Intégrales doubles et itérées

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

17 septembre 2024

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit

- une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$.
- une subdivision $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ de $[a, b]$
- $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ (chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ de même longueur).
- un point $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour chaque sous-intervalle.

Rappel : intégrale de Riemann en une variable

Soit

- une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$.
- une subdivision $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ de $[a, b]$
- $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ (chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ de même longueur).
- un point $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour chaque sous-intervalle.

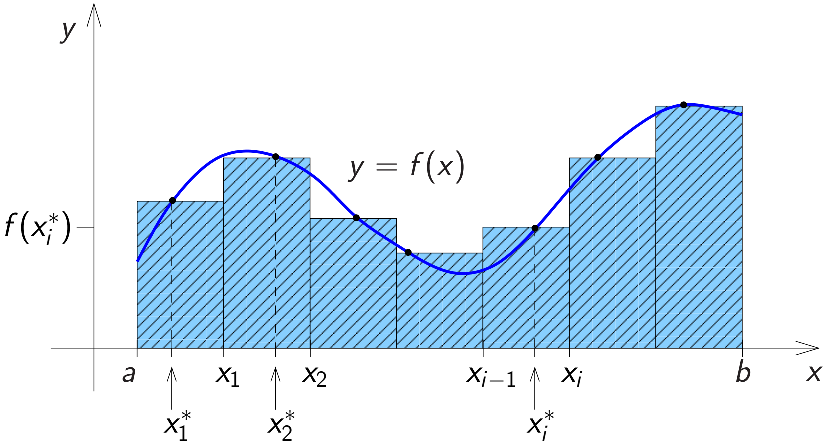
Définition

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

si cette limite existe (indépendamment des points x_{i^*}).
Dans ce cas on dit que f est intégrable sur $[a, b]$.

Rappel : intégrale de Riemann en une variable (2)



Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.

Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.
- Un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.
- Un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

- Des subdivisions d'égale longueur

  $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ de $[a, b]$
  $y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d$ de $[c, d]$.

Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.
- Un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

- Des subdivisions d'égale longueur

  $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ de $[a, b]$
  $y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d$ de $[c, d]$.

- $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ le sous-rectangle

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\}.$$

Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.
- Un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

- Des subdivisions d'égale longueur

  $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ de $[a, b]$
  $y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d$ de $[c, d]$.

- $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ le sous-rectangle

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\}.$$

- $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ l'aire de R_{ij}.

Intégrale double sur un rectangle

Soit

- Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables x et y.
- Un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

- Des subdivisions d'égale longueur

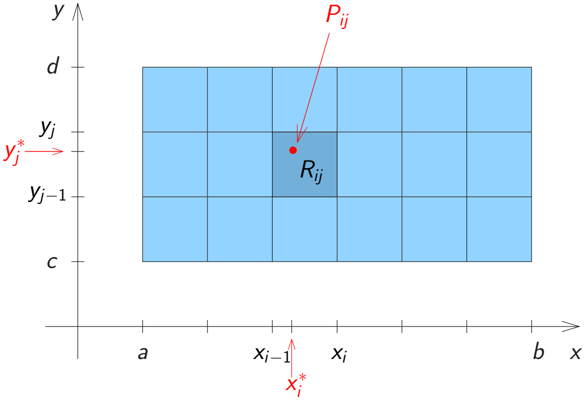
  $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ de $[a, b]$
  $y_0 = c, y_1, \ldots, y_m = d$ de $[c, d]$.

- $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ le sous-rectangle

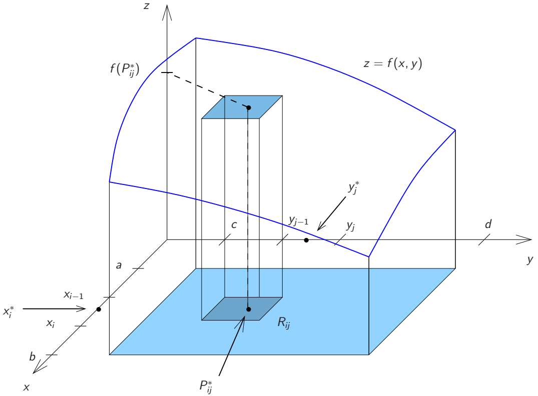
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\}.$$

- $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ l'aire de R_{ij}.
- Un point $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ pour chaque sous-rectangle.

Intégrale double sur un rectangle (2)



Intégrale double sur un rectangle (3)



Intégrale double sur un rectangle (4)

Définition : Théorème de Fubini

Soit f une fonction continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Exemple

Exemple 1

Estimons le volume délimité par :

- Le carré $R = [0,2] \times [0,2]$
- Le paraboloide elliptique $z = 16 - x^2 - 2y^2$

Exemple 2

Calculons l'intégrale

$$I = \iint_{[1,2]\times[0,\pi]} y\sin(xy)dA$$

Domaines de types I et II

Définition

1. Un **domaine de type I** est une région du plan définie par

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \;\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

où a et b sont des constantes et g_1, g_2 des fonctions continues.

Domaines de types I et II

Définition

1. Un **domaine de type I** est une région du plan définie par

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

   où a et b sont des constantes et g_1, g_2 des fonctions continues.

