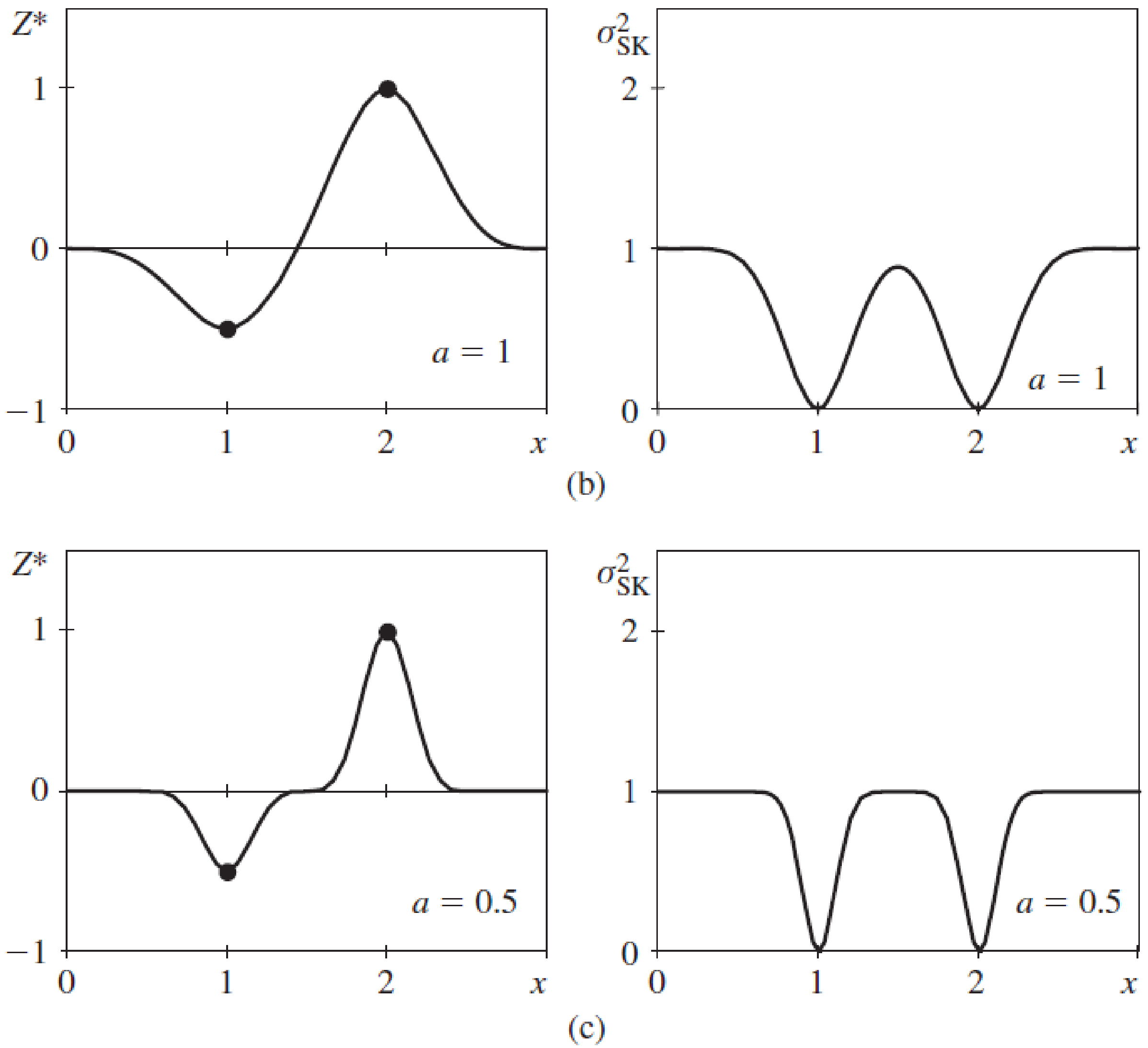


FIGURE 3.1 Simple kriging estimate and variance for the case of two data points and a cubic covariance model with $C(0)=1$. From (a) to (c): the estimator becomes "wigglier" as the range a decreases.

Propriétés

Effet de lissage (*Smoothing effect*)

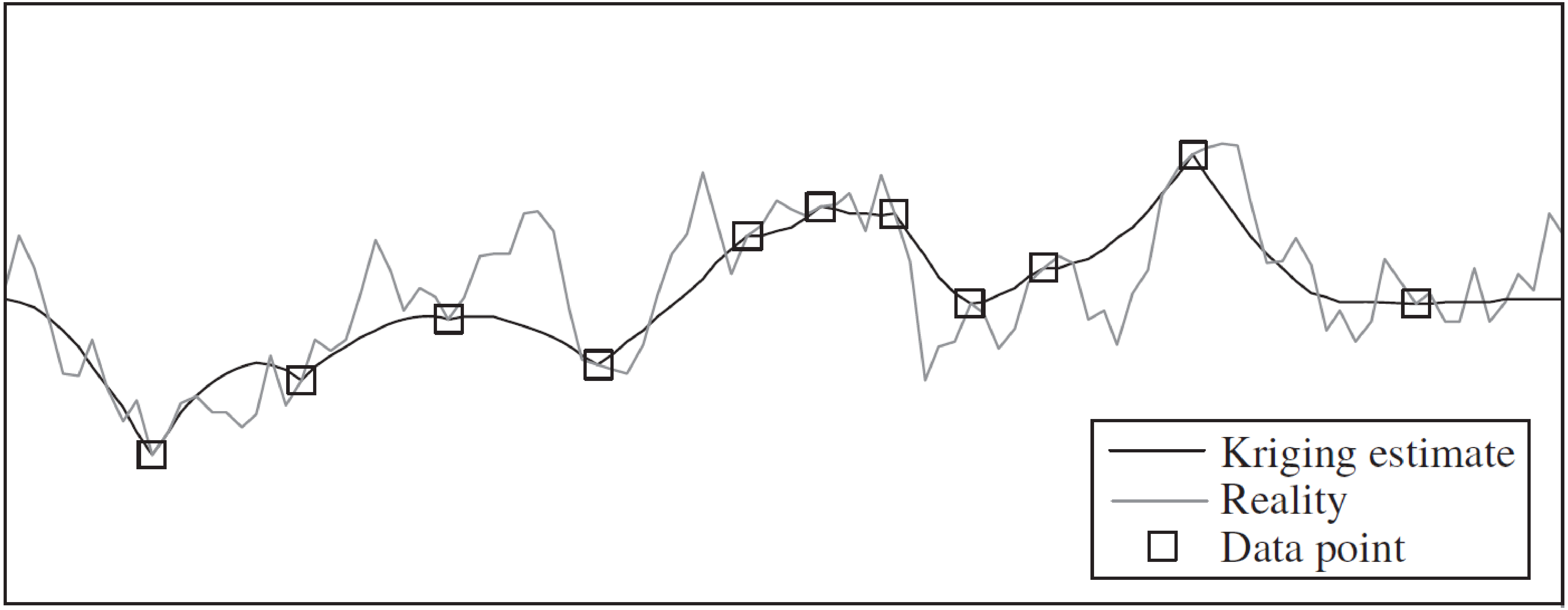


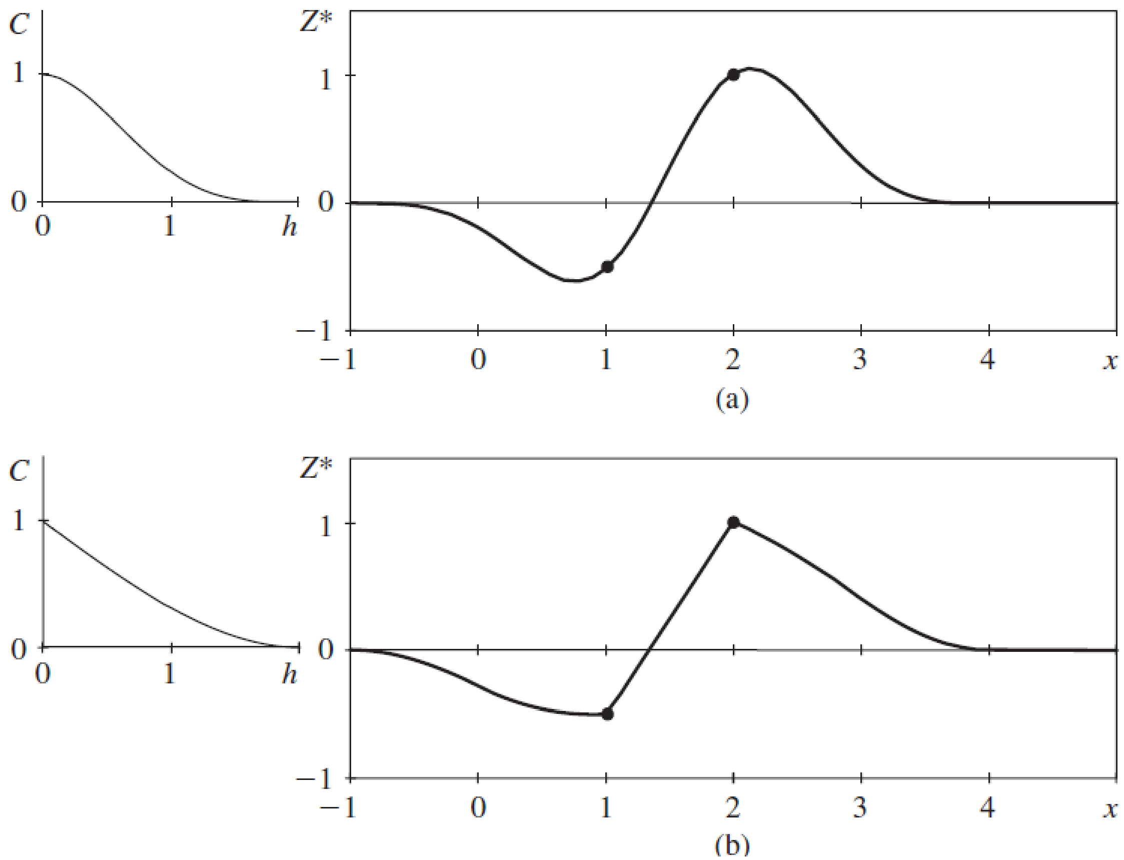
FIGURE 3.2 Illustration of the smoothing effect of kriging.

Propriétés

Interpolation (forme duale)

$$z^* = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_x = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\lambda}$$

$$z^*(x) = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\sigma}_x = \sum_{\alpha} b_\alpha \sigma(x_\alpha, x)$$



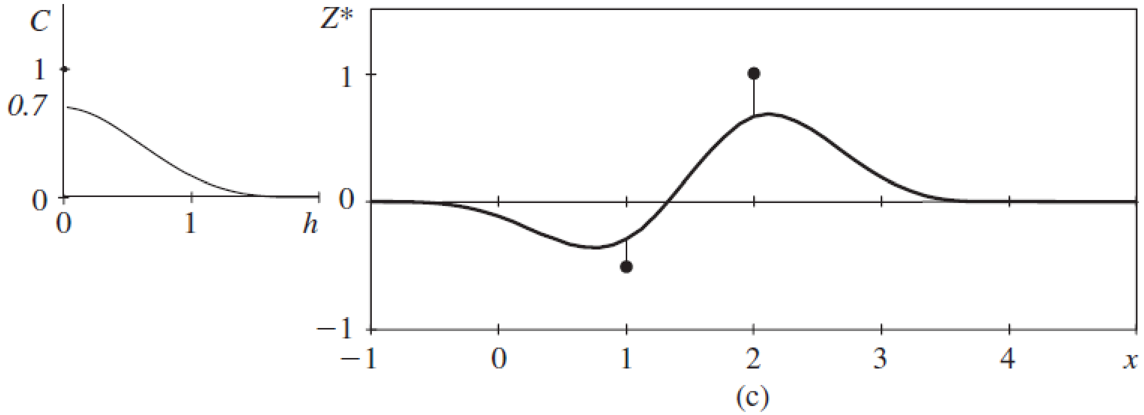


FIGURE 3.3 The dependence of the simple kriging estimate on the regularity near the origin of the covariance function: (a) parabolic behavior; (b) linear behavior; (c) discontinuity.

Propriétés

Théorie de la régression gaussienne

Lorsque $Z(x)$ est un champs aléatoire gaussian, l'estimation par krigeage simple Z^* coincide avec l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(Z_0|Z_1, \dots Z_N)$.

Qu'est-ce que cela veut dire?

$$E(Z_0|Z^*) = Z^*$$
$$Var(Z_0|Z^*) = \sigma_{SK}^2$$

La propriété selon laquelle $\mathrm{E}(Z_0|Z^*) \ = Z^*$, appelée "**non-biais conditionnel**", est d'une grande importance pratique dans le contexte des problèmes d'évaluation des ressources.

Par exemple, en exploitation minière sélective, la décision de traiter un bloc comme minerai ou de l'envoyer en décharge est basée sur une estimation Z^* de la teneur moyenne de ce bloc, mais la récupération réelle du minerai dépend de Z_0.

Le **non-biais conditionnel garantit que, en moyenne, nous obtenons ce que nous attendons.**

En exploitation minière, cette propriété est considérée comme plus essentielle que la variance minimale.

Krigeage universel

Moyenne inconnue : $m(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l f^l(x)$

Forme du krigeage	Moyenne	Modèle de dérive	Fonction
Krigeage Ordinaire (OK)	Inconnue	Constant	$m(x) = a_0$
Krigeage universel (UK)	Inconnue	Fonction des coordonnées	$m(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l f^l(x)$
Krigeage avec dérive externe (KED)	Inconnue	Variable(s) externe(s)	$m(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l Y_l(x)$

Krigeage ordinaire

Estimateur

$$Z^* = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha Z_\alpha + \lambda_0$$

Détermination des poids (Multiplicateur de Lagrange)

$$Q = \sigma_e^2 + 2\mu\left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha - 1\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_\alpha} = 2\sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} - 2\sigma_{\alpha 0} = 0; \qquad \alpha = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 2\left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha - 1\right) = 0$$

Note : Il s’agit d’un minimum, garanti par la propriété de positivité de la fonction de covariance — l'erreur quadratique moyenne est une fonction convexe.

