

5. KRIGEAGE

Puisqu'on peut calculer la variance d'estimation pour tout estimateur linéaire, pourquoi ne pas choisir celui qui assure la variance d'estimation minimale? C'est précisément ce qu'effectue le krigeage. Dans le cas stationnaire, on en reconnaît 2 types principaux, selon que la moyenne du processus est connue ou non, soit le krigeage simple et le krigeage ordinaire. Ce dernier est, de loin, le plus fréquemment utilisé.

5.1 Krigeage ordinaire

Supposons que l'on veuille estimer un bloc v centré au point x_0 . Notons Z_v la vraie valeur (inconnue) de ce bloc et Z_v^* l'estimateur que l'on obtient.

L'estimateur est linéaire, i.e.:

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$$

où les Z_i désignent les v.a. correspondant aux points échantillons.
On veut minimiser:

$$\sigma_e^2 = \text{Var}[Z_v - Z_v^*] = \text{Var}[Z_v] + \text{Var}[Z_v^*] - 2 \text{Cov}[Z_v, Z_v^*]$$

Substituant l'expression de l'estimateur dans cette équation, on obtient:

$$\sigma_e^2 = \text{Var}[Z_v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i]$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

En effet, dans ce cas, $E[Z_v^*] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] = \sum_i \lambda_i m = m$

On a un problème de minimisation d'une fonction quadratique (donc convexe) sous contrainte d'égalité que l'on résout par la méthode de Lagrange. On forme le lagrangien:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \sigma_e^2 + 2\mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \\ &= \text{Var}[Z_v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] + 2\mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \end{aligned}$$

Où μ est le multiplicateur de Lagrange. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ s'annulent. Ceci conduit au système de krigeage ordinaire:

Systeme de krigeage ordinaire

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

La variance d'estimation minimale, appelée variance de krigeage, est obtenue en substituant les équations de krigeage dans l'expression générale pour la variance d'estimation:

$$\sigma_k^2 = \text{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] - \mu$$

Note: Cette variance de krigeage ne dépend pas des valeurs observées, elle ne dépend que du variogramme et de la configuration des points servant à l'estimation par rapport au point (ou bloc) à estimer.

Systeme de krigeage écrit en terme du variogramme:

Comme la variance d'estimation s'écrit aussi directement en terme du variogramme, on peut aussi écrire le système de krigeage en fonction du variogramme. Ceci tient au fait que $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h)$ et que $\sum \lambda_i = 1$.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \mu = \bar{\gamma}(v, x_i) \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

et, alors

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\gamma}(v, x_i) - \bar{\gamma}(v, v) - \mu$$

Il est intéressant de visualiser le système de krigeage ordinaire et la variance de krigeage ordinaire sous forme matricielle:

$$K_o \lambda_o = k_o$$

$$\sigma_{k_o}^2 = \sigma_v^2 - \lambda_o' k_o$$

où

$$K_o = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \text{Cov}(Z_1, Z_2) & \bullet & \text{Cov}(Z_1, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_2, Z_1) & \sigma^2 & \bullet & \text{Cov}(Z_2, Z_n) & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Cov}(Z_n, Z_2) & \bullet & \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & \bullet & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_o = \begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_v) \\ Cov(Z_2, Z_v) \\ \bullet \\ Cov(Z_n, Z_v) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_o = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \bullet \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_v^2 = \bar{C}(v, v)$$

5.2 Krigeage simple

Parfois on connaît la moyenne "m" du champ à estimer ou du moins on en possède un estimé fiable. On peut alors former un estimateur sans biais sans imposer la contrainte que la somme des poids soit égale à 1.

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i + \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) m$$

Tout comme pour le krigeage ordinaire, on écrit la variance d'estimation et on substitue l'expression précédente pour l'estimateur Z_v^* . On trouve:

$$\sigma_e^2 = Var[Z_v] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov[Z_v, Z_i]$$

On dérive cette expression par rapport à chacun des λ_i . On trouve alors le système de krigeage simple:

Système de krigeage simple

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] = Cov[Z_v, Z_i] \quad \forall i = 1 \dots n$$

et la variance d'estimation, appelée variance de krigeage simple s'écrit:

$$\sigma_{ks}^2 = Var[Z_v] - \sum_{i=1}^n \lambda_i Cov[Z_v, Z_i]$$

Note: - La variance de krigeage simple est toujours inférieure à la variance de krigeage ordinaire car on n'a pas besoin d'imposer de contrainte sur les poids λ_i . Toutefois, elle requiert la connaissance de la moyenne "m". De plus, l'hypothèse de stationnarité requise est plus forte que dans le cas du krigeage ordinaire. Dans le cas du krigeage ordinaire, seule l'hypothèse intrinsèque est requise. Dans le cas du krigeage simple, la stationnarité est nécessaire. Ainsi, il n'est pas possible d'effectuer un krigeage simple si le variogramme ne présente pas de palier.

