

1- Cokrigage, la forme matricielle.

Le système d'équations linéaires à résoudre est:

$$K\lambda = k$$

avec:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & K_{1p} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & K_{2p} & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{p1} & K_{p2} & \cdot & \cdot & K_{pp} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 1' & 0' & \cdot & \cdot & 0' & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0' & 1' & 0' & \cdot & 0' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0' & \cdot & \cdot & 0' & 1' & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

K_{ij} est la matrice $n_i \times n_j$ des covariances entre les variables i et j . Ces covariances sont évaluées en fonction des distances séparant les n_i points de la variable i et les n_j points de la variable j .

note: $K_{ij} = K_{ji}$

1 est un vecteur de 1 dont la longueur est n_i

0 est un vecteur de 0 dont la longueur est n_i

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda^p \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

où λ^i est un vecteur $n_i \times 1$
et μ_i est un scalaire

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{p1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

où k_{i1} est un vecteur $n_i \times 1$ donnant les covariances entre la variable i et la variable (principale) 1. Les emplacements considérés sont les n_i points où est mesurée la variable i et le point x_0 où s'effectue l'estimation.

La variance d'estimation est alors simplement :

$$\sigma_{\text{cokrigage}}^2 = \sigma_1^2 - \lambda' k$$

Une formule analogue au cas du krigeage.

2. Fonctions de structure spatiale

Il existe 3 fonctions de structure croisées décrites dans la littérature :

i. Covariogramme croisé : $C_{12}(\mathbf{h}) = \text{Cov}(Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}+\mathbf{h}))$

Avantages :

- permet d'utiliser des variables mesurées à des localisations ne coïncidant pas pour chaque variable
- permet de tenir compte d'asymétrie de corrélations

Désavantage :

- requiert d'estimer les moyennes de chaque variable

ii. Variogramme croisé : $\gamma_{12}(\mathbf{h}) = 1/2 \text{ E}[(Z_1(\mathbf{x}) - Z_1(\mathbf{x}+\mathbf{h})) (Z_2(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x}+\mathbf{h}))]$

Avantage :

- ne nécessite pas l'estimation des moyennes

Désavantages :

- requiert des variables mesurées aux mêmes localisations
- ne permet pas de modéliser des corrélations asymétriques

iii. Pseudo-variogramme croisé $\rho_{12}(\mathbf{h}) = 1/2 E[(Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}))^2]$

Avantages :

- permet d'utiliser des variables mesurées à des localisations ne coïncidant pas pour chaque variable
- permet de tenir compte d'asymétrie de corrélations

Désavantages :

- ne permet pas de modéliser des corrélations négatives
- nécessite un ajustement pour les unités (habituellement normalisation) qui peut demander d'estimer les moyenne et écart-type de chaque variable.

On notera que seul le variogramme croisé est une fonction symétrique en h (i.e. l'orientation du vecteur n'intervient pas) ce qui constitue un désavantage car certains processus pourraient montrer une asymétrie de corrélations en fonction de l'orientation.

Ex. Dans un forage on effectue des analyses géochimiques et des relevés géophysiques. Un simple décalage d'une des deux mesures rend les covariances asymétriques, ce dont ne peut rendre compte le variogramme croisé.

Wackernagel(1995) recommande d'utiliser le covariogramme croisé dans le cas multivariable. J'adhère à cette recommandation.

3. Conditions d'admissibilité pour les covariogrammes croisés

La vérification de l'admissibilité des modèles de covariogrammes multivariables est plus complexe dans le cas général que pour le cas univariable, sauf pour le cas particulier de 2 variables où celle-ci demeure assez simple.

a) Cas 2 variables :

Condition de Cauchy-Schwartz sur les variogrammes croisés :

$$(\gamma_{12}(h))^2 \leq \gamma_{11}(h)\gamma_{22}(h)$$

Cette condition est nécessaire avec p variables. Avec 2 variables et un modèle intrinsèque (i.e. tous les variogrammes et variogrammes croisés sont proportionnels entre eux) de corégionalisation, elle est nécessaire et suffisante.

