MTH1102 - Exercices de la semaine 2

1 Exercices de routine

Section 8.3 nos. 1, 3.

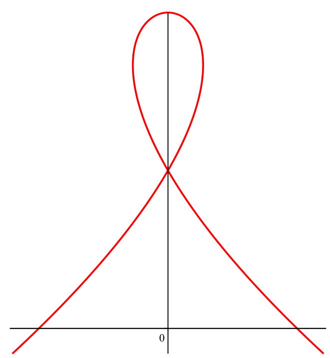
Section 9.2 nos. 1, 9.

Section 9.1 nos. 11, 13, 23.

2 Longueur d'une courbe

1. Soit C la courbe paramétrée par
$$\vec{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \vec{i} + e^t\, \vec{j} + e^{-t}\, \vec{k}.$$
   (a) L'origine est-elle située sur la courbe C ? Justifiez votre réponse.
   (b) Calculer la longueur de la partie de C reliant le point $(0, 1, 1)$ au point $(\sqrt{2}\, \ln(3), 3, 1/3)$.

2. Soit C la courbe paramétrée par
$$\vec{r}(t) = \sqrt{2}\, t(1 - 6t^2)\, \vec{i} + (2 - 6t^2)\, \vec{j}$$
et représentée ci-dessous.



Calculez la longueur de la boucle de la courbe C.

3. Soit C la spirale paramétrée par
$$\vec{r}(t) = 2e^t \cos(t)\, \vec{i} + 2e^t \sin(t)\, \vec{j} + e^t\, \vec{k}.$$
À partir du point $(2, 0, 1)$, vous parcourez 12 unités le long de C dans la direction où le paramètre t est croissant. En quel point vous situez-vous maintenant ?

4. La molécule d'ADN a la forme d'une double hélice, chacune pouvant être paramétrée par une fonction vectorielle
$$\vec{r}(t) = R\cos(t)\, \vec{i} + R\sin(t)\, \vec{j} + Kt\, \vec{k},$$
où R et K sont des constantes. Le rayon de chacune des hélices est environ 10 angstroms (1 Å $= 10^{-8}$ cm). Chaque hélice s'élève d'environ 34 Å par tour et il y a environ 2.9×10^8 tours complets. Estimez la longueur, en centimètres, de chacune des hélices.

3 Intégrales curvilignes

5. Évaluez l'intégrale
$$J_1 = \int_C (xy + z)\, ds,$$
où C est le segment allant du point $P = (1, 2, 3)$ au point $Q = (2, -5, 4)$.

6. Soit C la partie de la courbe d'intersection du cylindre parabolique $x^2 = 2y$ et du paraboloïde hyperbolique $3z = xy$ allant de l'origine au point $(6, 18, 36)$. Évaluez l'intégrale
$$J_2 = \int_C (2yz - x^3)\, ds.$$

7. Supposons qu'un fil mince est plié de façon à prendre la forme d'une courbe C dans l'espace. Supposons aussi que ce fil a une densité variable donnée par une fonction $\delta(x, y, z)$. La *masse* du fil est donnée par
$$m = \int_C \delta(x, y, z)\, ds.$$
Cette formule s'interprète comme suit. Le facteur ds représente une petit élément de longueur le long de la courbe et $\delta(x, y, z)\, ds$ représente la masse de ce petit élément. Ici, on suppose que δ est continue et varie très peut sur un très petit morceau de C, de sorte que la masse d'un petit élément est approximativement le produit de la longueur par une densité constante. L'intégrale représente la « somme » des masses des petits éléments de long de la courbe et s'interprète comme la masse totale du fil.

   Calculez la masse d'un fil ayant la forme de l'hélice C paramétrée par $x = t$, $y = 4\cos(t)$, $z = 4\sin(t)$, avec $0 \leq t \leq 4\pi$, si sa densité en tout point est proportionnelle à la distance à l'axe des x. Donnez d'abord une réponse exacte, puis une approximation arrondie à la deuxième décimale.

8. (a) Expliquez pourquoi l'intégrale
$$J_3 = \int_C e^{xy}\, ds$$
est nécessairement positive.

   (b) Laquelle des intégrales suivantes est la plus grande ? Justifiez votre réponse.

   (i) $\int_C x^2\, ds$ (ii) $\int_C y^2\, ds$ (iii) $\int_C (x^2 + y^2)\, ds$

   (c) Soit
$$J_4 = \int_C xy \ln\left(1 + x^4 + y^4\right)\, ds,$$
où C est le demi-cercle défini par $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$. Utilisez la symétrie pour évaluer l'intégrale J_4.

4 Champs vectoriels

9. On considère le champ vectoriel défini par
$$\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{y}\,\vec{\jmath}.$$
   (a) Donnez une paramétrisation de la ligne de courant du champ vectoriel passant par le point $(2, -2)$. Sur quel intervalle cette paramétrisation est-elle valide ?

   (b) Si $\vec{F}$ est un champ de vitesses et qu'une particule est initialement au point $(2, -2)$, en quel point cette particule sera-t-elle après $3/2$ unité de temps ?

10. Une particule se déplace dans le champ de vitesses défini par le champ
$$\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{\imath} + (x + y^2)\,\vec{\jmath}.$$
À l'instant $t = 3$, la particule est au point $(2, 1)$. Estimez la position de la particule à l'instant $t = 3.01$.

11. Un champ de forces est de la forme

$$\vec{F}(\mathbf{x}) = \frac{C\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3},$$

où $\mathbf{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ désigne le vecteur position du point (x, y, z). Montrez que la grandeur de la force en un point est inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine.

5 Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 8.3 nos. 5, 15.

Section 9.2 nos. 5, 13.

Section 9.1 nos. 35.