- Le système de krigeage simple (KS) ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes puisqu'on n'a pas $\sum \lambda_i = 1$.
- En termes pratiques, les estimés obtenus par krigeage ordinaire (KO) et simple (KS) sont très similaires lorsqu'on effectue le krigeage à courte distance par rapport aux points connus et par rapport à la portée du variogramme et que le variogramme montre une structure importante. Lorsqu'on effectue l'estimation à grande distance ou si le variogramme montre un effet de pépite plus important, alors l'estimation KO consistera essentiellement en une moyenne des points du voisinage et l'estime KS sera simplement la moyenne supposée connue, i.e. "m".
- Règle générale, le KO est préférable au KS. Dans certaines applications telles le krigeage d'indicateurs et les simulations il est préférable de recourir au KS.

5.3 Quelques cas très simples de krigeage

Ces quelques cas sont présentés dans le seul but d'acquérir une certaine intuition du comportement du krigeage. On suppose un variogramme sphérique de portée finie "a".

i. Estimation d'un point par un autre point situé à une distance "h"

Krigeage ordinaire :

$$\lambda_1 = 1, \quad \sigma_{k_o}^2 = 2(\sigma^2 - C(h)) = 2\gamma(h) \quad (\text{Note si } h > a, \sigma_{k_o}^2 = 2\sigma^2)$$

Krigeage simple:

$$\lambda_1 = \frac{C(h)}{\sigma^2}, \quad \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2 - \frac{C(h)^2}{\sigma^2} \quad (\text{Note si } h > a, \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2)$$

Remarque: Il est possible d'avoir une variance de krigeage ordinaire supérieure à la variance théorique de la variable étudiée!

ii. Estimation d'un bloc "v" par un point situé en "x₁".

Krigeage ordinaire :

$$\lambda_1 = 1, \quad \sigma_{k_o}^2 = \sigma^2 + \sigma_v^2 - 2\bar{C}(v, x_1)$$

Krigeage simple :

$$\lambda_1 = \frac{\bar{C}(v, x_1)}{\sigma^2}, \quad \sigma_{k_s}^2 = \sigma_v^2 - \frac{\bar{C}(v, x_1)^2}{\sigma^2}$$

iii. Estimation d'un point situé en x₀ par deux points situés en "x₁" et "x₂".

Krigeage ordinaire:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma^2 + C(x_0, x_1) - C(x_1, x_2) - C(x_0, x_2)}{2(\sigma^2 - C(x_1, x_2))}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma^2 + C(x_0, x_2) - C(x_1, x_2) - C(x_0, x_1)}{2(\sigma^2 - C(x_1, x_2))}$$

Krigeage simple:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma^2 * C(x_0, x_1) - C(x_1, x_2) * C(x_0, x_2)}{(\sigma^2)^2 - (C(x_1, x_2))^2}, \lambda_2 = \frac{\sigma^2 * C(x_0, x_2) - C(x_1, x_2) * C(x_0, x_1)}{(\sigma^2)^2 - (C(x_1, x_2))^2}$$

Note: dans les deux cas, les poids peuvent être négatifs dépendant de la position respective des trois points. Dans le cas du krigage simple, les poids sont nuls si les 2 points sont à une distance de x_0 supérieure à la portée.

iv. Estimation d'un point par "n" points en présence d'un variogramme effet de pépite pur.

Krigage ordinaire :

$$\lambda_i = \frac{1}{n}, \text{ et } \sigma_{k_o}^2 = \frac{(n+1)}{n} \sigma^2$$

Krigage simple :

$$\lambda_i = 0, \text{ et } \sigma_{k_s}^2 = \sigma^2$$

5.4 Lien entre krigage simple et krigage ordinaire

On peut démontrer que le krigage ordinaire d'un point ou d'un bloc à partir de "n" points observations peut se décomposer en 2 étapes:

- i. Estimation de la moyenne "m" (inconnue) du processus par krigage ordinaire en utilisant les "n" points.
- ii. Estimation du point ou du bloc par krigage simple en prenant la moyenne estimée par krigage ordinaire comme une moyenne connue et toujours utilisant les mêmes "n" points.