Utilisant la relation suivante entre variogrammes et covariogrammes :

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2}(C_{ij}(h) + C_{ij}(-h))$$

on peut définir une condition équivalente pour les covariogrammes.

On notera le cas plus simple où les covariances sont symétriques :

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - C_{ij}(h)$$

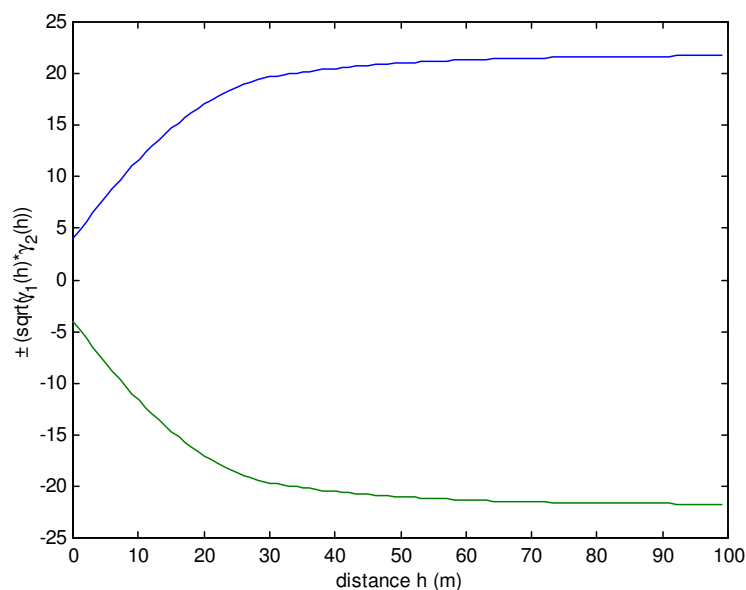
qui permet de réécrire la condition de Cauchy-Schwartz :

$$(C_{12}(0) - C_{12}(h))^2 \leq (C_{11}(0) - C_{11}(h))(C_{22}(0) - C_{22}(h))$$

où

$C_{11}(h)$, $C_{12}(h)$ et $C_{22}(h)$ soient tous trois des modèles admissibles individuellement.

Ex. On a une minéralisation de Cu-Zn. On a adopté un modèle sphérique avec portée $a=30\text{m}$, $C_0=5\%{}^2$ et $C=20\%{}^2$. Pour le Zn, on a retenu un modèle exponentiel de portée effective $3a=60\text{m}$, avec $C_0=3\%{}^2$ et $C=16\%{}^2$. Alors, supposant que les covariances sont symétriques en h , tout modèle de variogramme, tombant dans la zone comprise entre les deux courbes ci-bas respecte la condition de Cauchy-Schwartz (note: cette condition est suffisante seulement dans le cadre du modèle intrinsèque de corégionalisation et avec $p=2$ variables; autrement ce n'est qu'une condition nécessaire).



b) Cas de p variables, modèle intrinsèque

Lorsque tous les covariogrammes simples et croisés sont proportionnels entre eux, alors on peut écrire

$$[C_{ij}(h)] = B * C(h)$$

où

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \bullet & b_{1p} \\ b_{21} & \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet & \bullet \\ b_{p1} & \bullet & \bullet & b_{pp} \end{bmatrix}$$

est une matrice $p \times p$ de coefficients qui doit (la matrice) être positive définie. Pour vérifier cette condition, il suffit de vérifier que toutes les valeurs propres sont positives (il existe plusieurs autres méthodes également).

Note : Dans ce modèle, les covariances sont nécessairement symétriques.

c) Cas de p variables, modèle de corégionalisation linéaire.

Tous les covariogrammes simples et croisés peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de « k » modèles de covariance élémentaires.

$$[C_{ij}(h)] = B_1 C_1(h) + B_2 C_2(h) + \dots + B_k C_k(h)$$

où chaque matrice B_1, \dots, B_k est $p \times p$.

Il suffit alors que chacune des matrices de coefficient B soit positive définie pour être assuré que le modèle est admissible.

Note : Dans ce modèle, chacune des covariances est symétrique en h.

