Intégrales curvilignes et champ vectoriel

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

3 septembre 2024

Sommaire

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\,\vec{r}\,'(u)\,||\,du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\, \vec{r}\,'(u)\, ||\, du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Notation

On écrit souvent $ds = ||\, \vec{r}\,'(t)\, ||\, dt$ et $L = \int_C ds$.

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par
$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\, \vec{r}\,'(u)\, ||\, du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Notation

On écrit souvent $ds = ||\, \vec{r}\,'(t)\, ||\, dt$ et $L = \displaystyle\int_C ds$.

ds est un « petit élément de longueur ».

Courbure

Définition

La **courbure** d'une courbe en un point peut s'exprimer comme

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}\,'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Théorème

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Remarque : Ces formules dépendent de la paramétrisation choisie. En utilisant le paramètre s (l'abcisse curviligne), on peut exprimer la courbure indépendamment. (*cf*. Chapitre 8.3 du livre)

Vecteur tangent et vecteur normal (Rappel)

Définition

Le **vecteur tangent unitaire** de la courbe C paramétrée par $\vec{r}(t)$ est

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\,\vec{r}\,'(t)\,||}$$

si $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

Définition

Une courbe paramétrée $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$ est

- **lisse** si les fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ possèdent une dérivée continue et si $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ sur $[a, b]$.
- **lisse par morceaux (LPM)** si elle est composée d'un nombre fini de morceaux lisses.

Sommaire

Section 9.2

Intégrale curviligne : présentation

Intégrale curviligne : présentation

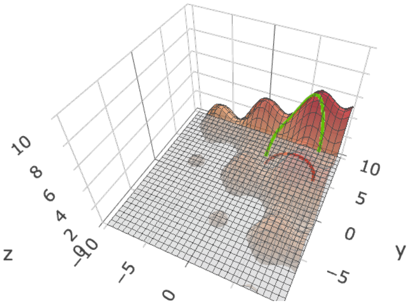


Figure – Visualisation de l'intégrale curviligne

$$\vec{r}(t) = 3\cos(t) + 5\vec{i} + 3\sin(t) + 5\vec{j}$$

$$f(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \cos(x) + \sin(y)$$

L'intégrale curviligne revient à calculer l'aire de la surface entre la courbe paramétrée rouge et sa projection sur la surface $f(x, y)$, la courbe verte.

Intégrales curvilignes (par rapport à l'abcisse curviligne)

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C est

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt.$$

Notation

On écrit aussi $f(\vec{r}(t)) := f(x(t),y(t),z(t))$.

Intégrales curvilignes (par rapport à l'abcisse curviligne)

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C est

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ||\vec{r}\,'(t)||\, dt.$$

Notation

On écrit aussi $f(\vec{r}(t)) := f(x(t), y(t), z(t))$.

Pour une courbe dans le plan et une fonction f de deux variables, la définition est analogue.

Intégrales curvilignes (le long des axes)

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C par rapport aux axes sont

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

Intégrales curvilignes (le long des axes)

Définition

Soit C une courbe lisse par morceaux dans l'espace paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ avec $a \leq t \leq b$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'**intégrale curviligne** de f le long de C par rapport aux axes sont

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

Pour une courbe dans le plan et une fonction f de deux variables, la définition est analogue.

Intégrales curvilignes (2)

Théorème

L'intégrale curviligne satisfait aux propriétés habituelles des intégrales.

Exemples

Exemple 1 : dans le plan

Calculons $\int_C 2x\, ds$ oú C est la courbe définie par l'arc C_1 de la parabole $y = x^2$ entre $(0,0)$ et $(1,1)$, et C_2, le segment de droite entre $(1,1)$ et $(1,2)$.

Exemple 2 : dans l'espace

Calculons $\int_C y \sin(z)\, ds$ oú C est définie par les équations :

$$\begin{aligned} x(t) &= cos(t) \\ y(t) &= sin(t) \\ z(t) &= t, \\ &0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

.

Sommaire

Section 9.1

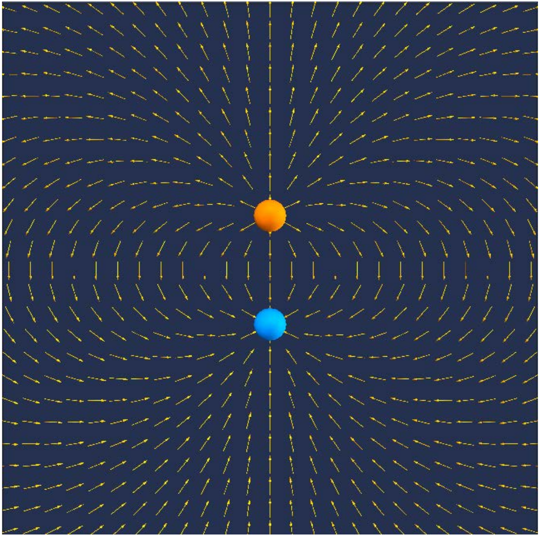
Champs vectoriels

Définition

Un **champ vectoriel** (ou **champ de vecteurs**) dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $\vec{F}(x)$.

