Intégrales curvilignes et champ vectoriel

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

10 septembre 2024

Sommaire

Sections 9.2, 9.3

Intégrales curvilignes

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}'(t)||\, dt.$$

Notation

On écrit aussi $f(\vec{r}(t)) := f(x(t), y(t), z(t))$.

Intégrales curvilignes

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C est

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt.$$

Notation

On écrit aussi $f(\vec{r}(t)) := f(x(t),y(t),z(t))$.

Pour une courbe dans le plan et une fonction f de deux variables, la définition est analogue.

Intégrales curvilignes (2)

Théorème

L'intégrale curviligne satisfait aux propriétés habituelles des intégrales.

Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Construction

Travail d'une force variable

Le travail effectué par une force variable $f(x)$ pour déplacer une particule sur l'axe des x entre a et b est :

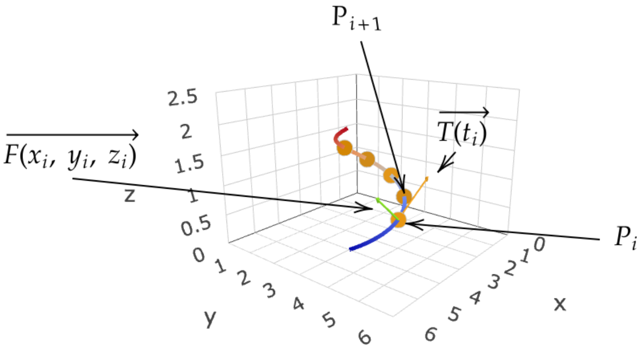
$$W = \int_a^b f(x)dx$$

Travail d'une force constante

Le travail effectué par une force constante $\vec{F}$ pour déplacer un objet d'un point P à un point Q est :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{PQ}$$

Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Construction (2)



Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Définitions

Définition

Soit C une courbe lisse et $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini dans un voisinage de C. L'intégrale de $\vec{F}$ le long de C est définie par

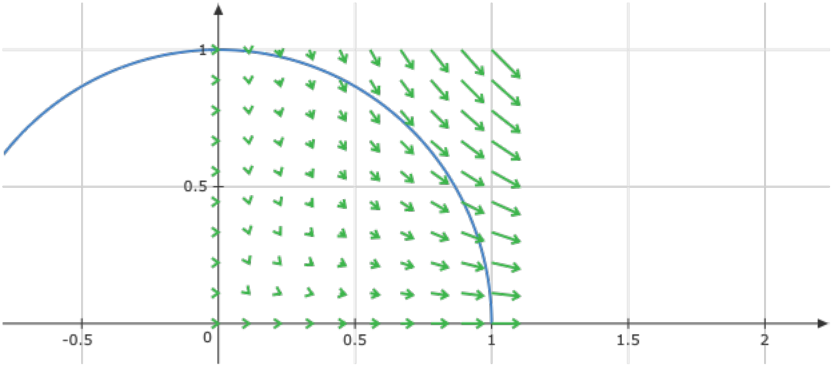
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire de C.

Notation

On note souvent

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



$$\vec{F}(x,y) = x^2\vec{\imath} - xy\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_1(t) = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{r}_2(t) = \sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Définitions (2)

NB

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Définition

Une courbe paramétrée par $\vec{r}$ avec $a \leq t \leq b$ est **fermée** si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Notation Si C est une courbe fermée alors on écrit $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Définitions (2)

NB

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Définition

Une courbe paramétrée par $\vec{r}$ avec $a \leq t \leq b$ est **fermée** si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Notation Si C est une courbe fermée alors on écrit $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Interprétation

- Si $\vec{F}$ est une force agissant le long d'une trajectoire C alors $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ est le **travail** effectué par $\vec{F}$ le long de C.

Intégrale d'un champ le long d'une courbe : Définitions (2)

NB

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Définition

Une courbe paramétrée par $\vec{r}$ avec $a \leq t \leq b$ est **fermée** si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Notation Si C est une courbe fermée alors on écrit $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Interprétation

- Si $\vec{F}$ est une force agissant le long d'une trajectoire C alors $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ est le **travail** effectué par $\vec{F}$ le long de C.
- Si $\vec{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement et si C est une trajectoire fermée alors $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ est la **circulation** de $\vec{F}$ autour de C.