Ex. Une minéralisation de Cu, Pb, Zn est modélisé par une combinaison de modèle « effet de pépite » et sphérique de portée 100m avec les matrices :

$B_0 =$

5	1	0
1	2	0
0	0	3

et $B_1 =$

10	9	5
----	---	---

9	15	7
5	7	4

B_0 et B_1 ont uniquement des valeurs propres positives, donc ces deux matrices sont positives définies et le modèle est admissible.

d) Cas de « p » variables, cas général

On doit évaluer la transformée de Fourier de chaque covariogramme (simple et croisé). Dans le domaine de Fourier $c_{ij}(w)$. Ensuite, pour chaque « w », on doit vérifier que la matrice $[c_{ij}(w)]$ est positive définie pour tout « w ».

En pratique on n'utilise pas cet algorithme normalement.

e) Variables avec relations déterministes

Parfois le cokrigage implique des variables liées par des équations déterministes (ex. une propriété et sa dérivée selon une direction donnée, une équation différentielle liant des variables, un champ de potentiel, etc.).

Lorsque l'on peut déduire à partir d'une variable quel est le modèle de covariogramme croisé et le modèle de covariogramme simple de l'autre variable, alors on est assuré que le modèle est admissible. Malheureusement, la dérivation de ces fonctions de covariance est souvent très difficiles à réaliser au plan mathématique. De plus, souvent les variables liées n'ont pas le même niveau de stationnarité, ce qui complique l'estimation.

Exemple 1 : Matheron a montré que la dérivée, prise dans la direction de l'écoulement, de $\ln(\text{transmissivité})$ était approximativement proportionnelle à la résiduelle de la charge hydraulique. Supposons que l'on ait observé les charges hydrauliques en un certain nombre de points et que l'on veuille s'en servir pour estimer la transmissivité en différents points. Supposons de plus que $\ln(\text{transmissivité})$ est bien modélisé par un variogramme gaussien isotrope.

On aura :

Soit h_i : la résiduelle de la charge au point x_i .

T_i : $\ln(\text{transmissivité})$ au point i .

d_{ij} : distance entre 2 points i et j .

$$\text{Cov}(T_i, T_j) = C * \text{Exp} \left(- \left(\frac{d_{ij}}{a} \right)^2 \right)$$

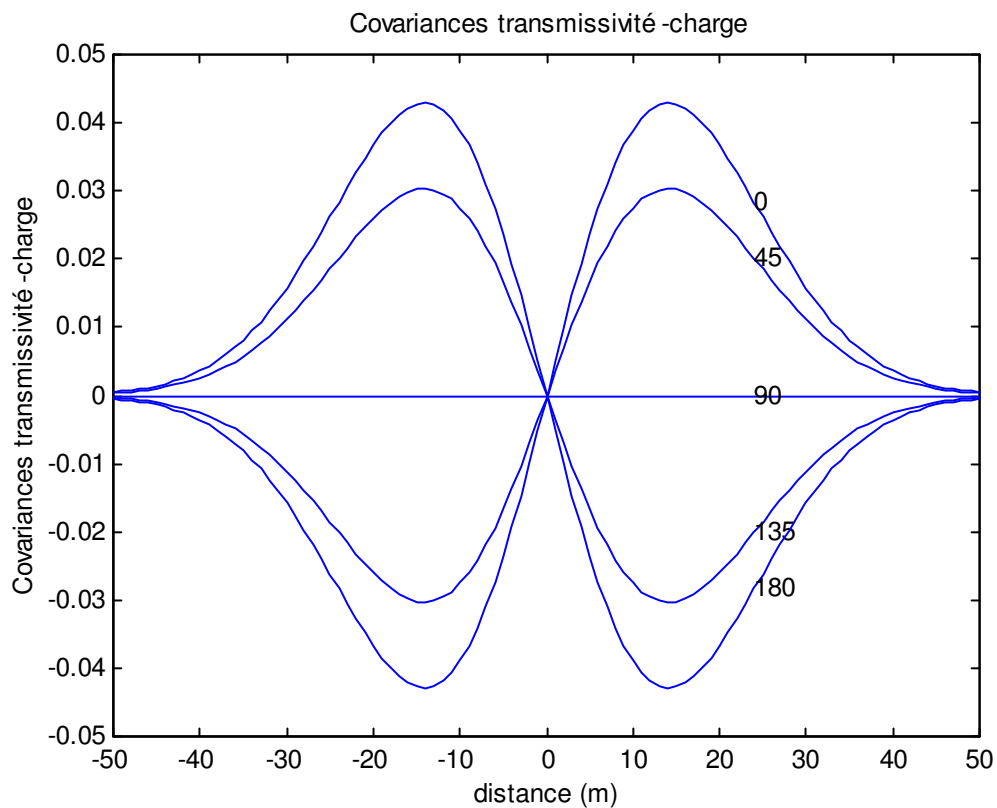
$$\text{Cov}(T_i, h_j) = kC * \text{Exp} \left(- \left(\frac{d_{ij}}{a} \right)^2 \right) * \left(\frac{-2}{a^2} \right) |d_{ij}| \cos(\alpha)$$

