

9. Cokrigage

Souvent l'on a plusieurs variables mesurées, soit aux mêmes points échantillons, soit en des points différents. Par exemple on pourrait connaître la position du sommet d'un réservoir pétrolier en quelques points et disposer d'une large couverture sismique donnant la position approximative pour ce sommet. On pourrait avoir un gisement de Cu et Ni où les deux variables sont mesurées en tout point. En hydrogéologie, on pourrait connaître les charges hydrauliques en quelques points et les transmissivités en un nombre plus restreint de points, etc.

Sans perte de généralité, l'on va considérer le cas où une des variables est identifiée comme prioritaire (variable principale Z), et les autres sont des variables secondaires. Pour simplifier l'écriture, on va considérer que l'on a une seule variable secondaire (Y). Toutefois l'extension à plusieurs variable est immédiate et ne pose aucun problème théorique particulier.

Comment peut-on utiliser l'information fournie par la variable secondaire pour améliorer l'estimation de la variable principale? La démarche suivie est une généralisation de celle vue au chapitre sur le krigeage.

Cokrigage ordinaire

On veut former une estimation linéaire de la variable principale à partir d'observations de la variable principale et de la variable secondaire:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Y_i$$

L'estimateur doit être sans biais, ceci est assuré en imposant:

$$\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i = 0$$

La variance d'estimation s'écrit:

$$\text{Var}(Z_0 - Z_0^*) = \text{Var}(Z_0) + \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{nz} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{ny} \sum_{j=1}^{ny} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) + 2 \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{ny} \lambda_i \alpha_j \text{Cov}(Z_i, Y_j) - 2 \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i \text{Cov}(Z_0, Z_i) - 2 \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i \text{Cov}(Z_0, Y_i)$$

On forme le Lagrangien et l'on dérive par rapport aux poids inconnus et aux 2 multiplicateurs de Lagrange introduits pour tenir compte des contraintes de non-biais. On obtient le système de cokrigage ordinaire:

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Z_i, Y_j) + \mu_z = \text{Cov}(Z_0, Z_i) \quad \forall i = 1 \dots nz$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j \text{Cov}(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) + \mu_y = \text{Cov}(Z_0, Y_i) \quad \forall i = 1 \dots ny$$

$$\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{ny} \alpha_i = 0$$

Substituant ces équations dans l'expression de la variance d'estimation, on trouve la variance de cokrigage ordinaire:

$$\sigma_{ck}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i) - \mu_z$$

Évidemment ce système s'écrit très simplement sous forme matricielle:

$$K\lambda = k \text{ et } \sigma_{ck}^2 = Var(Z_0) - \lambda' k$$

où la matrice K de taille $(nz+ny+2) \times (nz+ny+2)$ contient toutes les covariances point observation -point observation pour les 2 variables, le vecteur k $(nz+ny+2)$ contient toutes les covariances entre le point (ou bloc) à estimer et les points de données pour les 2 variables.

Note: Il est nécessaire d'avoir au moins une observation de la variable principale et 2 observations de la variable secondaire pour effectuer le cokrigage ordinaire.

Cokrigage simple

Si l'on connaît les deux moyennes, m_z et m_y , on n'a qu'à les soustraire et à travailler avec les résidus. On estime alors en x_0 un résidu auquel on rajoute la moyenne m_z . Les conditions de non-biais ne sont plus requises. La matrice de cokrigage est alors de taille $(nz+ny) \times (nz+ny)$. Il résulte:

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) = Cov(Z_0, Z_i) \quad \forall i = 1 \dots nz$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Z_0, Y_i) \quad \forall i = 1 \dots ny$$

et

$$\sigma_{ck}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i)$$

Note: Contrairement au cokrigage ordinaire, il n'est pas nécessaire d'avoir des observations de la variable principale, et on peut avoir une seule observation de la variable secondaire (si l'on n'a aucune observation de la variable secondaire, ce n'est plus un cokrigage, c'est un krigeage).

Si une seule des deux variables est à moyenne connue, on utilise alors un système de cokrigage ordinaire avec une seule condition de non-biais sur la variable de moyenne inconnue.

Propriétés du cokrigage

Toutes les propriétés du krigeage sont valides pour le cokrigage. En plus,

- i. Si l'on estime directement par cokrigage une combinaison linéaire des variables, la valeur cokrigée sera égale à la même combinaison linéaire appliquée aux valeurs cokrigées de chaque variable. (Ce ne serait pas le cas pour le krigeage).

