

MTH1102 - Exercices de la semaine 4

1 Exercices de routine

Section 6.1 nos. 15, 19, 33.

Section 6.2 nos. 3, 13, 17.

2 Propriétés des intégrales

1. Évaluez les intégrales suivantes selon l'ordre d'intégration de votre choix.

(a) $J_1 = \iint_R xy e^{-xy^2} dA$ où $R = [1, 2] \times [0, 3]$.

(b) $J_2 = \int_0^2 \int_{2x}^4 \frac{y^4}{\sqrt{1+xy^2}} dy dx$

2. (a) Évaluez l'intégrale suivante :

$$J_3 = \iint_D [x^2 + xy \sin(x^2 + y^2)] dA,$$

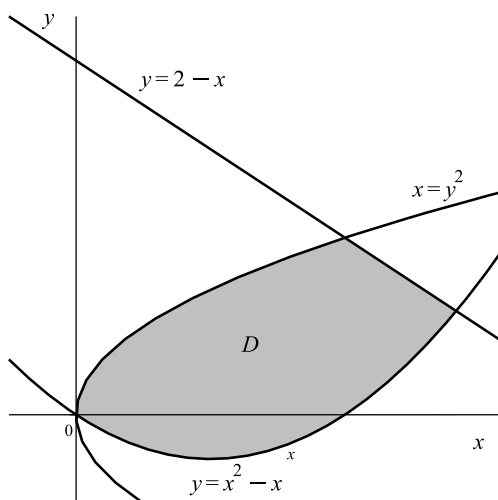
où D est le domaine borné par les courbes $y = x^2 - 2$ et $y = 4 - x^2$.

(b) Soit $D = [a, b] \times [-d, d]$.

i. Trouvez une fonction f telle que $\iint_D f(x, y) dA = 0$.

ii. Trouvez une fonction g telle que $\iint_D g(x, y) dA = 2 \int_a^b \int_0^d g(x, y) dA$

3. (a) Évaluez l'intégrale $\iint_D (x + y) dA$, où D est la région représentée ci-dessous.



(b) Réécrivez l'intégrale ci-dessous comme une seule intégrale, puis évaluez-la.

$$J_4 = \int_{-4}^{-1} \int_1^{\sqrt{x+5}} xy^3 dy dx + \int_{-1}^2 \int_1^{\sqrt{3-x}} xy^3 dy dx.$$

4. On considère la fonction $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$ et l'intégrale $J_5 = \iint_D f(x, y) dA$, où D est le triangle borné par les droites $y = x$, $x = 0$ et $y = 2$. À l'aide de la propriété 8 de la page 277, montrez que

$$\frac{4}{3} \sqrt[3]{2} \leq J_5 \leq \frac{8}{3} \sqrt[3]{2}$$

5. Pour chacun des énoncés ci-dessous, donnez un exemple concret ou expliquez pourquoi ce n'est pas possible. Vous devez justifier précisément toutes vos affirmations.

- (a) Une intégrale double sur un domaine D dans le premier quadrant dont la valeur est négative.
 (b) Une fonction non identiquement nulle de deux variables dont l'intégrale sur un domaine du plan est nulle.

3 Applications simples

6. Lesquelles des intégrales suivantes représentent un volume ?

(a) $J_6 = \iint_D (xy^2 + 1) dA$, où $D = \{(x, y) \mid -4 \leq x \leq 4, x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

(b) $J_7 = \iint_D \sin(x) \cos(y) dA$, où $D = [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$

(c) $J_8 = \iint_D dA$, où D est un domaine contenu dans le troisième quadrant du plan.

7. (a) Calculez le volume du solide E borné par les surfaces $y = x^2 - 2$, $y = 2 - x^2$, $z = x + 10$ et $z = 0$.
 (b) Calculez le volume du solide E borné par les surfaces $z = 1 - x^2$, $z = y$ et $y = x^2 - 3$.
8. La *valeur moyenne* d'une fonction f sur un domaine D est définie par

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{\text{aire}(D)} \iint_D f(x, y) dA.$$

Calculez la distance moyenne à l'axe des x des points de la région $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

4 Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 6.1 nos. 17, 23, 31.

Section 6.2 nos. 15, 33, 49.