Intégrale d'un champ le long d'une courbe (3)

Définition

On définit

1. $$\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt$$
2. $$\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt$$
3. $$\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

Intégrale d'un champ le long d'une courbe (3)

Définition

On définit

1. $$\int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt$$
2. $$\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt$$
3. $$\int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

Théorème

Si $\vec{F} = P\vec{\mathrm{i}} + Q\vec{\mathrm{j}} + R\vec{\mathrm{k}}$ alors

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz.$$

Exemple

9.2.20

Calculez le travail de la force $\vec{F}$ le long de la courbe $\vec{r}$.

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2)\vec{\mathrm{i}} + xz\vec{\mathrm{j}} + (y+z)\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{\mathrm{i}} + t^3\vec{\mathrm{j}} - 2t\vec{\mathrm{k}}, 0 \leq t \leq 2$$

Section 9.3

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Théorème

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Théorème

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Théorème

Soit C une courbe lisse paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $t \in [a, b]$ et f une fonction dont le gradient est continu. Alors

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Théorème fondamental des intégrales curvilignes (2)

Conséquence du théorème :

1. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif et si C est une courbe fermée alors $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0.$

Théorème fondamental des intégrales curvilignes (2)

Conséquence du théorème :

1. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif et si C est une courbe fermée alors $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$.
2. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif et si C_1 et C_2 sont des courbes ayant les mêmes extrémités alors
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$
3. Si $\vec{F}$ est un champ conservatif alors l'intégrale de $\vec{F}$ est indépendante du chemin.

TFIC (3)

Théorème

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D si et seulement si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pour tout chemin fermé C de D.

TFIC (3)

Théorème

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin dans D si et seulement si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pour tout chemin fermé C de D.

Domaines simplement connexes

Définition

Un domaine D du plan est

- **ouvert** s'il ne contient aucun point de sa frontière.

Domaines simplement connexes

Définition

Un domaine D du plan est

- **ouvert** s'il ne contient aucun point de sa frontière.
- **connexe** si toute paire de points dans D peut être reliée par un chemin entièrement contenu dans D (le domaine est « d'un seul morceau »).

Domaines simplement connexes

Définition

Un domaine D du plan est

- **ouvert** s'il ne contient aucun point de sa frontière.
- **connexe** si toute paire de points dans D peut être reliée par un chemin entièrement contenu dans D (le domaine est « d'un seul morceau »).
- **simplement connexe** s'il est connexe et si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D (le domaine « n'a pas de trous »).

Domaines simplement connexes

Définition

Un domaine D du plan est

- **ouvert** s'il ne contient aucun point de sa frontière.
- **connexe** si toute paire de points dans D peut être reliée par un chemin entièrement contenu dans D (le domaine est « d'un seul morceau »).
- **simplement connexe** s'il est connexe et si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D (le domaine « n'a pas de trous »).

Définition

Une **courbe simple** C de D est une courbe telle que :

$$\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2), \ \forall a < t_i < b, i = 1, 2$$

Considerons un champ vectoriel que l'on sait conservatif $\vec{F}(x, y) = f_x\vec{\mathrm{i}} + f_y\vec{\mathrm{j}}$. Voici la procédure à suivre pour déterminer sa fonction potentielle f :

$f_x \xrightarrow{\text{Integrer en } x}$ [redacted] $\xrightarrow{\text{Deriver en } y} \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$

Exemples

Trouvons la fonction potentielle des champs vectoriels suivant :

$$\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\vec{\mathrm{i}} + (x^2 - 3y^2)\vec{\mathrm{j}}$$
$$\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{\mathrm{i}} + (2xy + e^{3z})\vec{\mathrm{j}} + (3ye^{3z})\vec{\mathrm{k}}$$

Critère pour les champs conservatifs

Théorème

Soit $\vec{F} = P\vec{\text{i}} + Q\vec{\text{j}}$ un champ vectoriel tel que P, Q possèdent des dérivées partielles premières continues sur un *domaine simplement connexe* D.

Alors il existe une fonction f définie sur D et telle que $\vec{F} = \nabla f$ (ie, $\vec{F}$ est un champ conservatif) si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

partout sur D.

Exemples

Exemples

Les champs vectoriels

$$\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{\mathrm{i}} + (x^2 - 3y^2)\vec{\mathrm{j}}$$
$$\vec{F}(x,y) = (ye^x + \sin(y)\vec{\mathrm{i}} + (e^x + x\cos(y)\vec{\mathrm{j}}$$

sont-ils conservatifs ? Si oui, quelle est leur fonction potentielle f ?