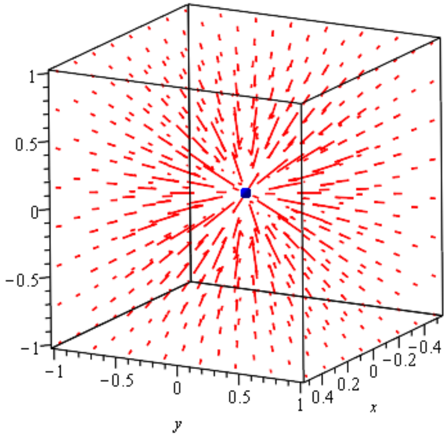
Remarque Jusqu'à présent, les fonctions vectorielles étaient de la forme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ À présent on a $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Champ électrique autour d'un dipôle



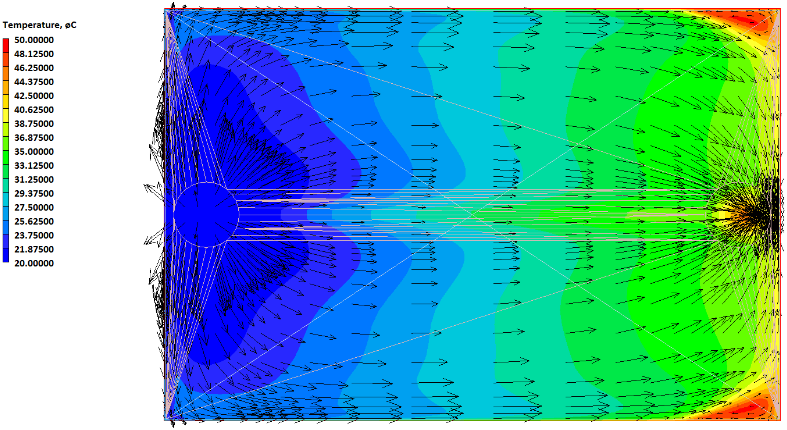
Exemples d'applications (2)

Champ gravitationnel près d'une planète

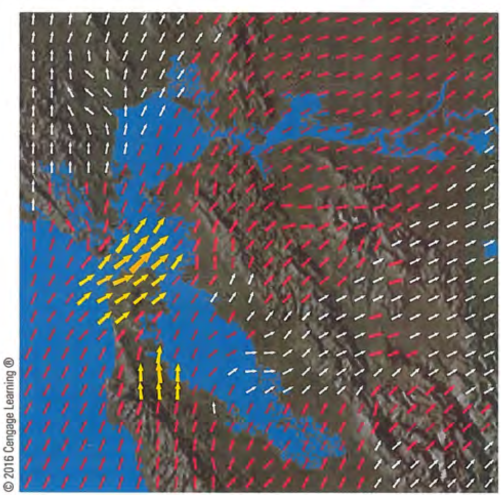


Exemples d'applications (3)