Krigeage ordinaire

Système de krigeage ordinaire

$$\sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} + \mu = \sigma_{\alpha 0}\,, \alpha = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha = 1$$

Forme matricielle

$$\boldsymbol{\Sigma\lambda} = \boldsymbol{\sigma}_0$$

Variance du krigeage ordinaire

$$\sigma_{SK}^2 = \sigma_{00} - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\sigma}_0$$

$$\underbrace{\overset{\boldsymbol{\Sigma}}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & cov(Z_1,Z_2) & \dots & cov(Z_1,Z_n) & 1 \\ cov(Z_2,Z_1) & \sigma^2 & \dots & cov(Z_2,Z_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov(Z_n,Z_1) & cov(Z_n,Z_2) & \dots & \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}}_{\text{Matrice de redondance}} \overset{\boldsymbol{\lambda}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}} = \underbrace{\overset{\boldsymbol{\sigma}_0}{\begin{bmatrix} cov(Z_1,Z) \\ cov(Z_2,Z) \\ \dots \\ \dots \\ cov(Z_n,Z) \\ 1 \end{bmatrix}}}_{\text{Vecteur de proximité}}$$

Krigeage universel (avec tendance)

Estimateur

$$Z^* = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_l a_l f_\alpha^l = \sum_\alpha \lambda_\alpha Z_\alpha$$

Condition de non-biais

$$\mathrm{E}(Z^* - Z_0) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_l a_l f_\alpha^l - \sum_l a_l f_0^l = \sum_l a_l \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha^l - f_0^l \right) = 0$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha^l = f_0^l$$

Krigeage universel (avec tendance)

Estimateur

$$Z^* = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \sum_{l} a_l f_\alpha^l = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha Z_\alpha$$

Détermination des poids (Multiplicateur de Lagrange augmenté)

$$Q = \sigma_e^2 + 2 \sum_{l=0}^{L} \mu_l \left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha f_\alpha^l - f_0^l \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_\alpha} = 2 \sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} - 2\sigma_{\alpha 0} = 0; \qquad \alpha = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu_l} = 2 \left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha f_\alpha^l - f_0^l \right) = 0; \qquad l = 1, \dots, L$$

Note : Il s'agit d'un minimum, garanti par la propriété de positivité de la fonction de covariance — l'erreur quadratique moyenne est une fonction convexe.

Krigeage universel (avec tendance)

Système de krigeage ordinaire

$$\sum_{\beta} \lambda_\beta \sigma_{\alpha\beta} + \sum_{l} \mu_l \, f_\alpha^l = \sigma_{\alpha 0}\,, \qquad \alpha = 1, \dots, N;$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_\alpha f_\alpha^l = f_0^l\,, \qquad l = 1, \dots, L;$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}' & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

where $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\lambda}$, and $\boldsymbol{\sigma}_0$ are defined as for simple kriging and where

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & f_1^1 & . & f_1^L \\ 1 & f_2^1 & . & f_2^L \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & f_N^1 & . & f_N^L \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ f_0^1 \\ . \\ . \\ . \\ f_0^L \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\mathrm{UK}}^2 = \mathrm{E}(Z^* - Z_0)^2 = \sigma_{00} - \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \sigma_{\alpha 0} - \sum_{\ell} \mu_\ell f_0^\ell$$

Krigeage avec dérive (coordonnées)

Exemples:

i- Le krigeage ordinaire (m(x)= m)

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \quad f = 1$$

ii- Dérive linéaire en 1D : m(x)=a+b*x

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & . \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

iii- Dérive linéaire en 2D : m(x)=a+b*x+c*y

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

iv- Dérive quadratique en 2D : m(x)=a+b*x+c*y+d*x²+e*x*y+f*y²

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 \\ x_0 y_0 \\ y_0^2 \end{bmatrix}$$

Krigeage avec dérive (coordonnées)

Exemples:

v- Écoulement régional (linéaire) + écoulement radial vers un puits :

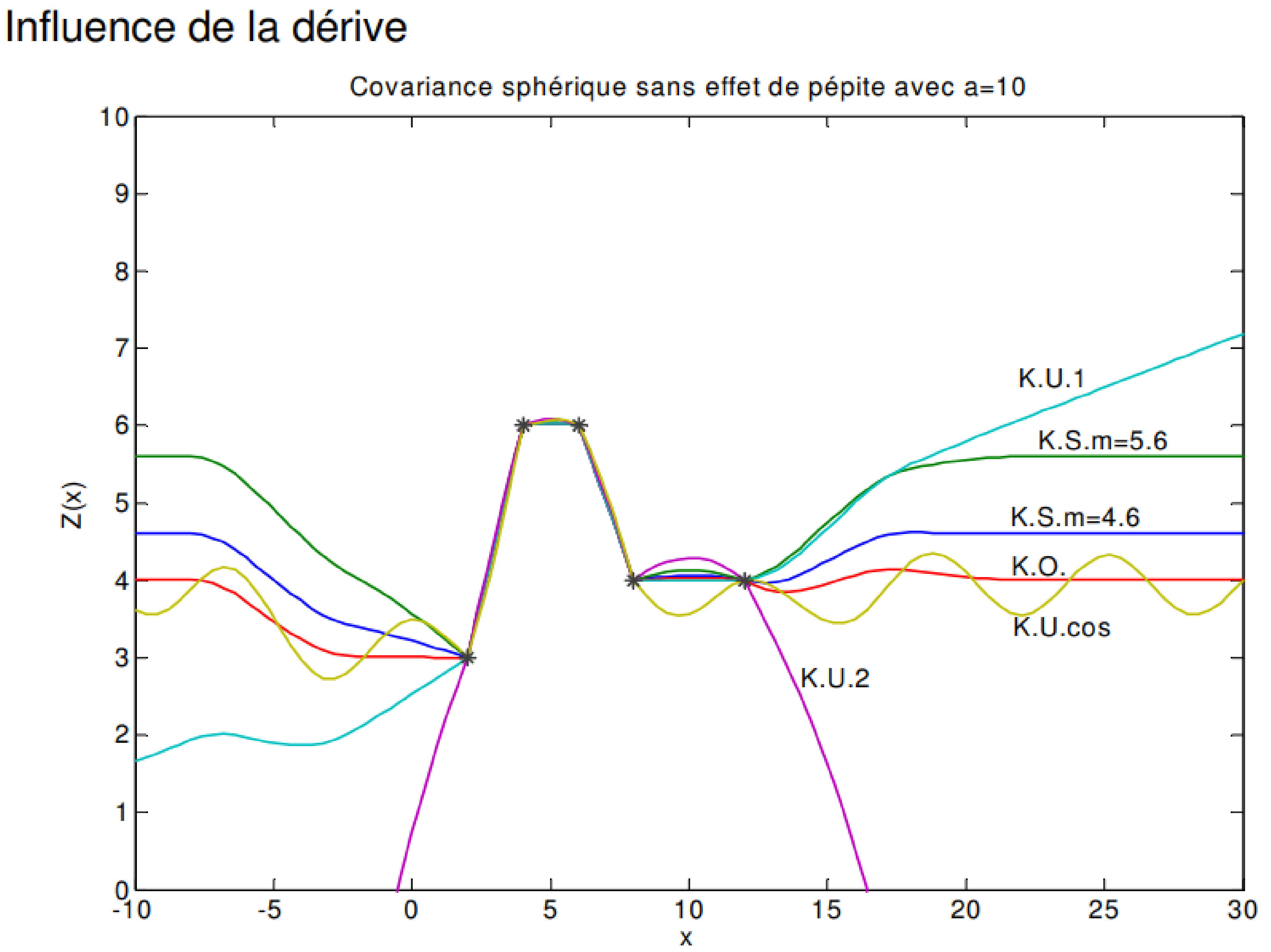
$m(x)=a+b^*x+c^*y+d^*\log((x-x_{puits})^2+(y-y_{puits})^2)=a+b^*x+c^*y+d^*\ln(|h_{i,puits}|)$

où « $h_{i,puits}$ » est la distance entre le point et le puits

$$F=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & \ln(|h_{1,puits}|)\\ 1 & x_2 & y_2 & \ln(|h_{2,puits}|)\\ . & . & . & .\\ 1 & x_n & y_n & \ln(|h_{n,puits}|)\end{bmatrix} \qquad f=\begin{bmatrix}1\\ x_0\\ y_0\\ \ln(|h_{0,puits}|)\end{bmatrix}$$

3.3 Krigeage avec dérive (coordonnées)

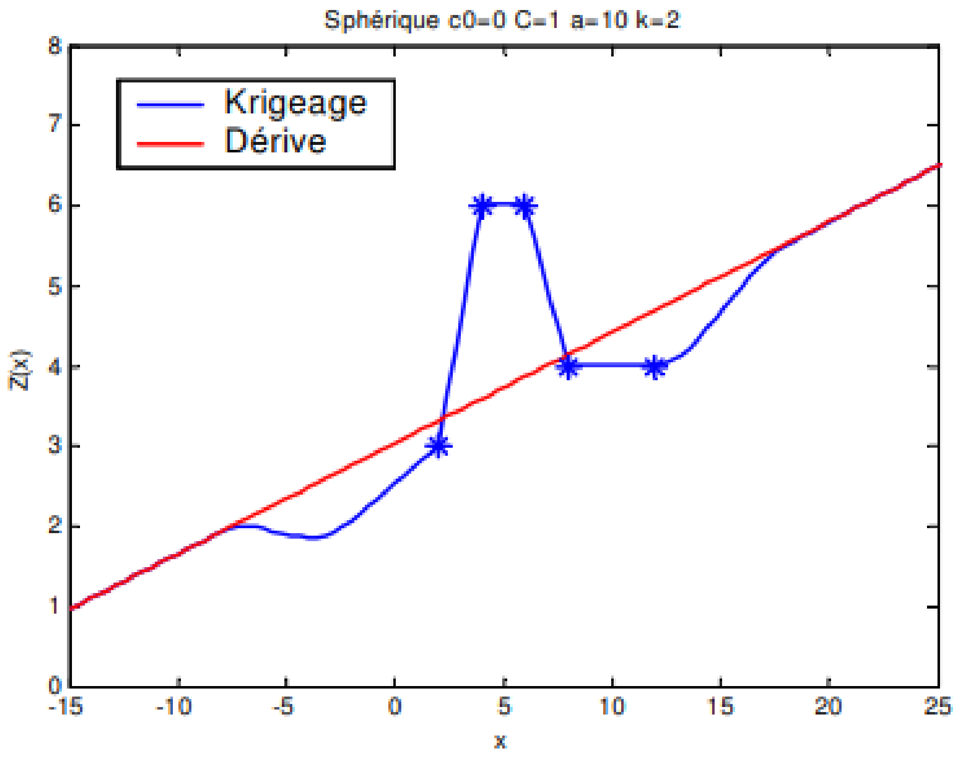
Influence de la dérive



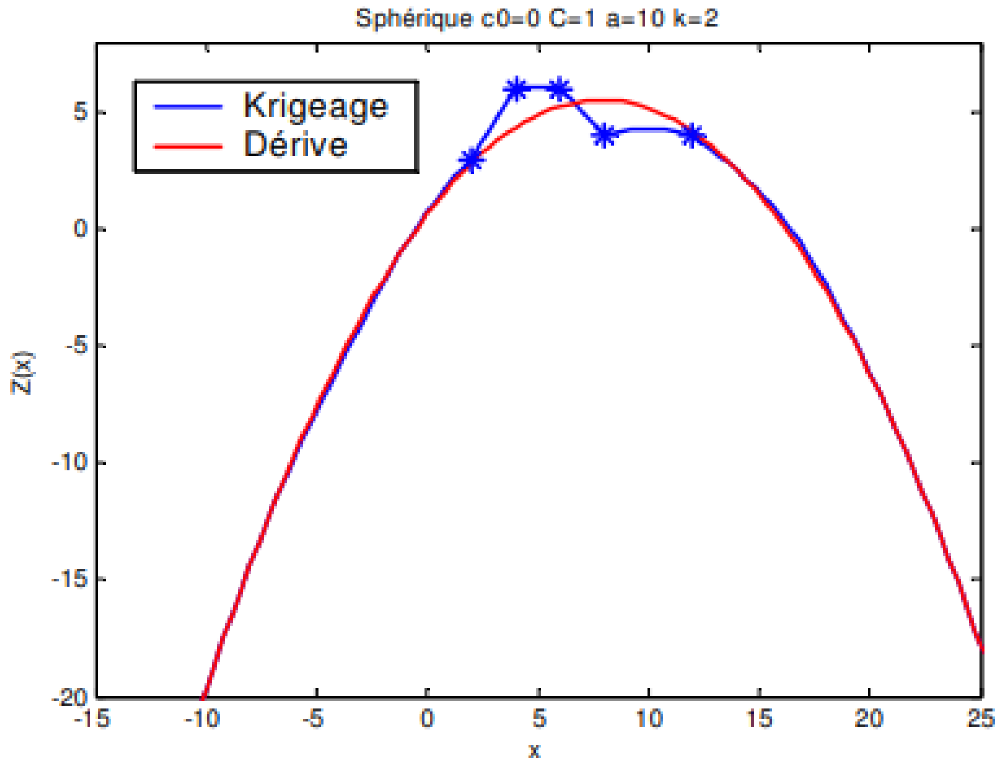
3.3 Krigeage avec dérive (coordonnées)

À grande distance des données, l’estimation coïncide avec la dérive estimée

Dérive linéaire

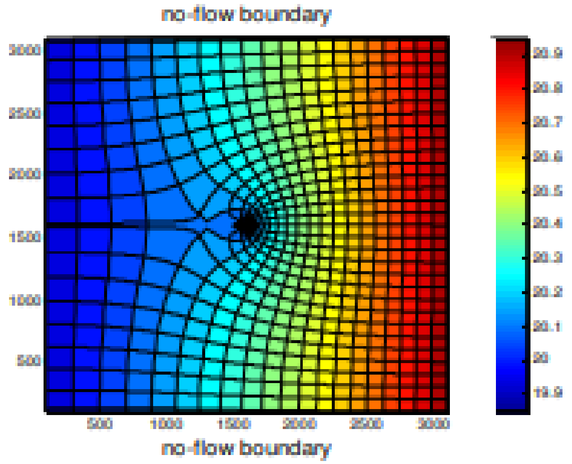


Dérive quadratique



3.3 Krigeage avec dérive (coordonnées)

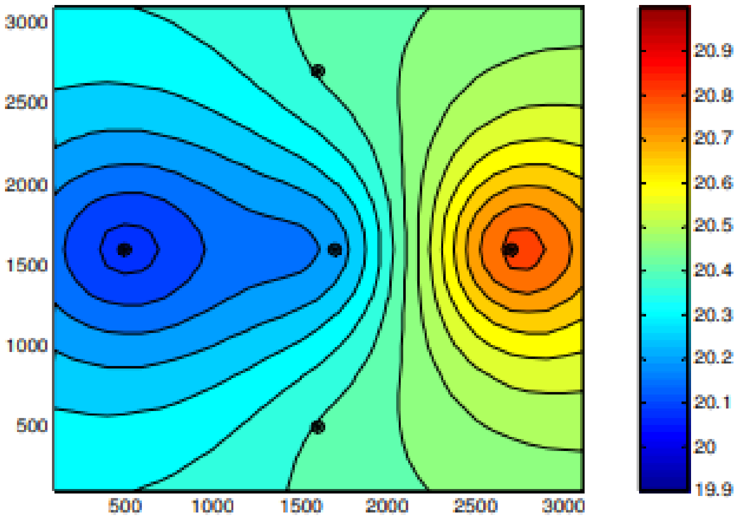
Parfois, l'inclusion d'une dérive aide à produire des cartes plus fidèles à la physique du phénomène