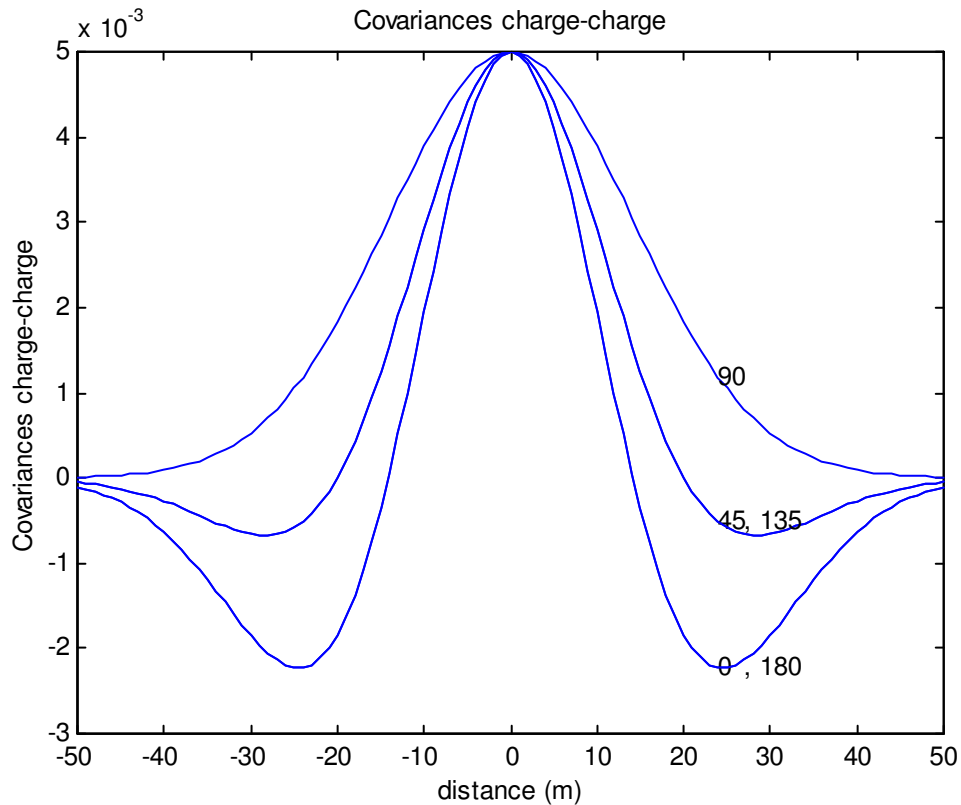
et

$$Cov(h_i, h_j) = k^2 C * \text{Exp}\left(-\left(\frac{d_{ij}}{a}\right)^2\right) * \left(\frac{2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{2d_{ij}^2 \cos^2(\alpha)}{a^2}\right)$$

où k est une constante négative et α est l'angle entre le vecteur d_{ij} et la direction d'écoulement. Les graphes obtenus avec $a=20$, $C=1$ et $k=-1$ sont illustrés plus bas.

On notera que la covariance charge-charge est symétrique mais non la covariance transmissivité-charge. De plus les deux fonctions montrent de fortes anisotropies bien que la covariance des $\ln(\text{transmissivité})$, elle, soit isotrope.