Une application de cette propriété est le problème de tracer le haut et la base d'une formation. On pourrait kriger directement le haut, kriger directement le bas et kriger directement l'épaisseur de la formation. Les deux estimés du bas obtenus, soit directement, soit en prenant le haut - l'épaisseur, ne seront pas les mêmes. Au contraire, si l'on avait effectué un cokrigage, l'on aurait été assuré que les estimations coïncident pour les 2 approches.

Une autre illustration de cette propriété est l'inversion gravimétrique. En cokrigeant les densités de bloc par les anomalies gravimétriques, on est assuré que les densités estimées vont reproduire exactement l'anomalie mesurée aux points observations.

- ii. Propriété de cohérence. Si l'on effectue le cokrigage pour estimer une variable et sa dérivée, on a alors que le cokrigage (i.e. l'estimation) de la dérivée est égale à la dérivée du cokrigage. De même, pour toute transformation linéaire de Z , le cokrigage de la transformation linéaire est la transformation appliquée à la valeur estimée Z^* par cokrigage. Cette propriété généralise la propriété "i."
- iii. La variance de cokrigage est toujours inférieure (ou égale) à la variance de krigeage.
- iv. Si la variable secondaire est échantillonnée aux mêmes points (ou en un sous ensemble des mêmes points) que la variable principale et que les covariances croisées et directes sont proportionnelles, (i.e. il existe un modèle unique $C(h)$ permettant de décrire toutes les covariances à une constante multiplicative près) alors le cokrigage est identique au krigeage.

Une conséquence de cette propriété est, qu'en général, on aura très peu de gain d'un cokrigage si la variable secondaire n'est pas échantillonnée de façon plus abondante que la variable principale (ou du moins en d'autres points). De plus il faut une corrélation assez forte entre les variables principale et secondaire pour justifier le cokrigage (>0.5 et même, dans bien des cas >0.7).

Remarque: Une situation courante de cokrigage est le cas d'une variable secondaire connue presque en tout point. Dans ce cas, il vaut mieux constituer le voisinage de cokrigage en prenant, au moins, la variable secondaire aux mêmes points que la variable principale et au point où l'on veut faire l'estimation. On peut aussi ajouter quelques observations de la variable secondaire à proximité du point à estimer en prenant garde toutefois de ne pas rendre la matrice de cokrigage quasi-singulière par l'inclusion de deux points très proches l'un de l'autre.

9.1 Fonctions de covariance admissibles

On a vu précédemment que l'on devait connaître $Cov(Z_i, Z_j)$, $Cov(Y_i, Y_j)$, et $Cov(Z_i, Y_j)$. Les deux premières covariances sont dites simples, la dernière croisée. Comme pour le cas univariable, on utilisera généralement pour les covariances simples des modèles connus admissibles, toutefois, pour la covariance croisée, les coefficients effet de pépite, et paliers peuvent être négatifs (cas d'une corrélation négative entre les variables Z et Y). De plus, $Cov(Z_i, Y_j)$ n'est pas nécessairement une fonction symétrique. La vérification que le modèle multivariable (i.e. globalement les covariances simples et croisée) est admissible est donc plus complexe que pour le cas univariable. De façon générale, on doit évaluer les transformées de Fourier

(analytique) de chaque modèle (covariances simples et croisées), former à chaque fréquence la matrice de densité spectrale et vérifier que celle-ci est positive semi-définie pour chaque fréquence.

Toutefois, il existe des cas où la vérification est plus aisée:

- i. Relations déterministes entre Z et Y (ex. Y est la dérivée de Z). Dans ce cas, il existe aussi une relation entre les covariances simples et croisée des 2 variables et l'on est assuré que le modèle ainsi formé est admissible. En particulier, si on considère Z et L(Z) où L(Z) est un opérateur linéaire quelconque appliqué à Z (ex. dérivée de tout ordre, intégration, combinaison linéaire, etc.), on a $\text{Cov}(Z(x), L(Z(x+h))) = L(\text{Cov}(Z(x), Z(x+h)))$.
- ii. Covariances proportionnelles. Toutes les covariances peuvent être écrites en fonction d'un seul modèle commun à une constante multiplicative près. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{zz} & B_{zy} \\ B_{yz} & B_{yy} \end{bmatrix} C(h) = BC(h)$$

La matrice de coefficients B est symétrique et il faut qu'elle soit positive semi-définie (i.e. déterminant positif ou nul). Dans ce modèle, si chaque observation est analysée pour Z et Y, alors le cokrigage devient équivalent au krigeage et l'on n'a donc aucun intérêt à effectuer le cokrigage. Si Y est échantillonné en des points différents de Z et qu'il existe une bonne corrélation entre ces 2 variables, alors le cokrigage peut être profitable.