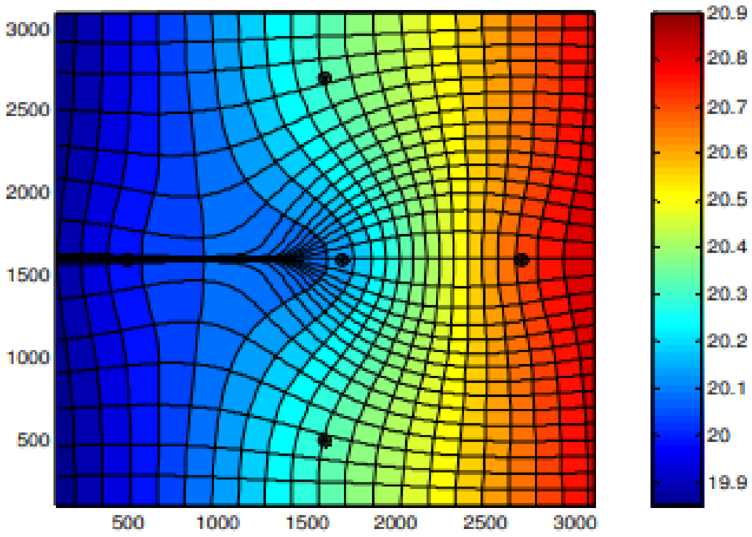
Exemple: carte de charge hydraulique

Différents krigeages avec 5 données

K. ordinaire



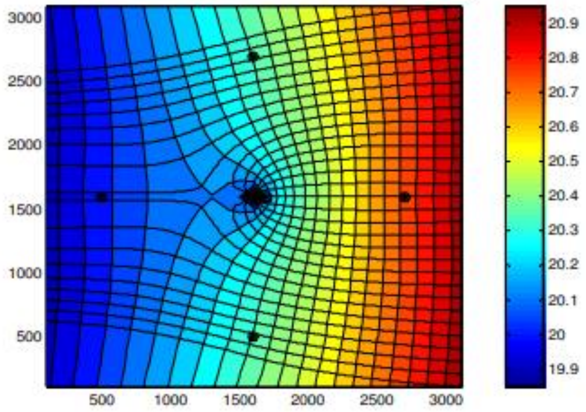
K. Dérive ordre 1



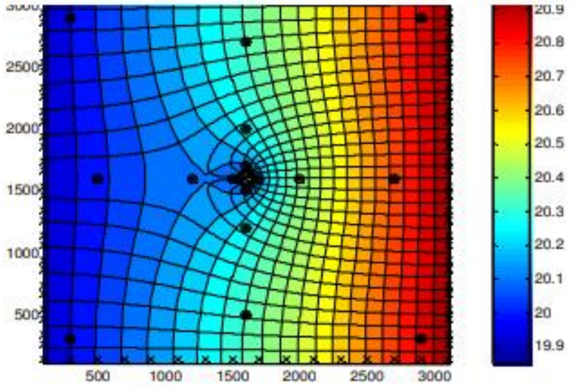
3.3 Krigeage avec dérive (coordonnées)

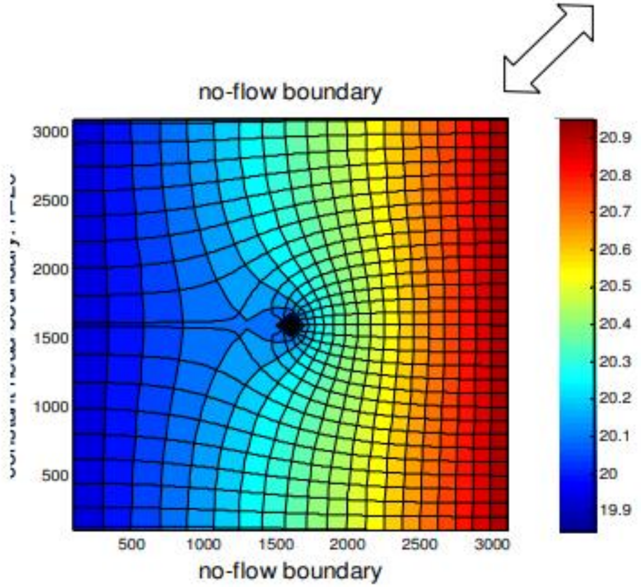
Parfois, l'inclusion d'une dérive aide à produire des cartes plus fidèles à la physique du phénomène

K. dérive ordre 1 + dérive puits



K. dérive ordre 1 + dérive puits + contrainte gradients aux frontières N et S



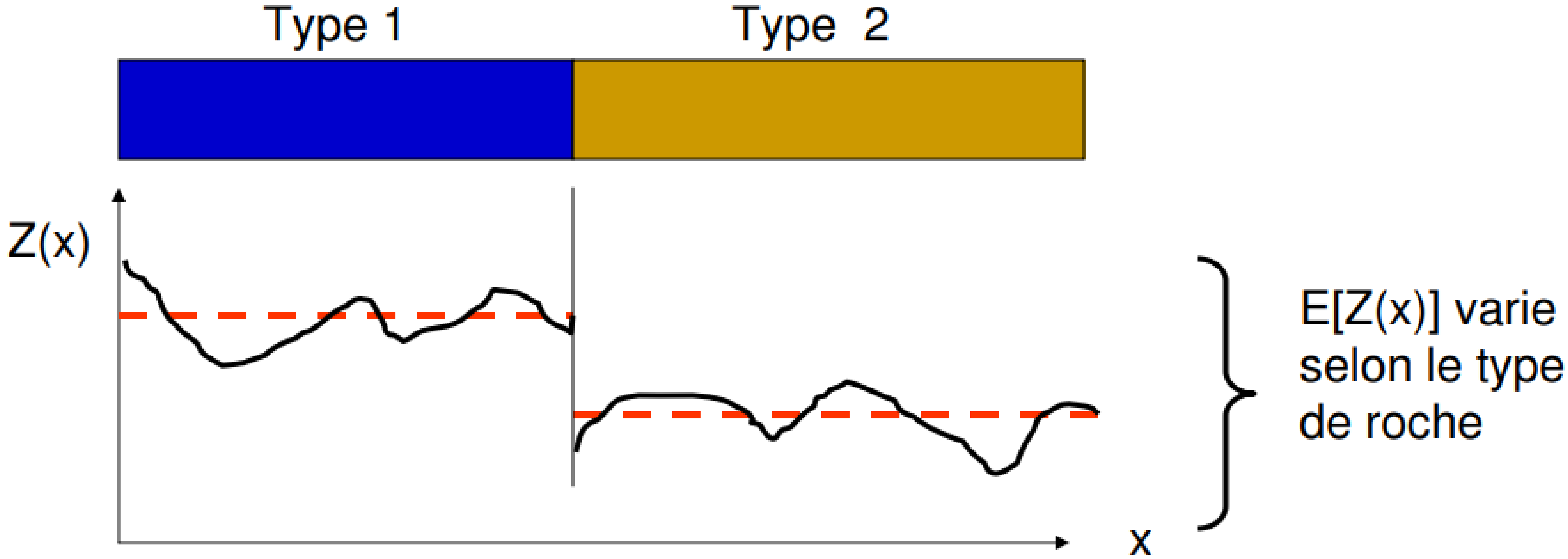


Réalité numérique avec frontières imperméables au nord et au sud

3.3 Krigeage avec dérive (externe)

Lorsque la dérive est liée à une autre variable

Exemple : variable indicatrice du type de roche



3.3 Krigeage avec dérive (externe)

Lorsque la dérive est liée à une autre variable

On peut écrire : $m(x) = m + aI(x);$ $\quad (I(x) = 0 \; si \; type \; 1, I(x) = 1, si \; type \; 2)$

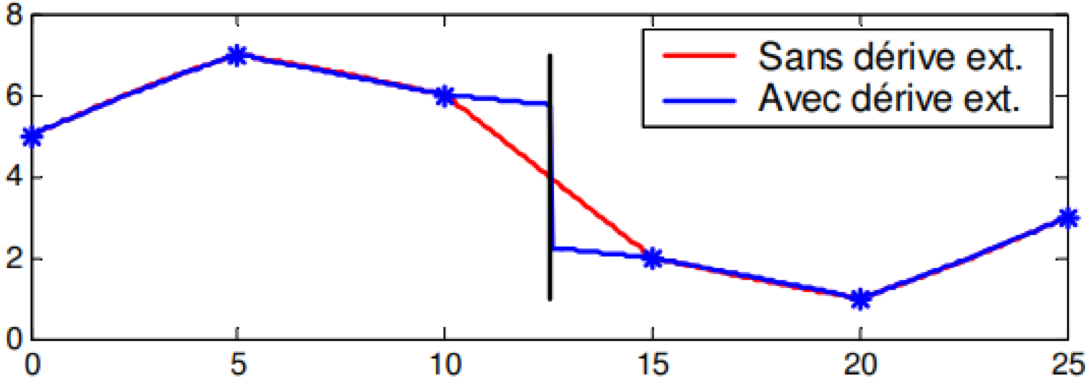
3 points dans roche 1

3 points dans roche 2

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X_0 dans roche 2

X_0 dans roche 1

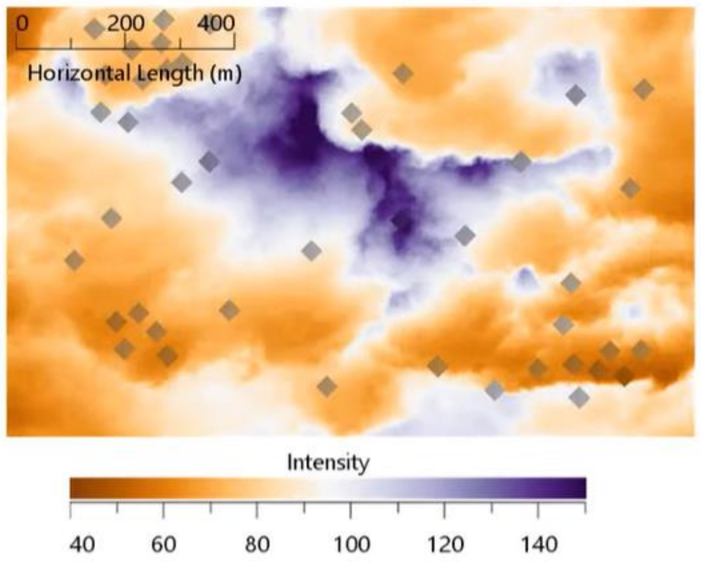


3.3 Krigeage avec dérive (externe)

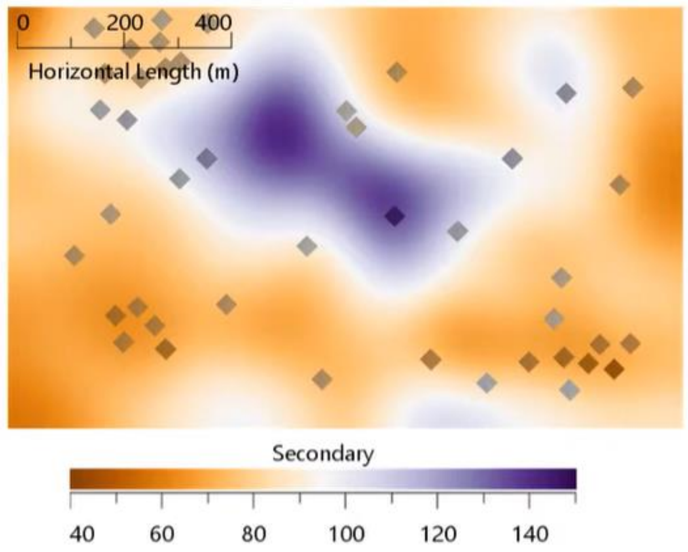
Lorsque la dérive est liée à une autre variable

Autre exemple : Tiré de Guillaume Caumon, professeur ENSG

Variable primaire

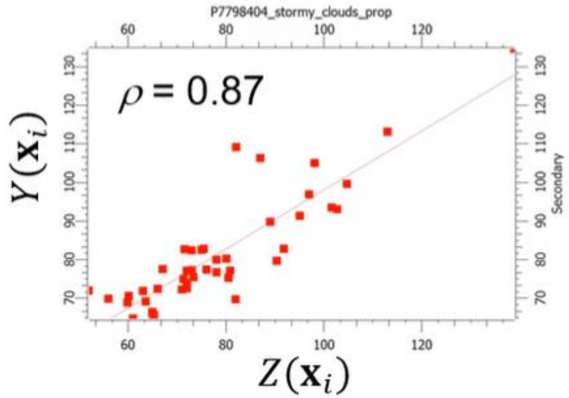


Données secondaires



Echantillons $Z(\mathbf{x}_i)$

Image $Y(\mathbf{x})$
(ex: image géophysique)



4. Estimation de la covariance des résidus

$$Z(x) = m(x) + Y(x) \longrightarrow Cov\big(Z(x), Z(x+h)\big) = cov\big(Y(x), Y(x+h)\big)$$

$\Rightarrow$ Pour effectuer le krigeage avec dérive, on doit connaître la covariance des résidus $Y(x)$

Méthodes :

i. Estimer la dérive, calculer les résidus puis le variogramme des résidus (biais sur le variogramme, surtout à grande distance $\Rightarrow$ sous-estimation des variances d'estimation)

ii. Calculer le variogramme selon une direction non affectée par la dérive et supposer l'isotropie du modèle (ou imposer une anisotropie ad hoc)

iii. Initier un processus itératif : modèle $\Rightarrow$ dérive $\Rightarrow$ résidus $\Rightarrow$ modèle $\Rightarrow$... Les changements au modèle se font par une méthode de type gradient basée sur les résultats d'une validation croisée.

iv. Lorsque la dérive est de faible amplitude, on peut utiliser directement le variogramme de $Z(x)$ à faible distance.