On notera que la covariance transmissivite-charge est nulle lorsque les points sont placés perpendiculairement à la direction d'écoulement. La covariance charge transmissivité est nulle également pour $d=0$, peu importe la direction considérée.

De plus, on notera une corrélation positive entre transmissivité et charge pour un angle de 0° et un d positif. Ceci veut dire que si l'on mesure une faible transmissivité en amont, on s'attend à rencontrer en aval une charge faible, ce qui est plein de bon sens étant donné que les zones à faible transmissivité occasionnent d'importantes pertes de charge.

Notons que la corrélation entre transmissivite-charge est maximale (négativement) ici à une distance de $a/2^{1/2}$ (note : $a=20\text{m}$) $=14.14\text{m}$. La corrélation vaut alors -0.6065 , ce qui est une forte corrélation et qui démontre l'utilité que peuvent présenter les charges pour estimer les transmissivités.

Exemple 2 : Dans des forages pétroliers, on note la position d'une formation repère dans des forages. On a aussi le gradient de la formation à l'aide d'un outil géophysique nommé le « dipmeter ». On peut utiliser l'information du gradient pour mieux estimer la position du sommet du réservoir. Le problème est alors essentiellement le même qu'à l'exemple précédent.

En résumé:

Type de modèle	Description	Condition à vérifier	
		2 variables	p variables
Intrinsèque	Tous les variogrammes sont proportionnels à une structure unique	Cauchy-Schwartz (N+S)	Cauchy-Schwartz (N)
Linéaire	Chaque variogramme s'exprime comme une combinaison de modèles de base	Matrices des coefficients positive définie (N+S)	Matrices des coefficients positive définie (N+S)
Quelconque	Par ajustement séparé sur chacune des covariances ou chacun des variogrammes	Spectres directs et spectre croisé forment une matrice positive définie à chaque fréquence (N+S)	Spectres directs et spectre croisé forment une matrice positive définie à chaque fréquence (N+S)
Déterministe	Modèle ajusté pour une des variables et modèles déduits des relations déterministes pour les autres	Aucune (OK par construction)	Aucune (OK par construction)

Note: N: nécessaire, S: suffisant.

4. Intérêt d'un cokrigage

Le modèle le plus couramment utilisé de cokrigage est le modèle linéaire de corégionalisation avec 2 variables. Les expériences ont montré que l'on gagnait à effectuer un cokrigage si les deux conditions suivantes sont remplies simultanément :

- i. La corrélation maximale entre variable principale et secondaire est forte (de l'ordre de 0.5 ou plus).
- ii. La variable secondaire n'est pas échantillonnée aux mêmes points que la variable principale et idéalement est échantillonnée en beaucoup plus de points.

À titre d'exemple, pour un gisement donné, si on analyse le Cu et le Zn de façon systématique sur des carottes de forage, il n'y a pas véritablement intérêt à effectuer un cokrigage pour estimer l'une ou l'autre des variables, un simple krigeage suffit. Par contre, si l'on s'est mis depuis peu à analyser le Zn et que de nombreuses analyses de Cu ont été réalisées par le passé, alors un cokrigage pour le Zn serait possiblement intéressant.

4.1 Exemples typiques de cokrigage

- Des cas typiques de cokrigage combinent des variables précises mais très coûteuses à acquérir et des variables souvent moins précises mais disponibles en un grand nombre de points.