Remarque: Le modèle proportionnel est le seul pour lequel la corrélation entre Z et Y ne varie pas en fonction du support sur lequel on mesure Z et Y. De plus c'est le seul modèle où une décomposition en facteurs orthogonaux (analyse en composantes principales, assure que les facteurs sont orthogonaux pour toute distance (i.e. la covariance croisée des facteurs est nulle).

- iii. Modèle linéaire de corégionalisation (le plus fréquemment utilisé). Toutes les covariances peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de covariances élémentaires. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,zz} & B_{1,zy} \\ B_{1,yz} & B_{1,yy} \end{bmatrix} C_1(h) + \begin{bmatrix} B_{2,zz} & B_{2,zy} \\ B_{2,yz} & B_{2,yy} \end{bmatrix} C_2(h) + \dots = B_1 C_1(h) + B_2 C_2(h) + \dots$$

Dans ce modèle, les matrices de coefficients B_1, B_2, \dots sont toutes symétriques et doivent être positives semi-définies. Si l'une des matrices n'est pas positive semi-définie alors ce n'est pas un modèle linéaire de corégionalisation et l'on ne sait pas si le modèle est admissible à moins d'en vérifier la validité dans le domaine spectral.

9.1.1 Exemple

On a 2 variables Z et Y. La variable Z montre un effet de pépité de 1 et une covariance sphérique de portée 30m et de palier 2. La variable Y montre un effet de pépité de 1 et une covariance sphérique de portée 30m et de palier 4. La covariance entre Z et Y est symétrique, montre un effet de pépité nul et une covariance sphérique de portée 30m et de palier 2.4. On peut donc écrire:

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$

Note: $\delta(h) = 1$ si $h=0$, 0 si $|h|>0$.

La forme du modèle est celle d'un modèle linéaire de corégionalisation. Le déterminant de la 1ère matrice de coefficients est 1, celui de la 2e matrice est 2.24. Le modèle est donc admissible. Supposons que l'on cherche à évaluer $\text{Cov}(Z(x), Y(x+10))$. Avec ce modèle, l'on aura:
 $\text{Cov}(Z(x), Y(x+10)) = 0 + 2.4 * [1 - (1.5 * 10 / 30 - 0.5 * (10 / 30)^3)] = 1.244$.

Note: ce modèle procure une corrélation, à la distance 0, de $(2.4 / (3 * 5)^{0.5}) = 0.62$, qui est assez faible. Toutefois, si on interprète l'effet de pépète comme un bruit blanc, alors la corrélation entre les variables non bruitées serait de: $2.4 / (2 * 4)^{0.5} = 0.85$, ce qui est beaucoup plus élevé.

Ex. de cokrigeage: supposons que l'on ait observé Z_1 et Y_1 en $x_1=0$, Z_2 en $x_2=10$ et Y_0 en $x_0=5$. Comparons l'estimation de Z_0 (au point $x_0=5$) par krigeage et cokrigeage simples. On suppose les deux variables de moyenne 0.

On a:

| | | | |
|------------|--------|-------|-----|
| Z_1, Y_1 | Y_0 | Z_2 | x |
| | $Z_0?$ | | |
| 0 | 5 | 10 | |

Par krigeage simple:

$$\begin{matrix} Z_1 & Z_2 & & Z_0 \\ Z_1 \begin{bmatrix} 3 & 1.037 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.5046 \end{bmatrix} \\ Z_2 \begin{bmatrix} 1.037 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.5046 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.3727 \quad \text{et} \quad \sigma_k^2 = 1.8784$$