5. Krigeage sous forme dual

Krigeage primal : $\begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix}$

Valeur estimée : $Z^* = \begin{bmatrix} Z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$

$$Z^* = \begin{bmatrix} Z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix}$$

5. Krigeage sous forme dual

Interprétation des poids duaux

Dérive linéaire

$$Z(x) = \mu(x) + Y(x) = \underbrace{\mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1 \mathrm{x}}_{\textbf{dérive}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_{j0}}_{\textbf{fluctuations}}$$

$$Z^* = [Z' \quad 0] \begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix} = [a' \quad b'] \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ f \end{bmatrix}$$

Dérive linéaire avec deux données

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 1 & x_1 \\ C_{21} & C_{22} & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Krigeage sous forme dual

Avantages :

- Rapidité pour le calcul d'une nouvelle valeur estimée
- Possibilité de formuler des contraintes

Désavantage :

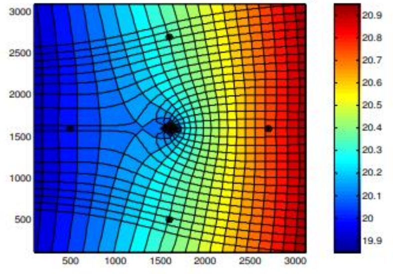
- Pas possible d'obtenir la variance de krigeage

5. Krigeage sous forme dual

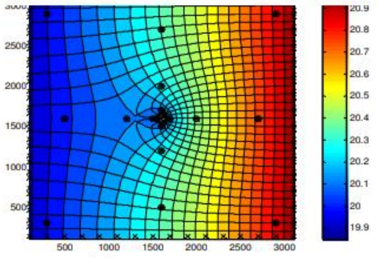
$$\begin{bmatrix} K_{hh} & K_{h\Delta} & F_h \\ K_{h\Delta} & K_{\Delta\Delta} & F_\Delta \\ F_h^T & F_\Delta^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_h \\ c_\Delta \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

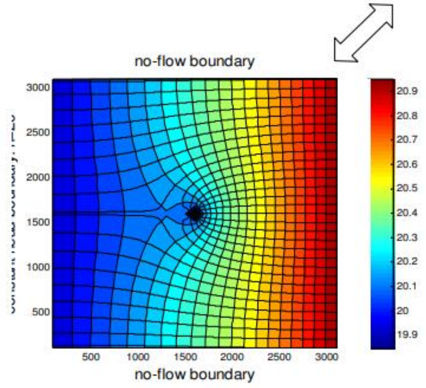
Voir Brochu et Marcotte (2004)

K. dérive ordre 1 + dérive puits



K. dérive ordre 1 + dérive puits + contrainte gradients aux frontières N et S





Réalité numérique avec frontières imperméables au nord et au sud

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{1,1-2} & 1 & x_1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{2,1-2} & 1 & x_2 \\ C_{3-4,1} & C_{3-4,2} & C_{3-4,3-4} & 0 & x_3 - x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 - x_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 - Z_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Autres informations (Aspects pratiques)

Par construction : estimateur linéaire, sans biais, à variance d’estimation minimale

1. Presque sans biais conditionnel
2. Effet de lissage
3. Interpolateur exact
4. Effet d'écran
5. Tiens compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux.
6. Tiens compte de la continuité spatiale du phénomène étudié
7. Transitif (cohérence des estimations)

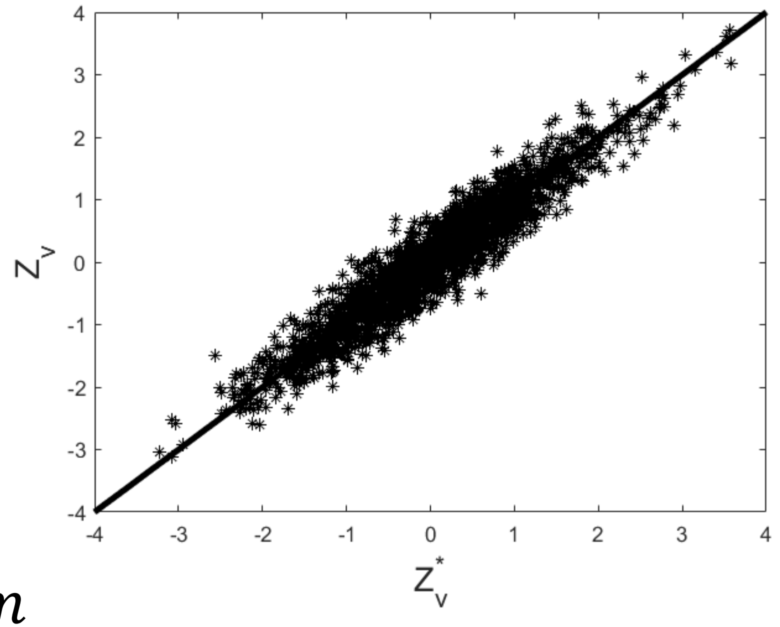
7. Autres informations (Aspects pratiques)

1. Presque sans biais conditionnel :

Définition : Biais conditionnel

Si Z_v et Z_v^* suivent une loi binormale de moyenne m, alors la régression linéaire de Z_v sur Z_v^* s'écrit :

$$E[Z_v|Z_v^*] = a + bZ_v^*$$



Avec

$$b = \frac{Cov(Z_v, Z_v^*)}{Var(Z_v^*)}$$

$$\mathrm{a} = \left(1 - \frac{Cov(Z_v, Z_v^*)}{Var(Z_v^*)}\right) m = (1-b)m$$

7. Autres informations (Aspects pratiques)

1. Presque sans biais conditionnel :

$$E[Z_v|Z_v^*] = a + bZ_v^* \; ; \quad b = \frac{Cov(Z_v, Z_v^*)}{Var(Z_v^*)} \; ; \quad \mathrm{a} = (1-b)m$$

<u>Krigeage simple, par construction :</u>

$$Var(Z_v^*) = Cov(Z_v, Z_v^*) \rightarrow b = 1\,; a = 0 \rightarrow \boxed{E[Z_v|Z_v^*] = Z_v^*}$$

- Le krigeage simple est sans biais conditionnel seulement dans le cas normal.

- Si on n'est pas dans un cas normal, alors on peut simplement dire que l'estimateur KS est approximativement sans biais conditionnel.

7. Autres informations (Aspects pratiques)

1. Presque sans biais conditionnel :

$$E[Z_v|Z_v^*] = a + bZ_v^* \; ; \quad b = \frac{Cov(Z_v, Z_v^*)}{Var(Z_v^*)} \; ; \quad \mathrm{a} = (1-b)m$$

<u>Krigeage ordinaire, par construction :</u>

$$Var(Z_v^*) + \mu = Cov(Z_v, Z_v^*) \rightarrow b = 1 + \frac{\mu}{Var(Z_v^*)} \; ; a = \frac{-\mu}{Var(Z_v^*)}$$

$$\rightarrow E[Z_v|Z_v^*] = \boxed{Z_v^* + \frac{\mu}{Var(Z_v^*)}(Z_v^* - m)}$$

- Dans le cas normal, l'estimateur KO présente un biais conditionnel proportionnel à μ
- Si $\mu < 0 \; \rightarrow b < 1$, alors les fortes valeurs de KO surestiment les vraies teneurs des blocs
- Si $|\mu|$ tend vers 0, alors KO tend à être sans biais conditionnel

7. Autres informations (Aspects pratiques)

2. Effet de lissage :

Krigeage simple : $Var(Z_v) = Var(Z_v^*) + \sigma_{KS}^2$

$$\boxed{Var(Z_v^*) \leq Var(Z_v)}$$

L'estimateur KS est ***toujours*** moins variable que la réalité qu'il cherche à estimer

Krigeage ordinaire : $Var(Z_v) = Var(Z_v^*) + \sigma_{KO}^2 + 2\mu$

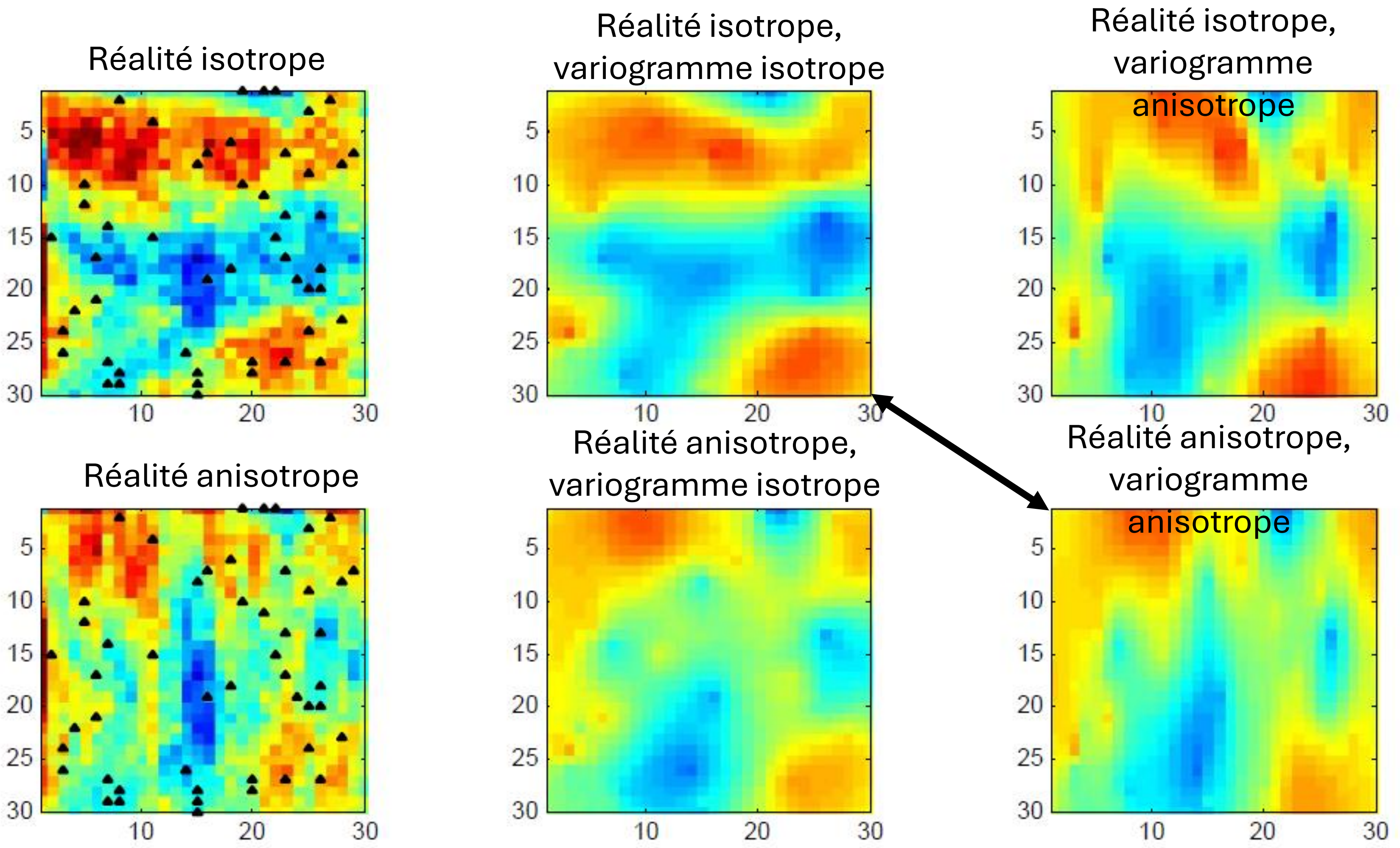
Habituellement, $\mu < 0$ et $2|\mu| < \sigma_{KO}^2$

$$\boxed{Var(Z_v^*) \leq Var(Z_v)}$$

L'estimateur KO est ***habituellement*** moins variable que la réalité qu'il cherche à estimer

7. Autres informations (Aspects pratiques)

2. Effet de lissage :



7. Autres informations (Aspects pratiques)

2. Effet de lissage :

Lien entre le lissage et le biais conditionnel :

$$b = \frac{Cov(Z_v, Z_v^*)}{Var(Z_v^*)} = \frac{\rho\sigma_v\sigma_v^*}{{\sigma_v^*}^2} = \frac{\rho\sigma_v}{\sigma_v^*}$$

Une absence de biais conditionnel implique que $b = 1$, alors $\sigma_v^* \leq \sigma_v$

- Un estimateur sans lissage est nécessairement avec biais conditionnel.

- Les valeurs estimées doivent montrer une variance inférieure aux vraies valeurs.

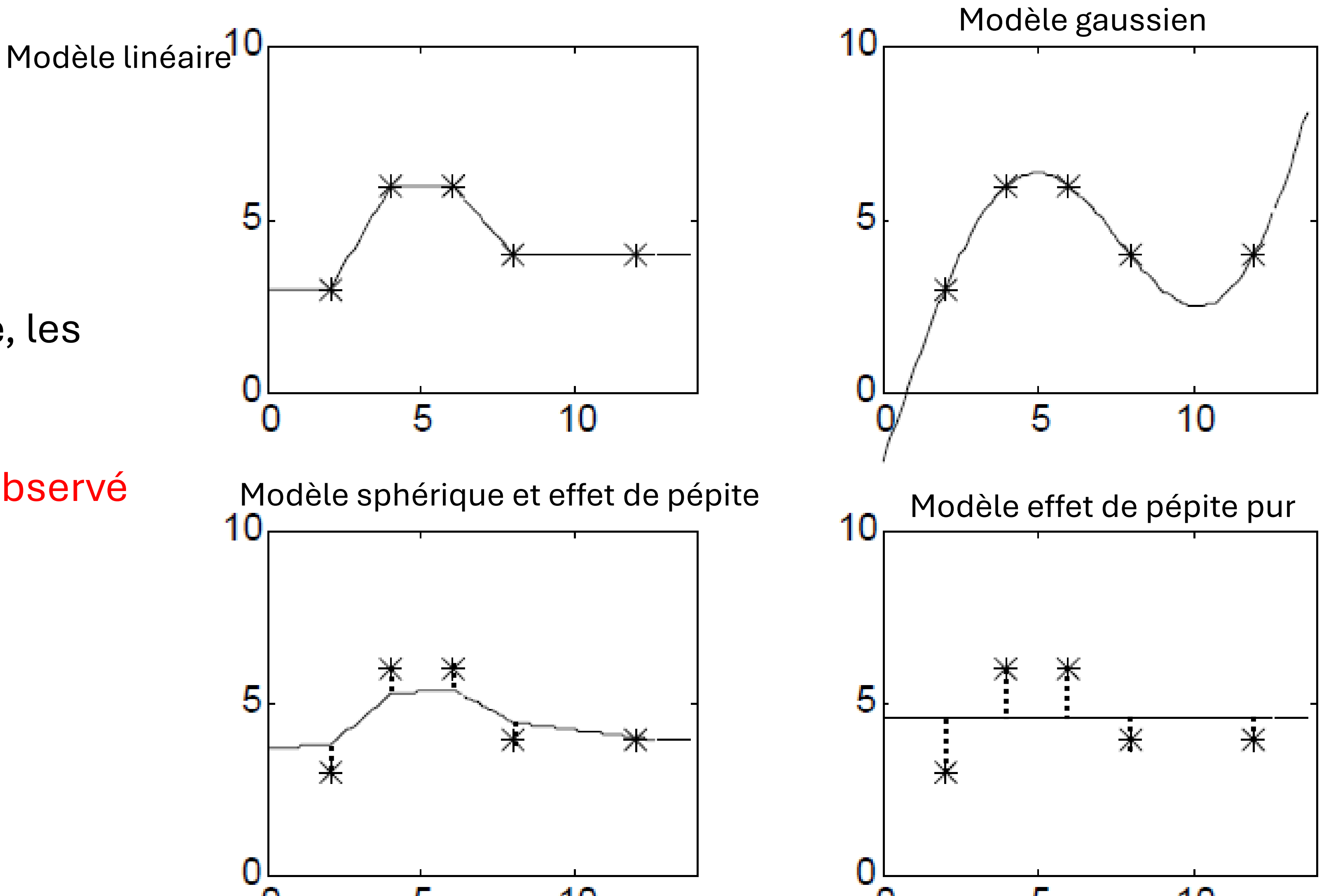
7. Autres informations (Aspects pratiques)