2. Un **domaine de type II** est une région du plan définie par

$$D = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ \ c \leq y \leq d\}$$

   où c et d sont des constantes et h_1, h_2 des fonctions continues.

Calcul d'une intégrale sur un domaine de type I ou II

Théorème

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur un domaine D de type I. Alors

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Calcul d'une intégrale sur un domaine de type I ou II

Théorème

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur un domaine D de type I. Alors

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

2. Soit f une fonction continue par morceaux sur un domaine D de type II. Alors

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemples

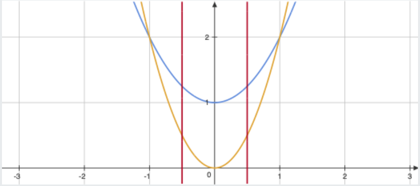
Exemple : Type I

Fonction : $f(x, y) = x + 2y$

Domaine D :

$$y = 1 + x^2$$

$$y = 2x^2$$



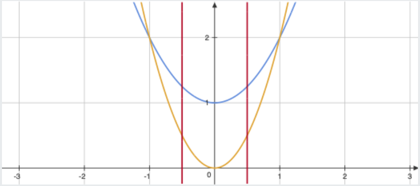
Exemples

Exemple : Type I

Fonction : $f(x, y) = x + 2y$

Domaine D :

$$y = 1 + x^2$$
$$y = 2x^2$$

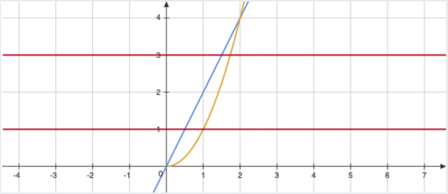


Exemple : Type II

Fonction : $f(x, y) = x^2 + y^2$

Domaine D :

$$x = \frac{y}{2}$$
$$x = \sqrt{y}$$



Propriétés des intégrales doubles

Théorème

Soit f et g des fonctions intégrables sur un domaine D et c une constante. Alors

1. $$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dA = \iint\limits_D f(x,y)\, dA \pm \iint\limits_D g(x,y)\, dA$$
2. $$\iint\limits_D cf(x,y)\, dA = c \iint\limits_D f(x,y)\, dA$$
3. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$ alors
$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_D g(x,y)\, dA.$$

Propriétés des intégrales doubles (2)

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur un domaine D.

1. Si $D = D_1 \cup D_2$ et l'intersection $D_1 \cap D_2$ est une courbe (ie. d'aire nulle) alors

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

Propriétés des intégrales doubles (2)

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur un domaine D.

1. Si $D = D_1 \cup D_2$ et l'intersection $D_1 \cap D_2$ est une courbe (ie. d'aire nulle) alors

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

2. $\displaystyle\iint\limits_{D} 1\,dA = \text{aire}(D).$

Propriétés des intégrales doubles (2)

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur un domaine D.

1. Si $D = D_1 \cup D_2$ et l'intersection $D_1 \cap D_2$ est une courbe (ie. d'aire nulle) alors

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

2. $\displaystyle\iint_D 1\,dA = \text{aire}(D).$

3. Si $m \leq f(x,y) \leq M$ pour tout $(x,y) \in D$, alors :

$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y)dA \leq MA(D)$$

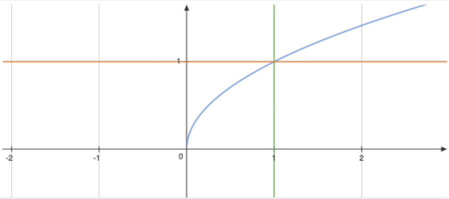
Exemples

Exemple : Type I et II

Fonction : $f(x, y) = xy$

Domaine D :

$$y = \sqrt{(x)}$$
$$x = 1$$

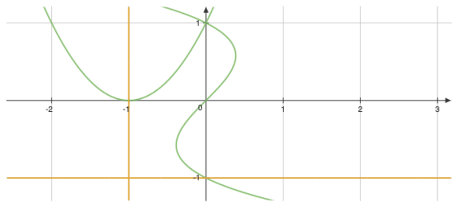


Exemple : Ex 6.2.54

Fonction : $f(x, y) = y$

Domaine D :

$$x = y - y^3$$
$$y = (x+1)^2$$
$$x, y \geq -1$$

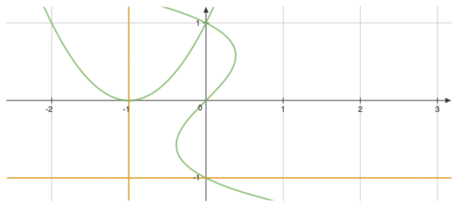


Exemple : Ex 6.2.54

Fonction : $f(x, y) = y$

Domaine D :

$$x = y - y^3$$
$$y = (x+1)^2$$
$$x, y \geq -1$$



Exemple : Ex 6.2.65

Fonction : $f(x, y) = xe^{y^2}$

Domaine D :

$$x = y^2 - 4$$
$$x = 4 - y^2$$
$$y \geq 0$$