Par cokrigeage simple, on trouve:

$$\begin{matrix} Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 & & Z_0 \\ Z_1 \begin{bmatrix} 3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.5046 \end{bmatrix} \\ Z_2 \begin{bmatrix} 1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{2,z} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.5046 \end{bmatrix} \\ Y_1 \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{1,y} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.8056 \end{bmatrix} \\ Y_0 \begin{bmatrix} 1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{0,y} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2.4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda_{1,z} = 0.2294, \lambda_{2,z} = 0.2336, \lambda_{1,y} = 0.0072, \lambda_{0,y} = 0.3085 \quad \text{et} \quad \sigma_{ck}^2 = 1.5500$$

Noter que i. la variable auxiliaire a reçu un poids important au point x_0 , ii. la symétrie pour les poids des 2 points Z n'est pas préservée car en un de ces points on connaît aussi Y , iii. la réduction assez importante de la variance d'estimation procurée par le cokrigeage.

Par krigeage ordinaire, on aurait eu:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5 \quad \text{et} \quad \sigma_k^2 = 2.0093$$

Par cokrigeage ordinaire:

$$\lambda_{1,z} = 0.5494, \lambda_{2,z} = 0.4506, \lambda_{1,y} = -0.1678, \lambda_{0,y} = 0.1678 \quad \text{et} \quad \sigma_{ck}^2 = 1.9067$$

Noter que la somme des poids de la variable Z donne 1 et celle de Y donne 0 tel que prévu. Cette dernière contrainte empêche ici le cokrigage ordinaire d'améliorer substantiellement la prédiction du krigeage ordinaire comme l'indique la variance de cokrigage.

9.1.2 Le variogramme croisé

Une autre fonction de structure croisée que l'on peut utiliser lorsqu'on sait que les covariances sont symétriques est le variogramme croisé, défini comme:

$$\gamma_{zy}(h) = 0.5 * E[(Z(x) - Z(x+h))(Y(x) - Y(x+h))] = 0.5 * Cov((Z(x) - Z(x+h)), (Y(x) - Y(x+h)))$$

Comme on le voit de la définition, le variogramme croisé est une fonction symétrique et seuls les points où les 2 variables sont connues peuvent contribuer à l'estimation du variogramme croisé. Ce lourd handicap est à comparer aux deux avantages principaux du variogramme croisé, soit le fait que l'on n'ait pas besoin d'estimer les moyennes de Z et Y et le fait que les modèles n'ont pas nécessairement de palier. Personnellement, je crois préférable, dans la majorité des cas, d'utiliser la covariance croisée.

On a la relation suivante entre covariance croisée et variogramme croisé:

$$\gamma_{zy}(h) = C_{zy}(0) - 0.5 * (C_{zy}(h) + C_{zy}(-h))$$

Pour une covariance symétrique, on retrouve une relation analogue à celle du cas univariable. De plus si on pose Y=Z, i.e. cas univariable, on retrouve l'expression du cas univariable.

9.2 Exemple d'application (inspiré de Gloaguen, M.Sc.A., 2000)

Des forages dans un aquifère à nappe libre peu profond ont permis la détermination du niveau du fond de l'aquifère en 4 points (25,25), (75,25), (75,75) et (25,75). On a aussi effectué un levé géoradar sur une grille régulière de 10m allant de 0 à 100m en x et y. L'objectif est de décrire la forme du fond de l'aquifère en utilisant les deux type de données. On effectue un cokrigage ordinaire en utilisant les 4 forages et les 121 points de levés géoradar. Les données géoradar prennent 2 valeurs distinctes soit -0.5 et -3.5, -3.5 correspondant au fond d'un chenal. Les 4 forages montrent la valeur -1. Noter que les valeurs radars semblent indiquer un décalage par rapport aux valeurs des forages (-0.5 vs -1).

Un modèle linéaire de corégionalisation est adopté avec composante sphérique de portée 100m, et

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1.8 \\ 1.8 & 2 \end{bmatrix} \text{ (donc corrélation de 0.9 entre les 2 variables). La figure suivante montre que les}$$

estimations aux mêmes points que les données radar prennent également 2 valeurs à -1.11 et -3.8. Le décalage des données radar a donc été filtré par le cokrigage ordinaire (un décalage plus grand aurait donné exactement les mêmes résultats), et l'on a pu retrouver la forme du chenal presque parfaitement. Par contraste, un krigeage ordinaire effectué avec les seuls 4 forages aurait donné une surface plane au niveau -1.