3. Interpolateur exact :

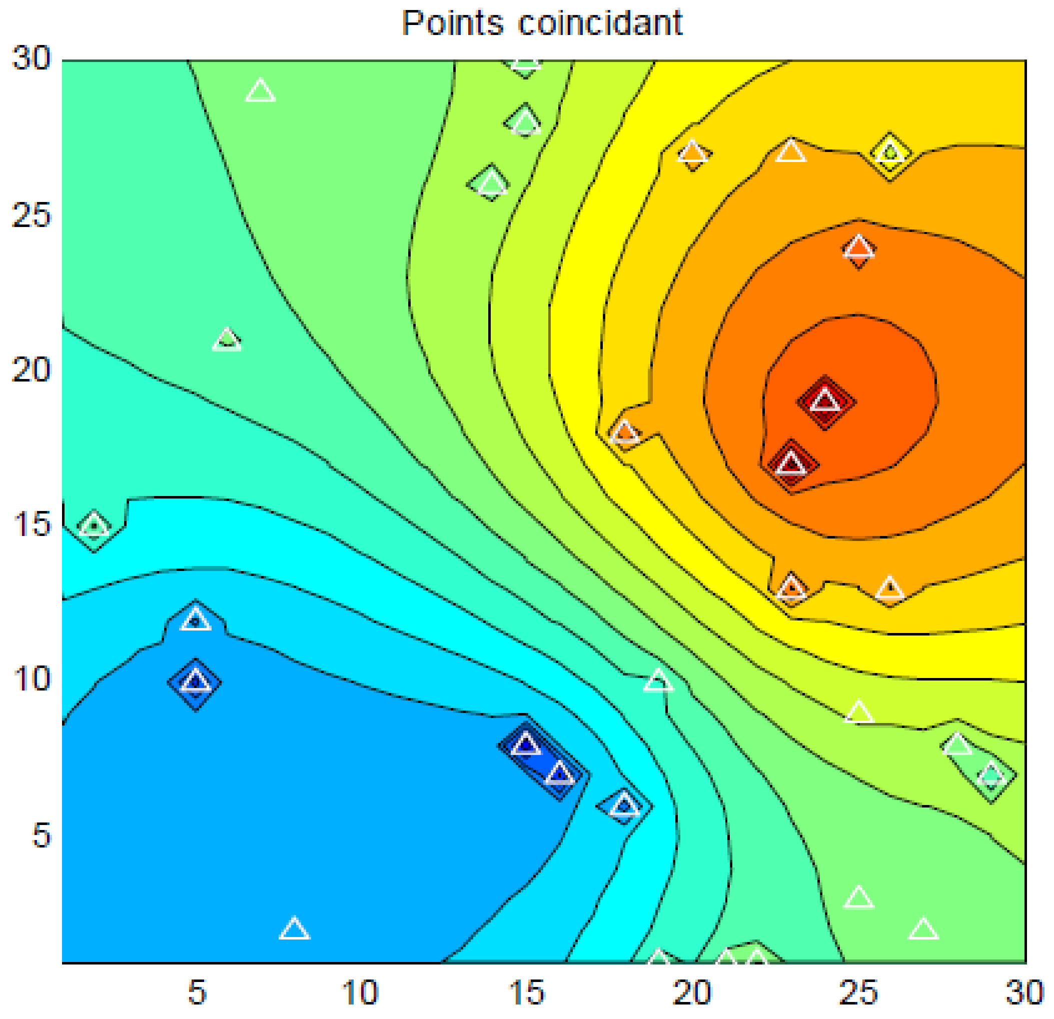
Estime les données observées avec exactitude

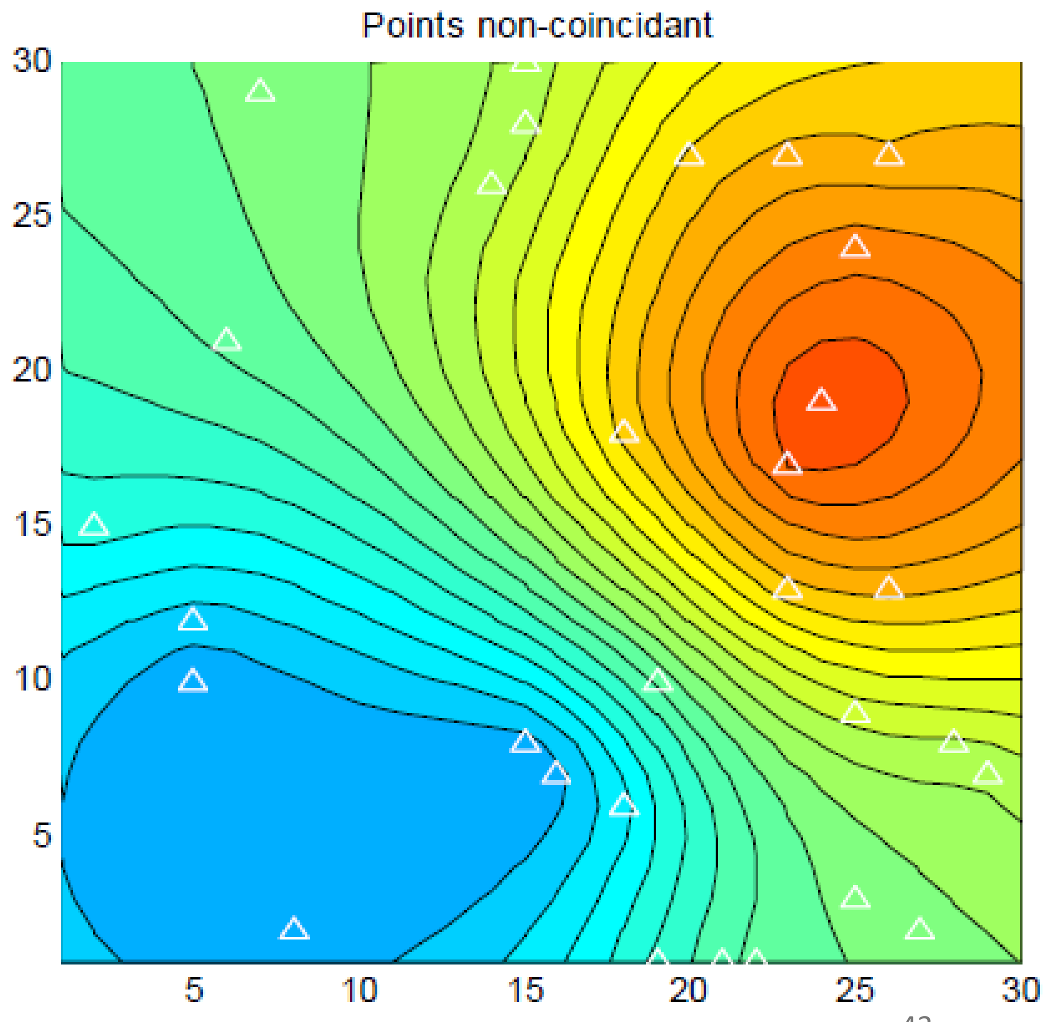
En présence d'effet de pépite, les valeurs interpolées sont discontinues

→ éviter d'estimer un point observé



3. Interpolateur exact :

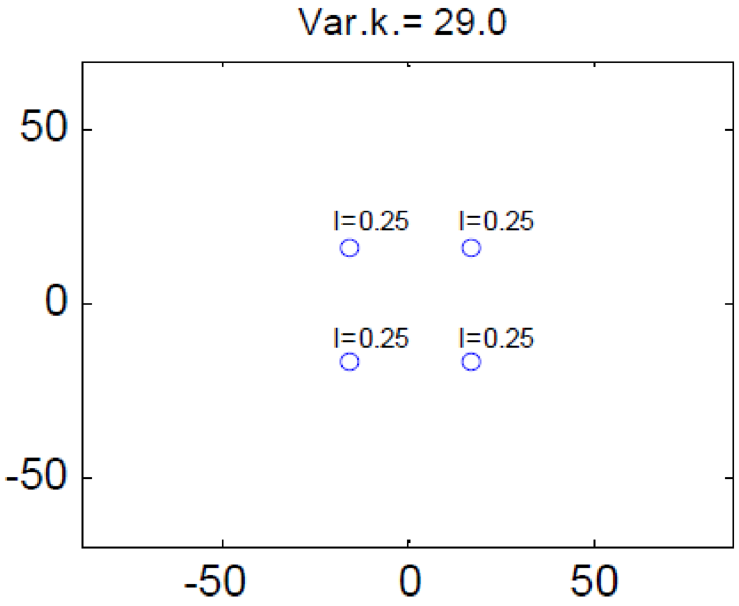


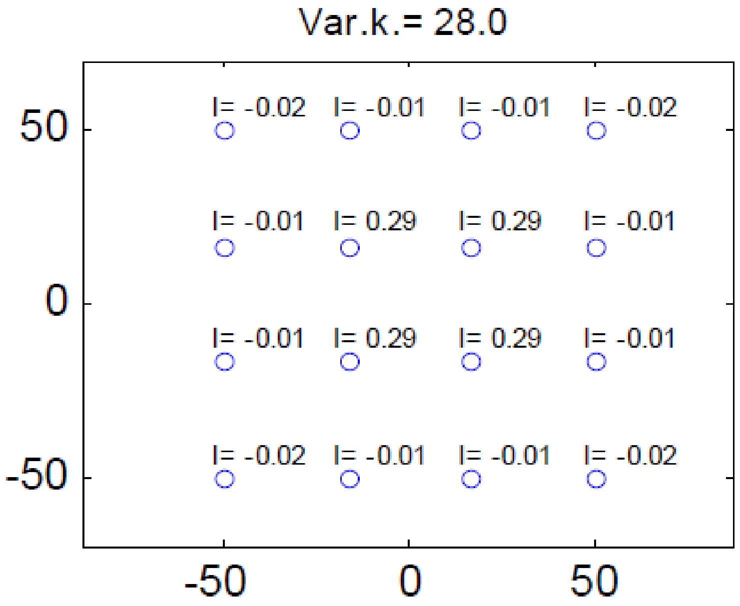


7. Autres informations (Aspects pratiques)

4. Effet d’écran :

- Les poids des points périphériques sont faibles.
- Les poids des points proches sont forts.

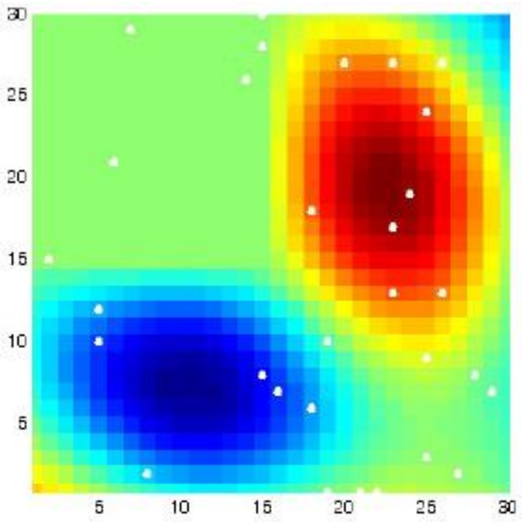


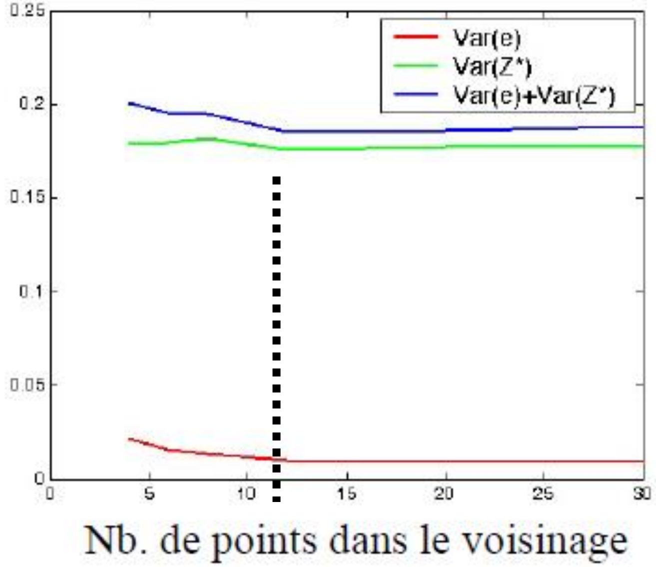


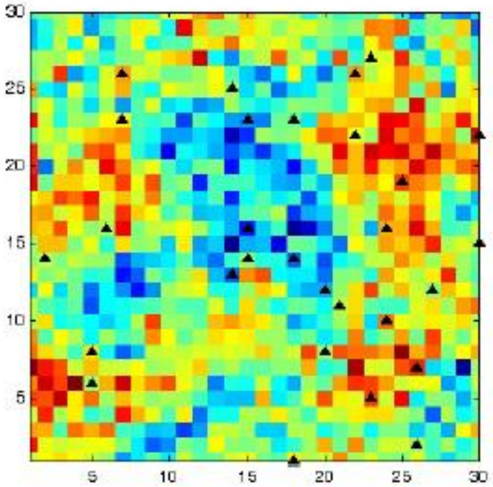
Limiter l’estimation d’un point par son voisinage

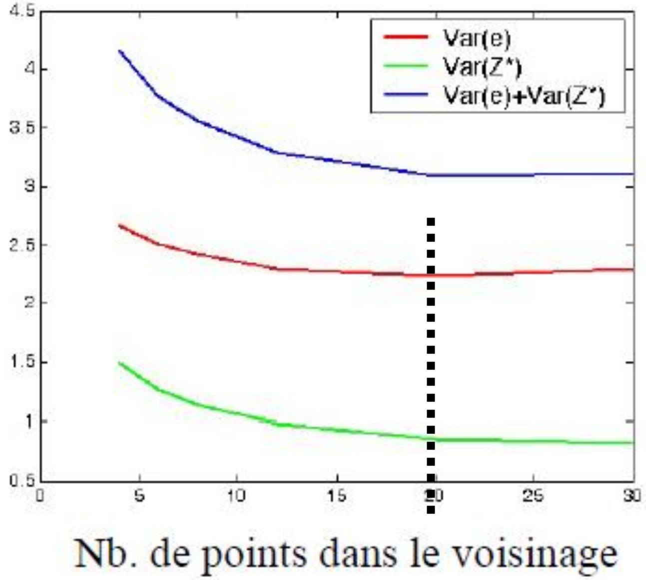
7. Autres informations (Aspects pratiques)