Échange de chaleur dans un panneau solaire

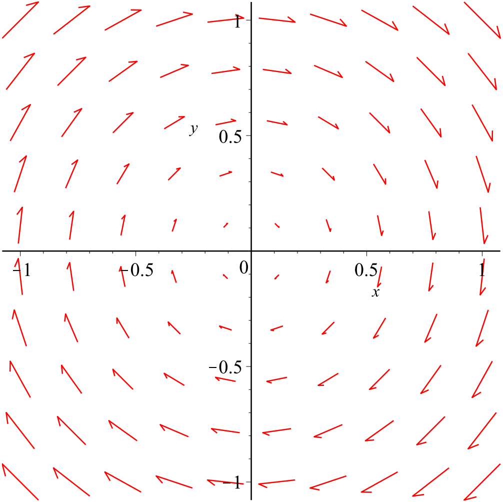


Vitesse du vent sur une région géographique

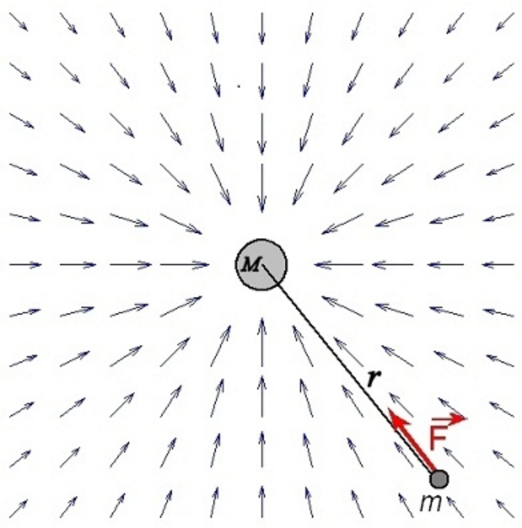


Exemple

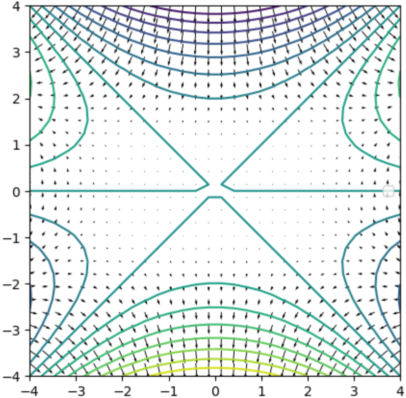
Le champ vectoriel $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$



Exemple (2) : champ gravitationel



Champs vectoriels conservatifs



$$f(x,y) = x^2y - y^3$$
$$\nabla f(x,y) = 2xy\vec{\mathrm{i}} + (x^2 - 3y^2)\vec{\mathrm{j}}$$

Le gradient de la fonction scalaire f est un champ vectoriel.

Définition

Un champ vectoriel $\vec{F}$ est **conservatif** (sur un domaine D) s'il existe une fonction f (définie sur D) telle que $\vec{F} = \nabla f$.

Dans ce cas, f est appelée **fonction potentielle** (ou **potentiel**) de F.

Remarque Dans ce cas, le champ vectoriel $\vec{F}$ est perpendiculaire aux courbes de niveaux de la fonction f. En fait, le champ vectoriel est le champ de gradient der f.

Lignes de courant

Défitnition

Une **ligne de courant** du champ vectoriel $\vec{F}$ est une courbe paramétrée $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}} + z(t)\vec{\mathrm{k}}$ telle que

$$\vec{F}(\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)),$$

c'est-à-dire

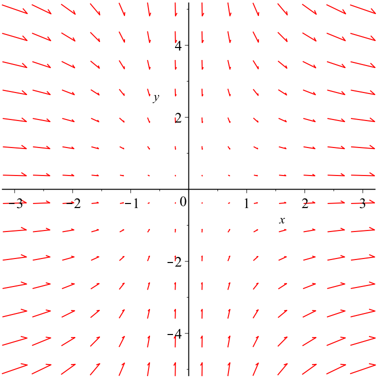
$$\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = x'(t)\vec{\mathrm{i}} + y'(t)\vec{\mathrm{j}} + z'(t)\vec{\mathrm{k}}$$

pour chaque t.

Autrement dit, le vecteur tangent en chaque point d'une ligne de courant est donnée par la valeur du champ en ce point.

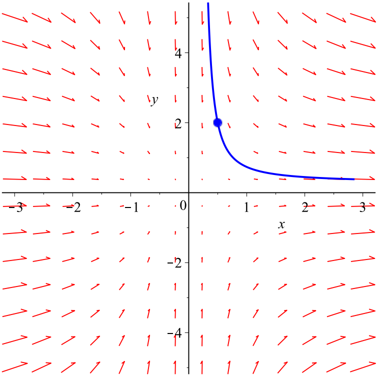
Lignes de courant (2)

Exemple : Le champ $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{\mathrm{i}} - y\vec{\mathrm{j}}$.

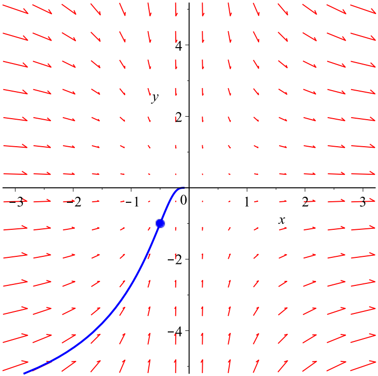


Lignes de courant (3)

Exemple : Le champ $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$.



Ligne de courant passant par $(1/2, 2)$.



Ligne de courant passant par $(-1/2, -1)$.