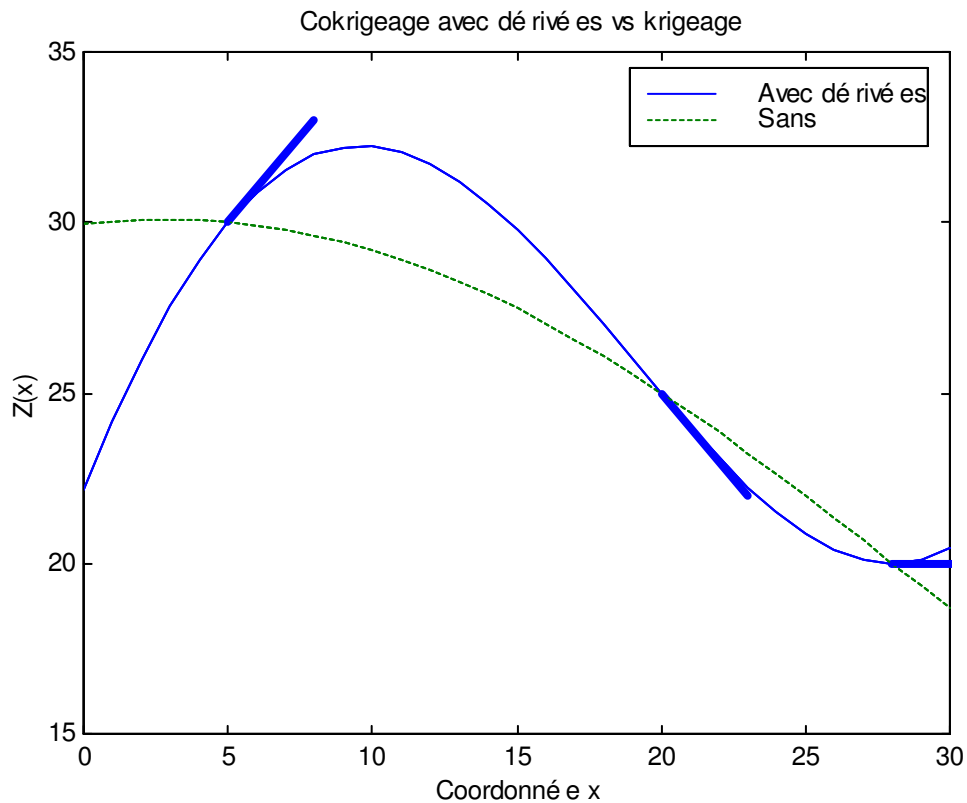
- Un exemple classique est la modélisation du toit d'un réservoir qui est parfaitement connu dans les quelques forages pétroliers disponibles et dont la position approximative peut être obtenue presque partout par relevé sismique.
 - La quantité de pluie mesurée avec quelques pluviomètres et des images radar des nuages.
 - La température mesurée en quelques stations et la topographie détaillée d'une région.
 - La charge hydraulique mesurée en quelques piézomètres et la topographie détaillée de la région.
 - Les tests de pompage permettant de déterminer la transmissivité en quelques puits et les tests de capacité spécifique conduits par les puisatiers dans tous les puits domestiques.
 - des tests piézométriques permettant de déterminer la conductivité hydraulique ponctuelle et une description de la géologie pour laquelle on pourrait approcher la perméabilité.
- Des données prises sur des supports différents et de natures différentes bien qu'elles représentent le même caractère.
 - Ainsi des analyses de DDH et de BH pourraient être combinées dans un cokrigage.
 - Des analyses réalisées par absorption atomique et d'autre par « fire assay ».
 - Des analyses anciennes et d'autres plus récentes.
 - Des mesures d'uranium obtenues par analyse chimique et par comptage de radioactivité.

Exemple :

On a un variogramme gaussien de portée 40. On a 3 points x_i le long d'un profile où l'on a mesuré à la fois la position du sommet d'une formation et l'inclinaison de la formation en chaque point.

Coordonnée x	Sommet de la formation	Pente
5	30	1
20	25	-1
28	20	0

On a réalisé un krigeage sans tenir compte de la pente des formations et un cokrigage incorporant l'information de la pente et du sommet de la formation. Les résultats sont présentés à la figure suivante :



On note que : Les courbes interpolées sont très différentes. Seule la courbe interpolée par cokrigage avec les dérivées produit une courbe dont la dérivée est égale aux dérivées connues aux points échantillons (illustrées par les segments plus foncés).

On peut aussi estimer directement la dérivée de la courbe en utilisant les 6 informations connues (3 élévations et 3 dérivées). L'estimation de la dérivée serait alors effectivement égale à la dérivée de la courbe obtenue par cokrigage.

Finalement, une partie de l'information pourrait manquer (par exemple on pourrait n'avoir que la dérivée au 3^e point ou que le sommet au 2^e point) et l'on pourrait encore effectuer ce cokrigage.