4. Effet d'écran :



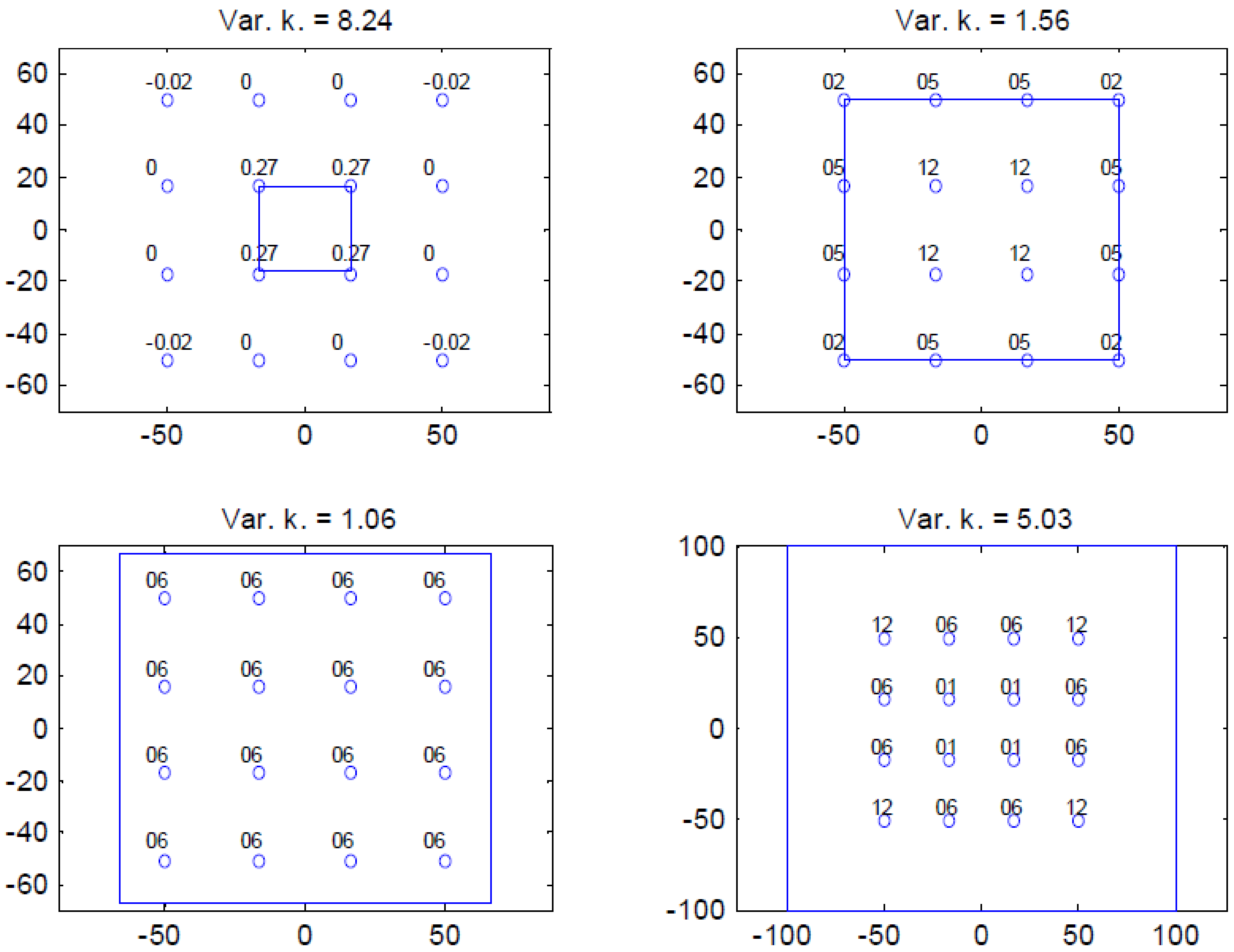






7. Autres informations (Aspects pratiques)

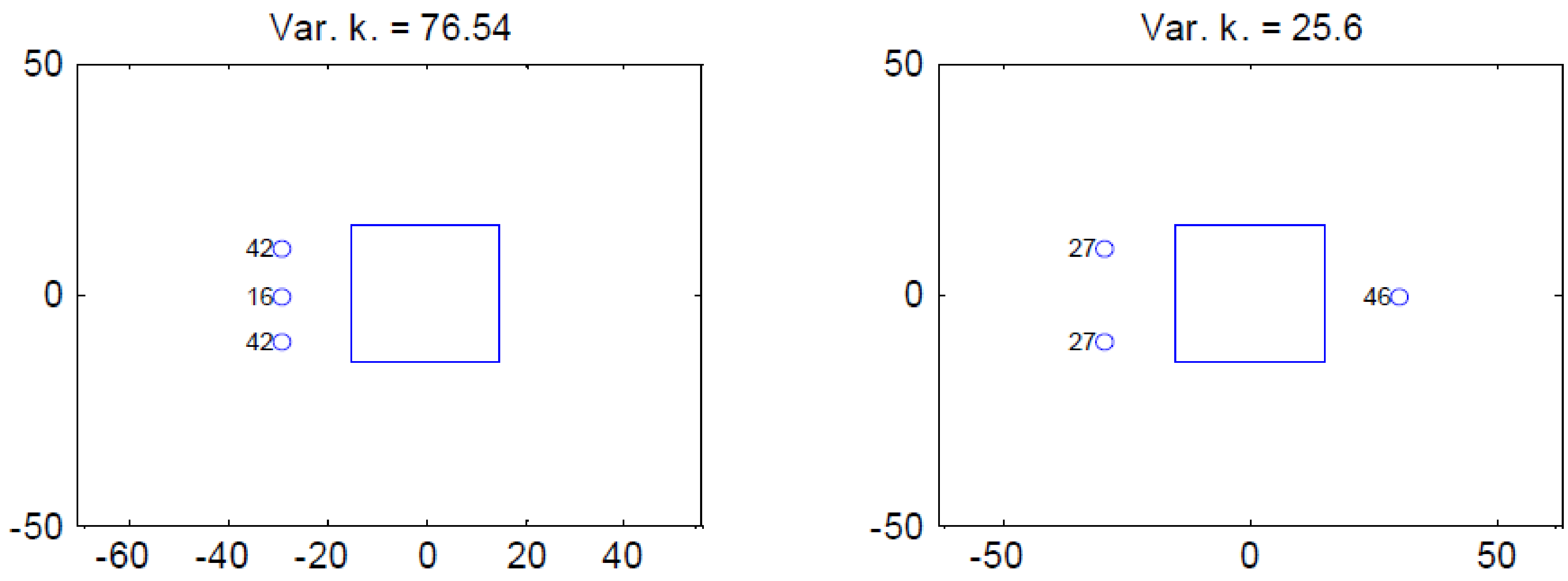
5. Tiens compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux :



7. Autres informations (Aspects pratiques)

5. Tiens compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux :

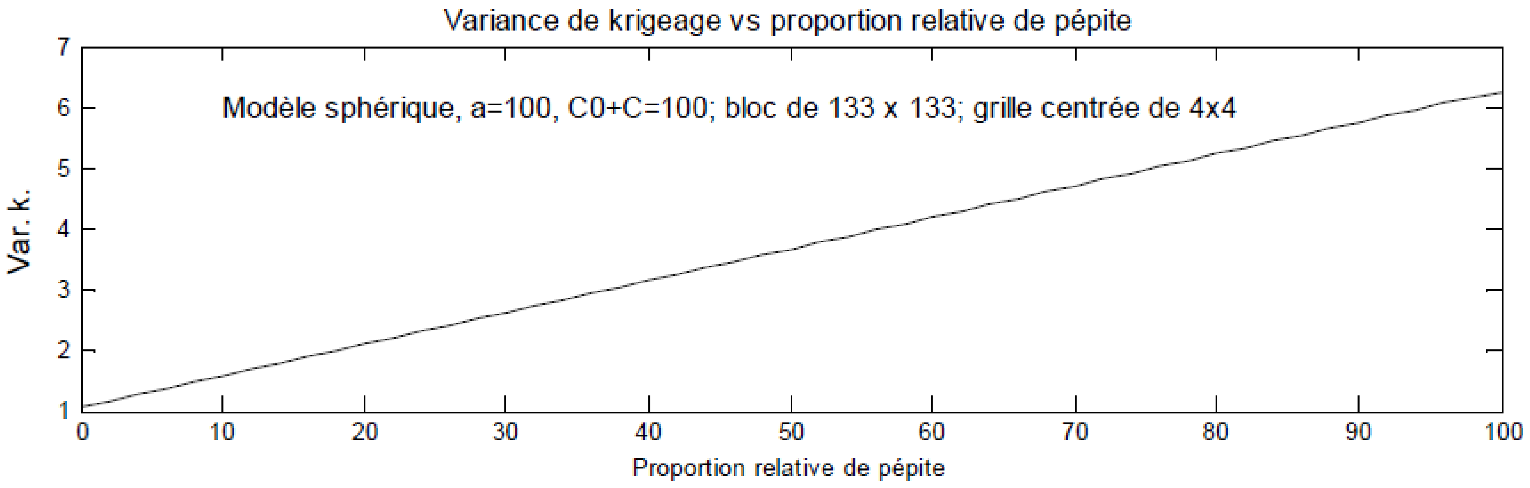
Redondance des données :



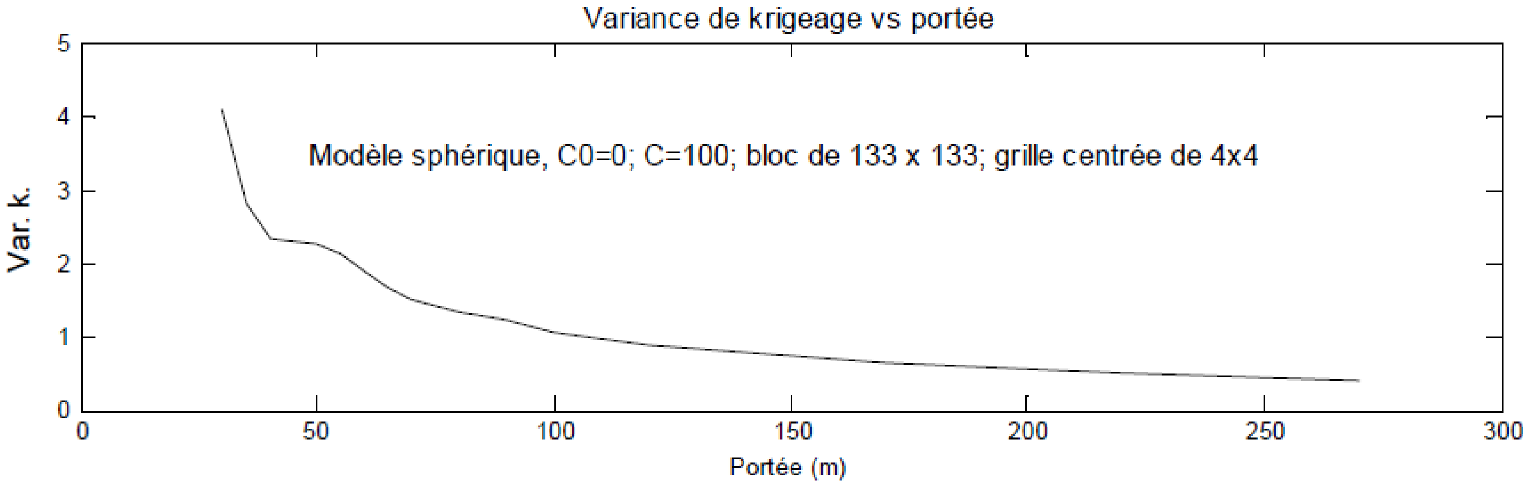
7. Autres informations (Aspects pratiques)

6. Tiens compte de la continuité spatiale du phénomène étudié :

Influence de l'effet de pépite



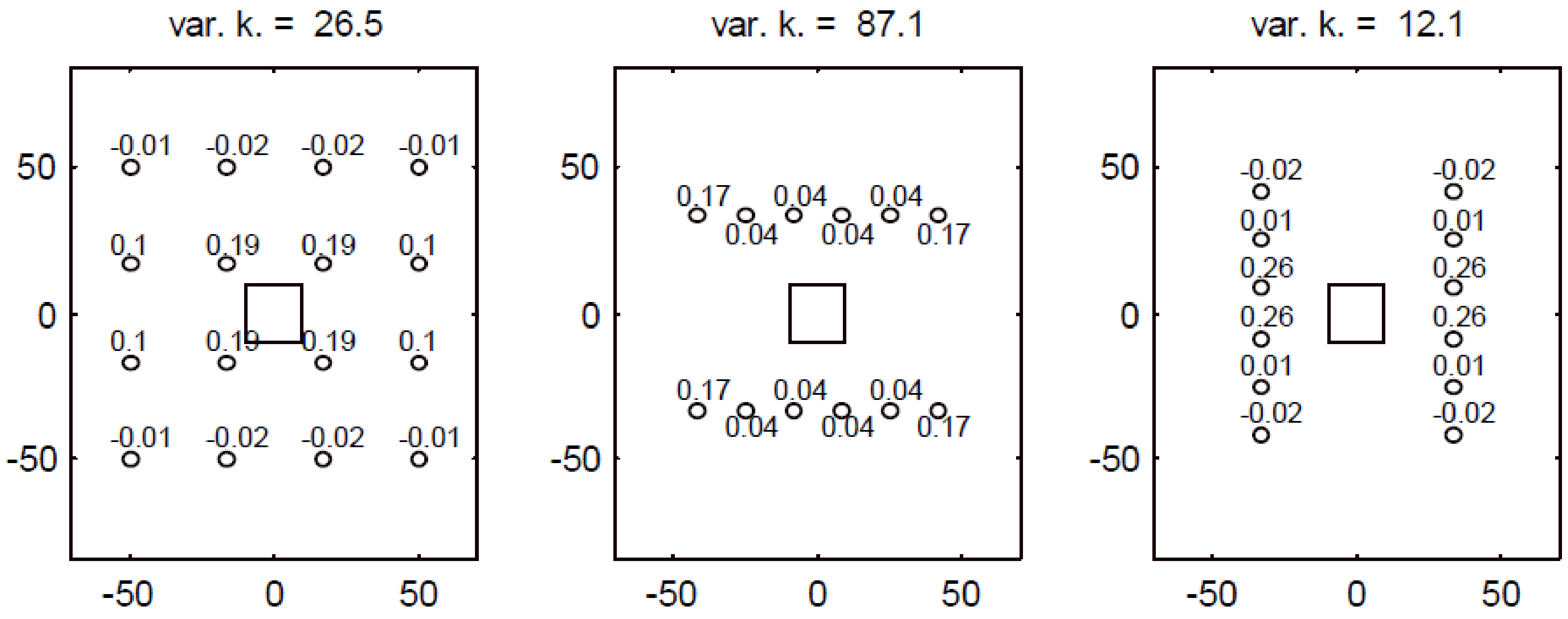
Influence de la portée



7. Autres informations (Aspects pratiques)

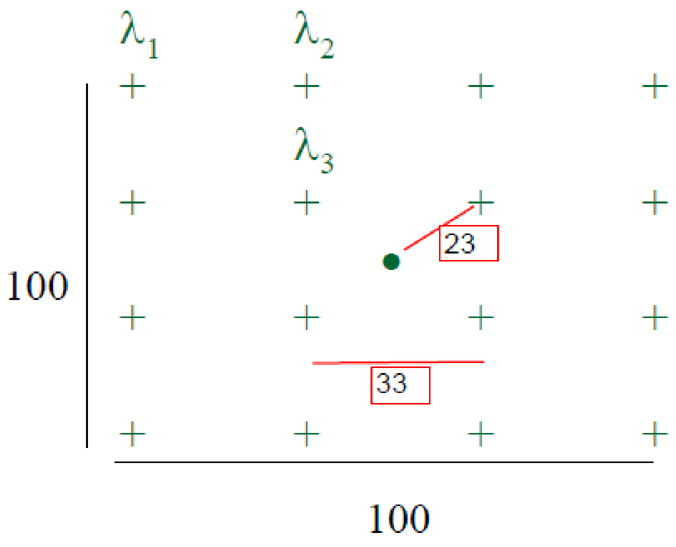
6. Tiens compte de la continuité spatiale du phénomène étudié :

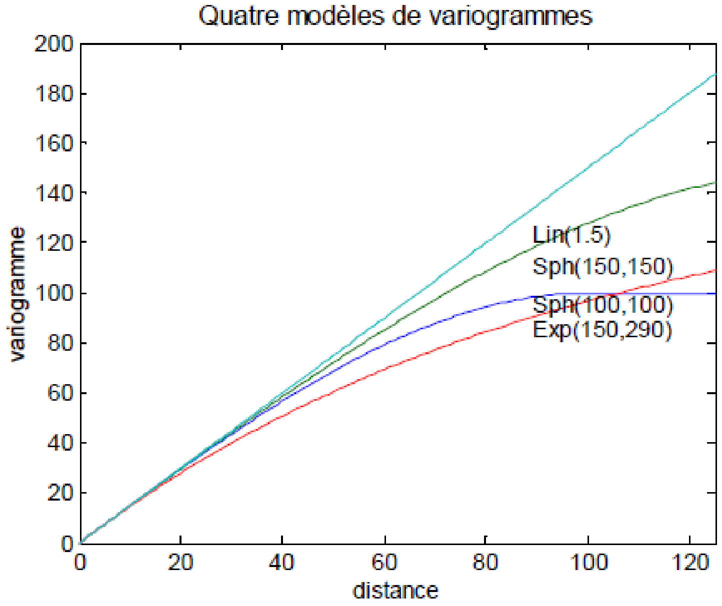
Influence de l'anisotropie :



6. Tiens compte de la continuité spatiale du phénomène étudié :

Influence du modèle :





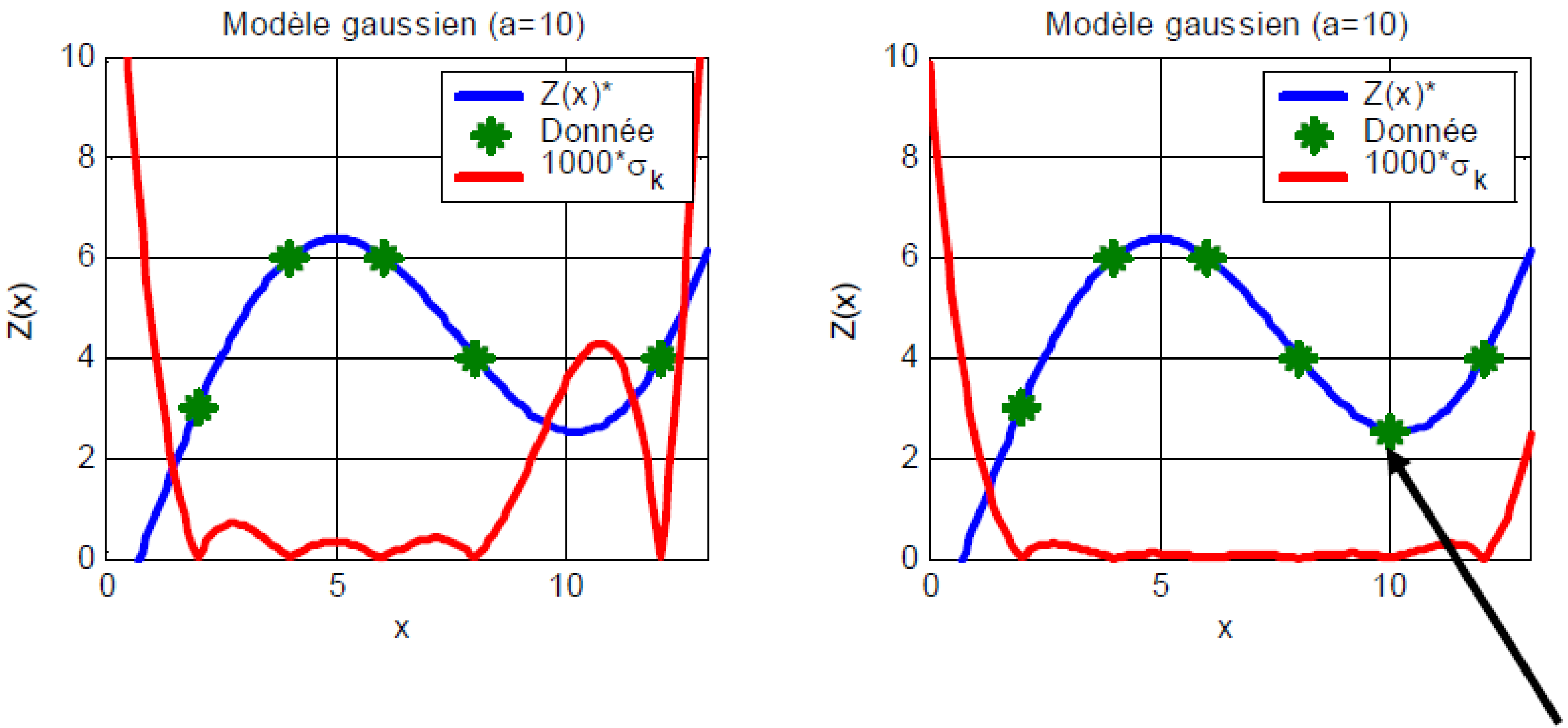
	λ_1	λ_2	λ_3	σ_k^2
Sphérique, C=100, a=100	-.02	-.01	.29	28.0
Sphérique, C=150, a=150	-.01	-.01	.29	27.8
Exp. C=150, a_{eff}=290	-.01	-.01	.28	28.2
Linéaire, pente=1.5	-.01	-.01	.28	27.6

4 ajustements équivalents h<30

=> mêmes poids λ

=> même σ_k^2

7. Transitif (cohérence des estimations) :



À droite, à x=10, on observe une donnée égale à la valeur krigée à gauche. Toutes les valeurs krigées demeurent inchangées. Seules les variances de krigeage sont réduites.

7. Autres informations (Aspects pratiques)

- <u>Krigeage ordinaire :</u> syst. d'éq. linéaire (n+1) équations et (n+1) inconnues
  → limite pratique sur « n »

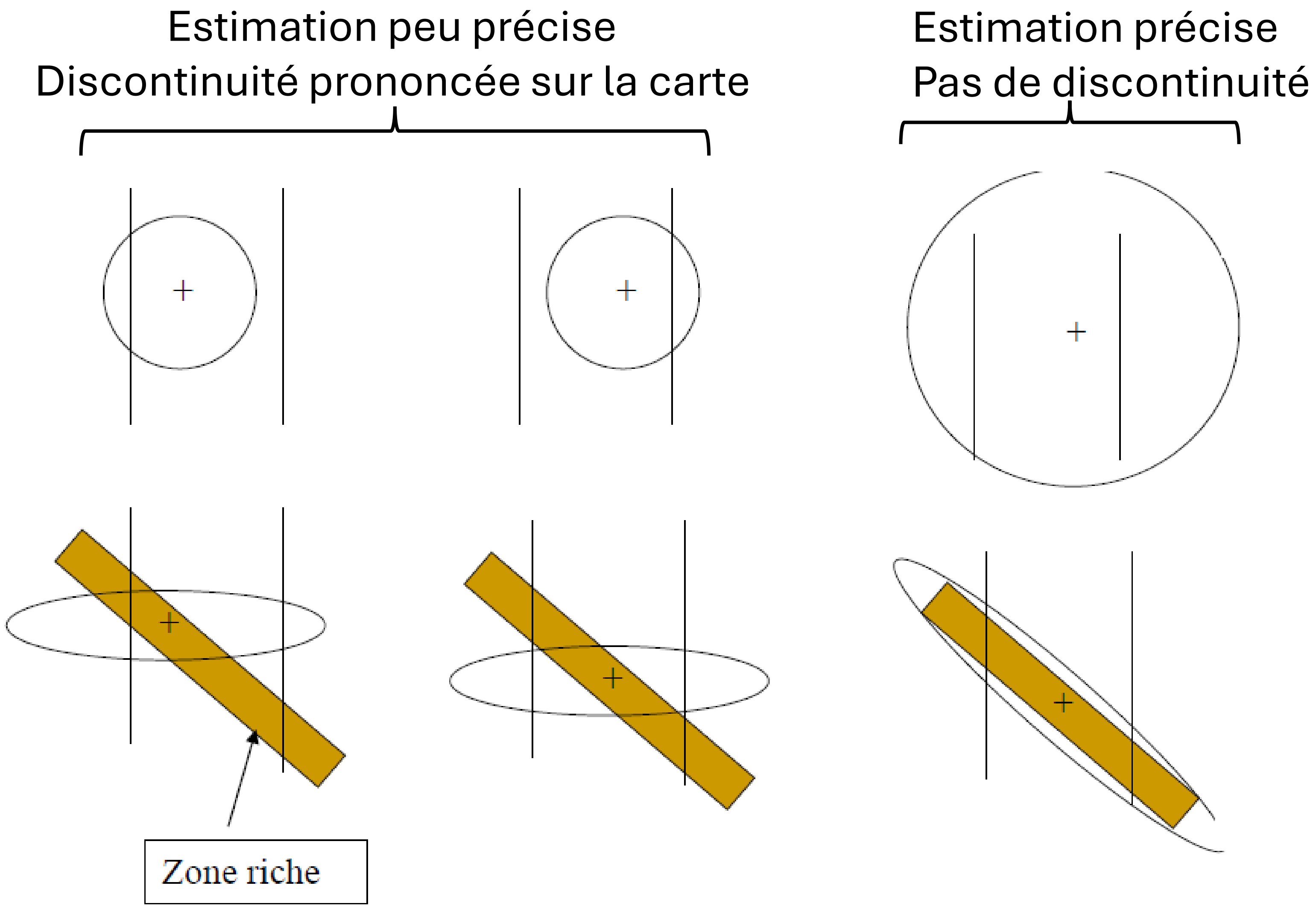
  « m » est estimée implicitement → voisinage glissant (ou local) permet de relaxer l'hypothèse de stationnarité (« m » peut fluctuer d'un voisinage à l'autre)

- <u>Grille de krigeage</u>: régulière ou non, points ou blocs.

- <u>Voisinage utilisé pour le krigeage</u>:
  - Habituellement en voisinages glissants.
  - Nombre de points suffisant (>10; peut atteindre jusqu'à 50-100).
    - Zone de recherche assez grande pour assurer un minimum de points.
    - Recherche par quadrants (2D) ou octants (3D) (min 2 ou 3 points par quadrant/octant)

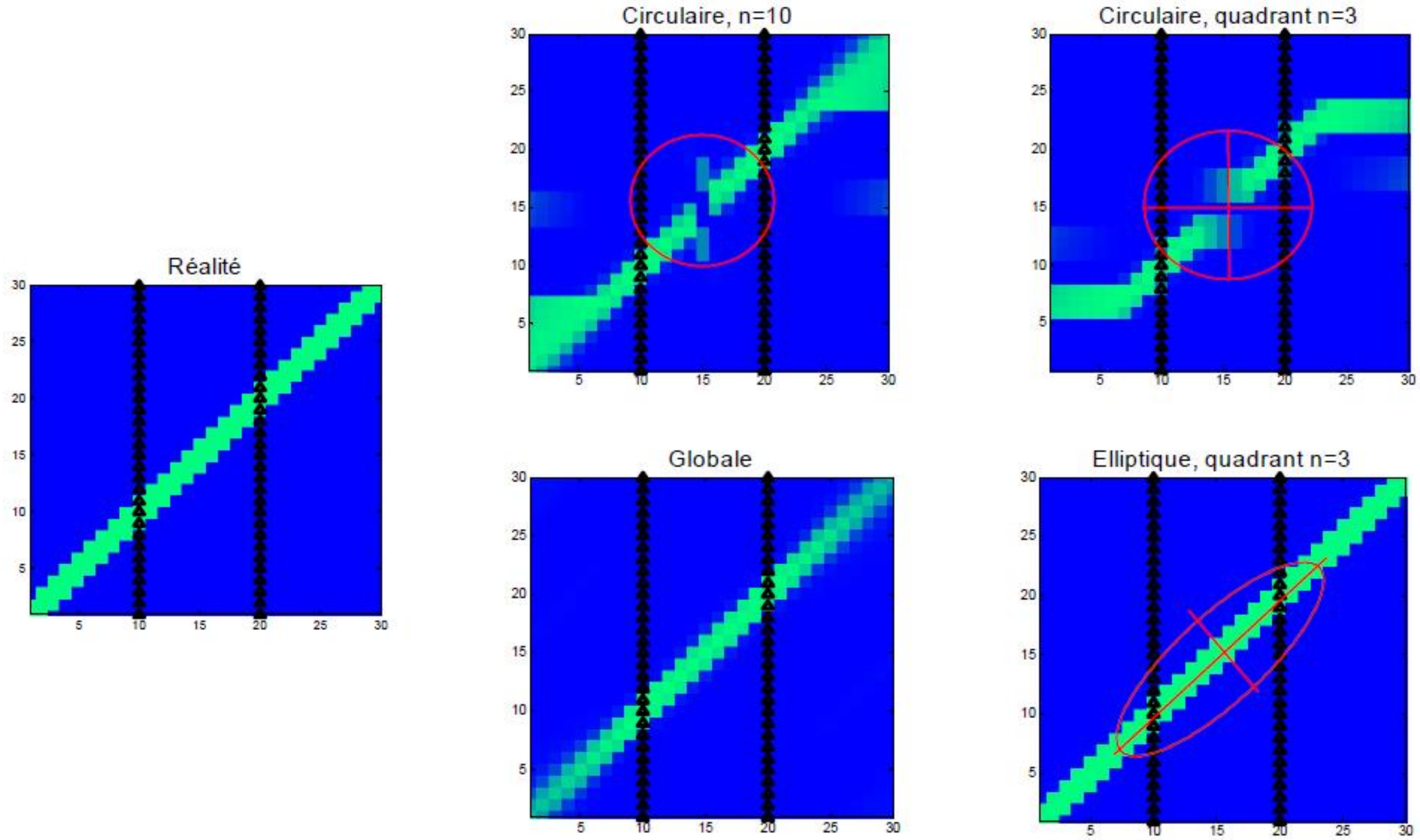
7. Autres informations (Aspects pratiques)

Importance du voisinage :



7. Autres informations (Aspects pratiques)

Importance du voisinage : Exemple



7. Autres informations (Validation croisée)

Objectifs :

Permets de valider un modèle de variogramme

Permets de valider le voisinage utilisé pour le krigeage

Technique du ‘*leave-one-out*’ :

Consiste à retirer une observation pour ensuite l’estimer par krigeage à partir des autres données observées. Cela est répété pour tous les points.

$$e_i = Z_v(x_i) - Z_v^*(x_i) \;\; ; \;\; n_i = \frac{e_i}{\sigma_{K,i}}$$

Statistique pour comparaison :

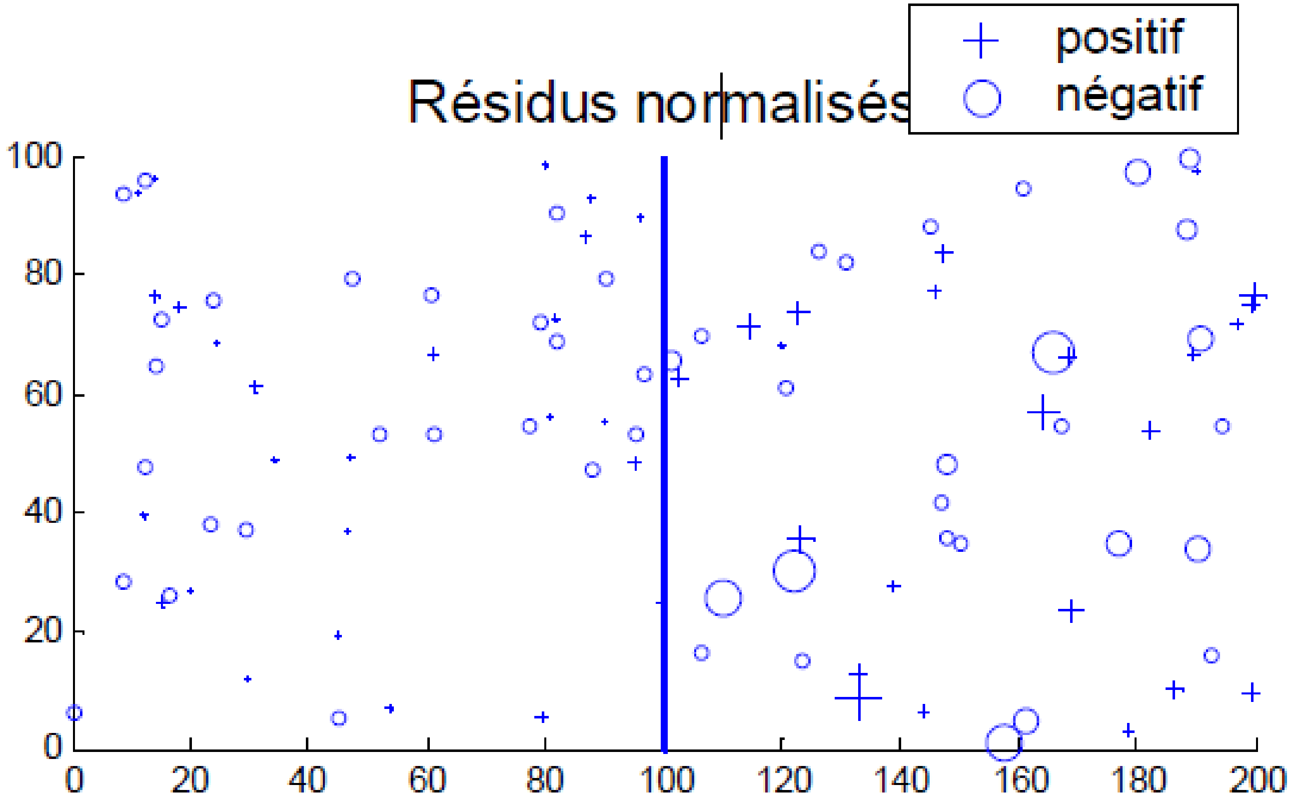
$$\sum_i e_i \approx 0 \;\; et \sum_i n_i \approx 0$$

$$\min\left(\sum_i |e_i|\right) ou \min\left(\sum_i e_i^2\right) \; ou \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i n_i^2} \approx 1$$

7. Autres informations (Validation croisée)

Comparaison visuelle :

- Histogramme des résidus et résidus normalisés
- Carte des résidus et résidus normalisés



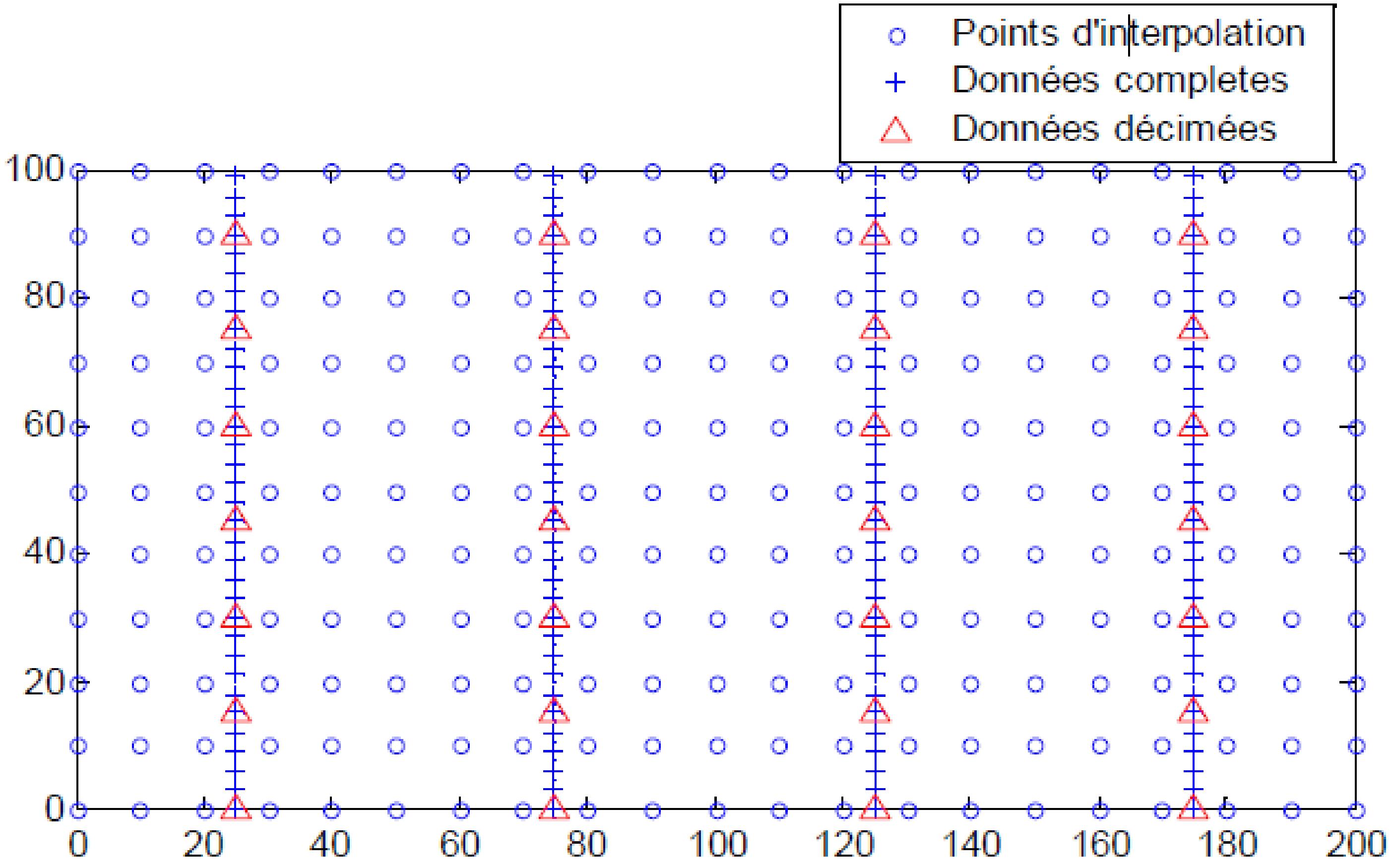
Diviser en deux zones distinctes ?

7. Autres informations (Validation croisée)

Reproduire des situations réalistes d'estimation :

- Grille complète des données → valider le variogramme à petite échelle
- Grille décimée → valider le variogramme à des distances plus grandes

Pourquoi ?

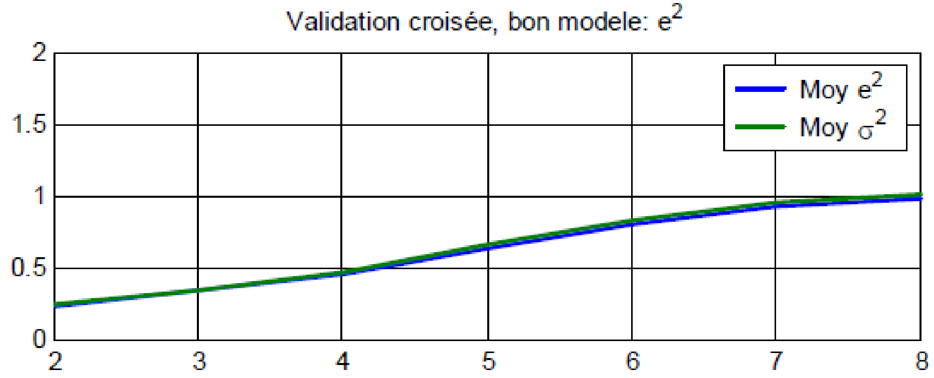


7. Autres informations (Validation croisée)

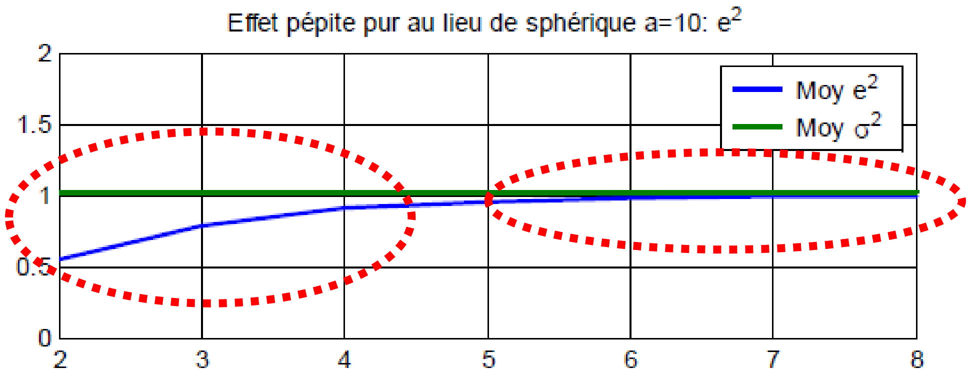
Exemple de validation croisée:

- Grille de dimension 40 x 40 (1 600 points)
- Modèle de variogramme : sphérique isotrope $(a = 10, C = 1, C_0 = 0)$
- Voisinage : 50 points

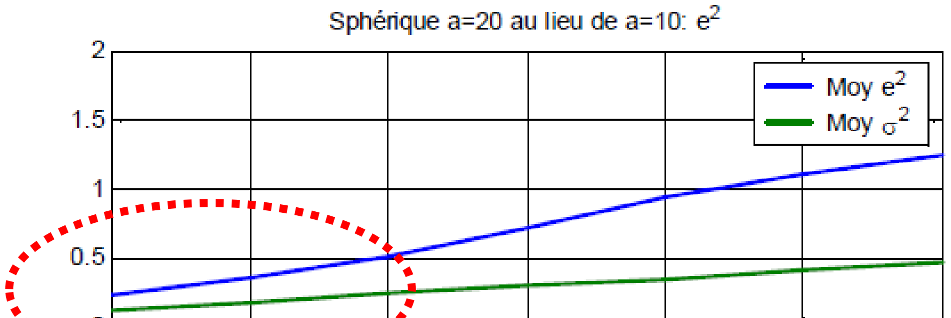
1) Modèle fourni : sphérique isotrope $(a = 10, C = 1, C_0 = 0)$



2) Modèle fourni : effet de pépite pur (C_0 =0)

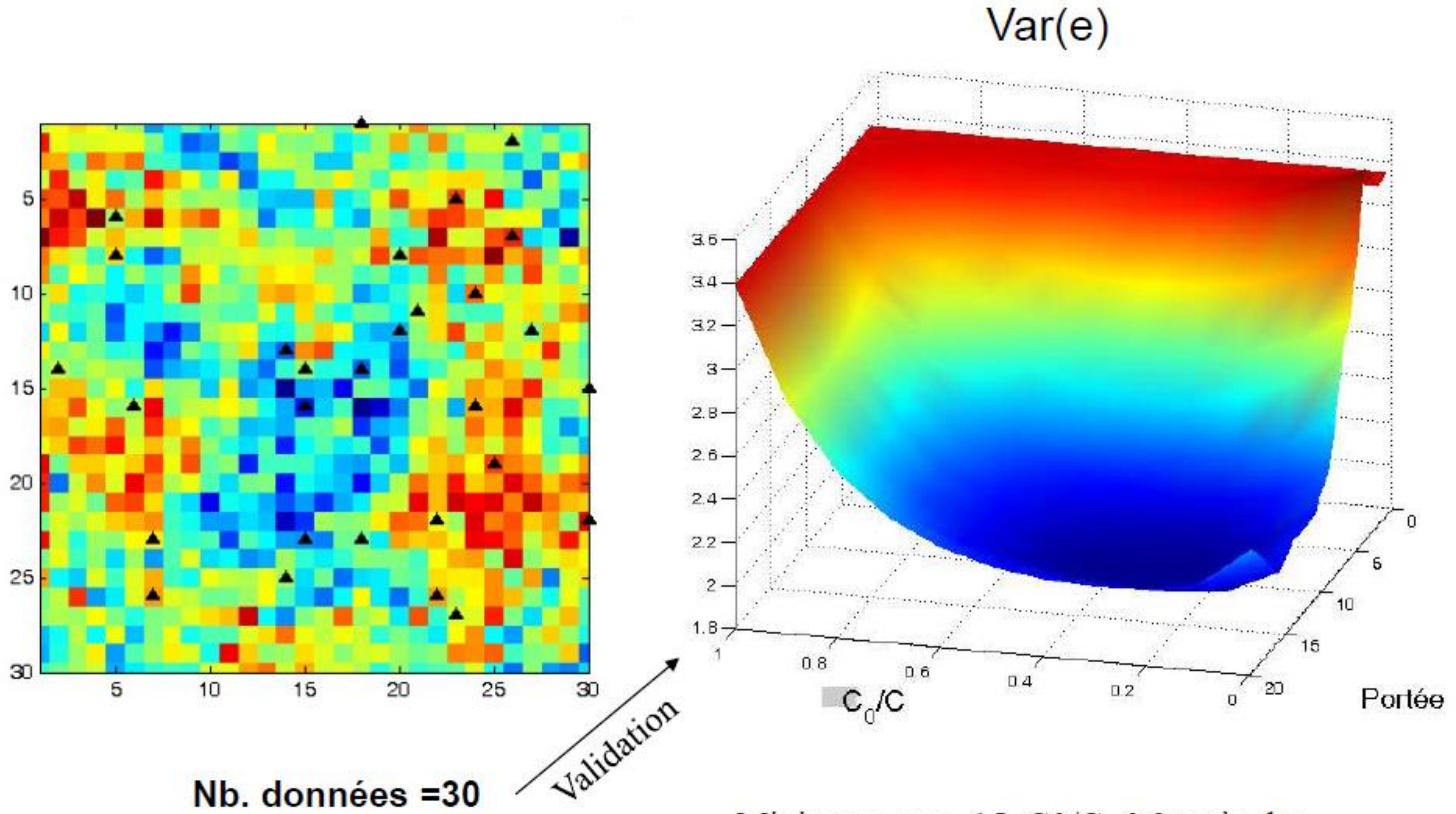


3) Modèle fourni : sphérique isotrope $(a = 20, C = 1, C_0 = 0)$



7. Autres informations (Validation croisée)

Exemple simulé de validation croisée:



Minimum en a=15, C0/C=0.3; près des valeurs utilisées pour la simulation (C0/C=0.33; a=10)