Soit $\lambda_{m,i}$, μ_m et $\sigma_{k_o,m}^2$ les poids de krigage ordinaire, le multiplicateur de Lagrange et la variance de krigage ordinaire obtenus pour l'estimation de la moyenne. Soit $\lambda_{o,i}$ et μ les poids et le multiplicateur de Lagrange pour le krigage ordinaire du point ou bloc, $\lambda_{s,i}$ les poids de krigage simple et $S_s = (1 - \sum_i \lambda_{s,i})$

le poids attribué à la moyenne dans le krigage simple. On a alors les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda_{o,i} &= \lambda_{s,i} + S_s \lambda_{m,i} \\ \mu &= S_s \mu_m \\ \sigma_{k_o}^2 &= \sigma_{k_s}^2 + S_s^2 \sigma_{k_o,m}^2 \end{aligned}$$

- Lorsque les données sont abondantes et que la structure spatiale est forte, alors le poids attribué à la moyenne dans le krigage simple, S_s , est faible et conséquemment les poids de krigage ordinaire et simple de même que les variances de krigage ordinaire et simple sont presque égaux.
- Lorsque les données sont peu abondantes (loin du point ou bloc à estimer) ou que la structure est faible, alors le poids accordé à la moyenne dans le krigage simple, S_s , augmente. Les poids de krigage ordinaire et simple diffèrent davantage et la variance de krigage ordinaire augmente par rapport à celle de krigage simple. Ceci reflète la difficulté accrue d'estimer la moyenne étant donné le peu d'information disponible.

- Les krigeages simples ou ordinaire fournissent donc des estimations similaires dans les zones fortement échantillonnées. Dans les zones sous échantillonnées, le krigeage simple attribue un poids important à la moyenne globale supposée connue, alors que le krigeage ordinaire attribue le même poids à une moyenne estimée localement. Cette plus grande flexibilité du KO en fait habituellement la méthode de choix. Comme la moyenne est constamment réestimée localement (utilisant les points retenus pour le krigeage), l'hypothèse de stationnarité requise pour ce krigeage est moindre (il suffit que la moyenne soit localement constante et non globalement comme pour le KS).

Exemple: Considérons en 1D un variogramme sphérique de palier 2 et de portée 10 et trois points x_0 , x_1 et x_2 situés respectivement en $x=0$, $x=3$ et $x=4$. On veut estimer la teneur au point x_0 à partir des 2 autres points.

On trouve : $\sigma^2 = 2$, $C(1,2)=1.701$, $C(1,0)=1.127$, $C(2,0)=0.864$

Appliquant les relations précédentes (voir 5.3 iii.), on trouve:

$$\begin{array}{ll} \lambda_{o,1} = 0.9398 & \lambda_{s,1} = 0.7088 \\ \lambda_{o,2} = 0.0602 & \lambda_{s,2} = -0.1708 \text{ et donc } S_s = (1 - 0.7088 - (-0.1708)) = 0.462 \\ \text{KO: } \mu = -0.855 & \sigma_{ks}^2 = 1.3488 \\ \sigma_{ko}^2 = 1.7438 & \end{array}$$

Si l'on estime la moyenne par krigeage ordinaire, l'on trouve les poids suivants (note le système de krigeage demeure le même sauf pour le membre de droite pour lequel toutes les covariances deviennent 0):

$$\begin{array}{l} \lambda_{m,1} = 0.5 \\ \lambda_{m,2} = 0.5 \\ \mu_m = -1.8505 \\ \sigma_{ko,m}^2 = 1.8505 \end{array}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$0.7088 + 0.462 * 0.5 = 0.9398 = \lambda_{o,1} \text{ et } -0.1708 + 0.462 * 0.5 = 0.0602 = \lambda_{o,2}$$

de même:

$$0.462 * -1.8505 = -0.855 \text{ (multiplicateur de Lagrange du KO)}$$

et

$$1.3488 + 0.462^2 * 1.8505 = 1.7438 \text{ (variance de krigeage du KO)}$$

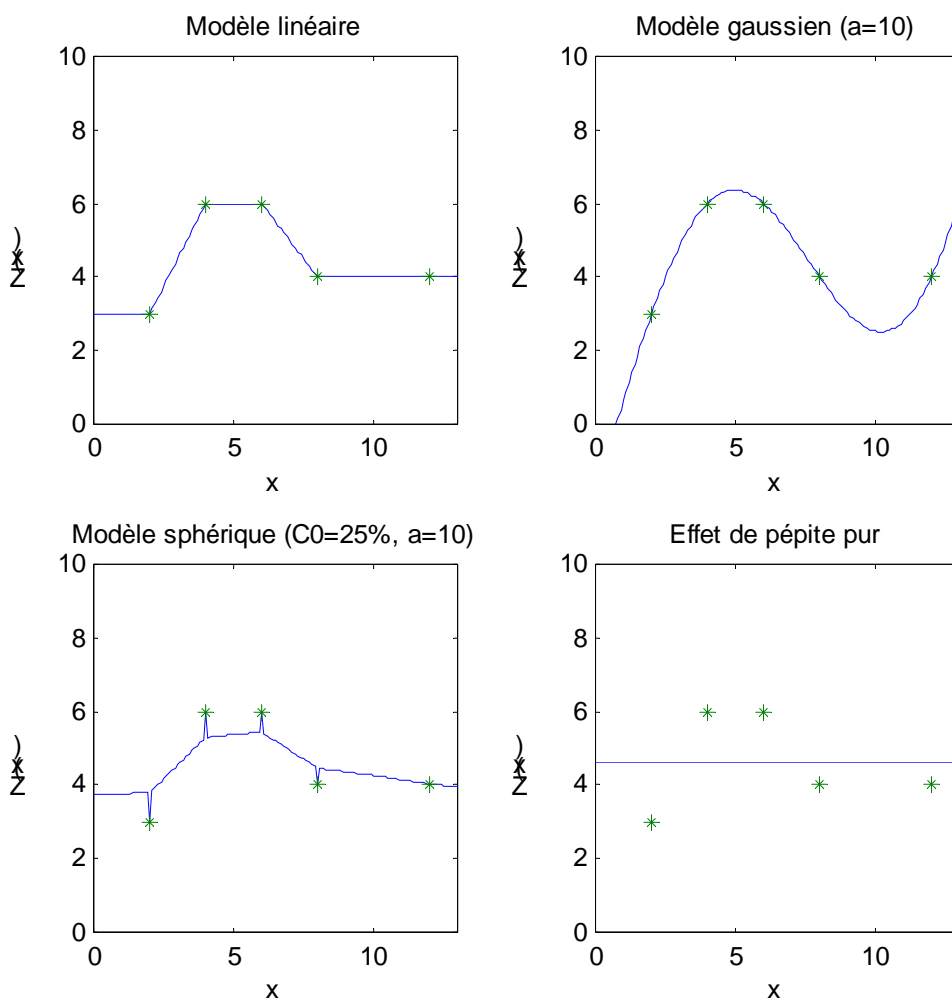
5.5 Propriétés du krigage

Les principales propriétés et caractéristiques associées au krigage sont:

- i. Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.
- ii. Interpolateur exact. : si l'on estime un point connu, on retrouve la valeur connue.
- iii. Présente un effet d'écran: les points les plus près reçoivent les poids les plus importants. Cet effet d'écran varie selon la configuration et selon le modèle de variogramme utilisé pour le krigage. Plus l'effet de pépité est important, moins il y a d'effet d'écran.
- iv. Tient compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux.
- v. Par l'utilisation du variogramme, tient compte de la continuité du phénomène étudié (effet de pépité, anisotropie, etc.).
- vi. Effectue généralement un lissage, i.e. les estimations sont moins variables que les teneurs réelles (point ou bloc) que l'on cherche à estimer.
- vii. Presque sans biais conditionnel. Ceci signifie que lorsqu'on applique une teneur de coupure à des valeurs estimées, on récupérera approximativement la teneur prévue. C'est une propriété très importante pour les mines. Cette propriété implique que l'estimateur utilisé soit plus lisse que la valeur qu'il cherche à estimer, ce qui est le cas pour le krigage.
- viii. Transitif. Si l'on observe en un point une valeur coïncidant avec la valeur krigée pour ce point, alors les valeurs krigées en d'autres points ne sont pas modifiées par l'inclusion de ce nouveau point dans les krigages. Par contre les variances de krigage, elles, sont diminuées. De même, si l'on krigé un certain nombre de points et que l'on utilise les valeurs krigées comme si c'étaient de nouvelles données, alors les krigages subséquents ne s'en trouvent pas modifiés (sauf pour la variance de krigage).

INTERPOLATEUR EXACT

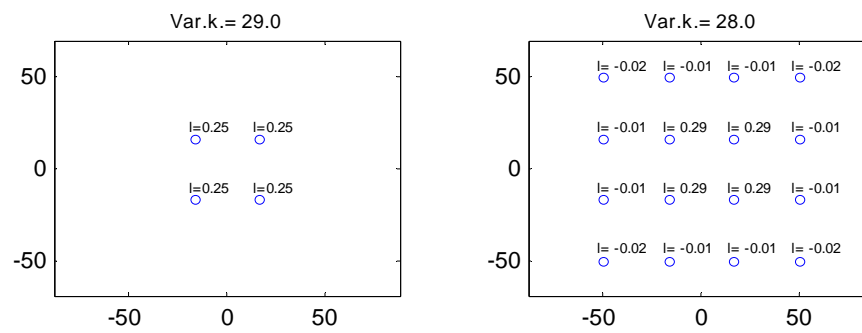
Exemples d'interpolation par krigeage en 1D, utilisant différents modèles de variogrammes:



Note: Aux points échantillons, le krigeage retourne la valeur de l'échantillon. Pour éviter les discontinuités dans des cartes il est donc recommandé de ne pas kriger un point échantillon. En somme, on s'assure d'avoir au moins une distance "epsilon" entre le point à kriger et le point échantillon. Comme souvent l'effet de pépité représente une erreur de mesure, il est justifié de s'écarter des valeurs observées.

EFFET D'ÉCRAN

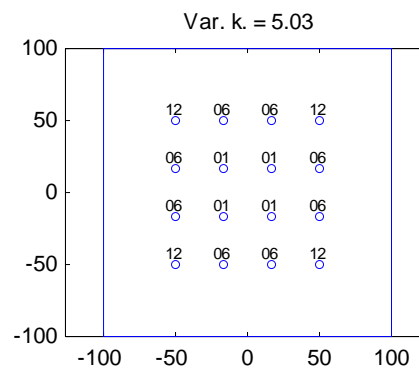
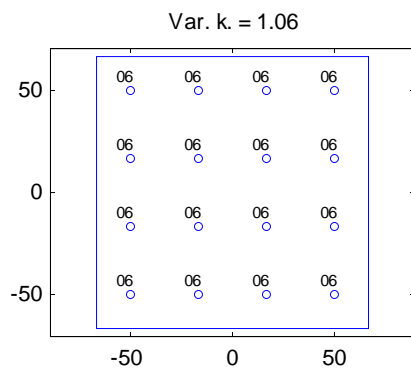
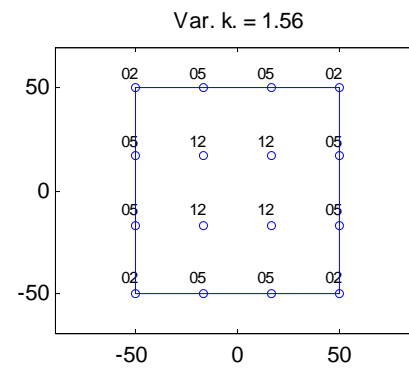
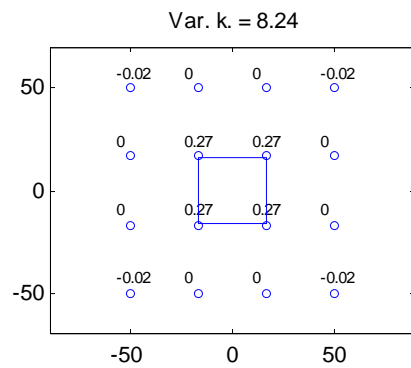
- Cas extrême : modèle linéaire en 1-D
- Diminue lorsque l'effet de pépite augmente
(il n'y a pas d'effet d'écran lorsqu'on a un effet de pépite pur)
- Permet de limiter les systèmes de krigeage aux observations avoisinantes (voisinages glissants)

Variogramme sphérique; $C=100$, $a=100$, $C0=0$ 

INFLUENCE DE LA TAILLE DU CHAMP

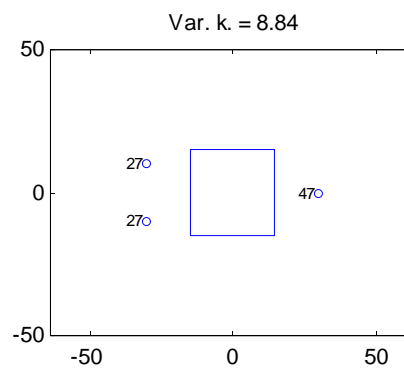
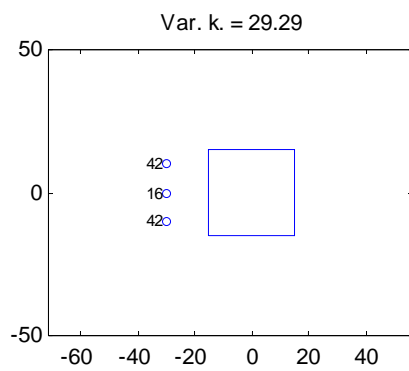
Lorsque la taille du champ estimé augmente,

- Les poids tendent à devenir égaux
- La variance d'estimation diminue puis augmente si on cherche à estimer un champ plus grand que celui renfermant les données (extrapolation)



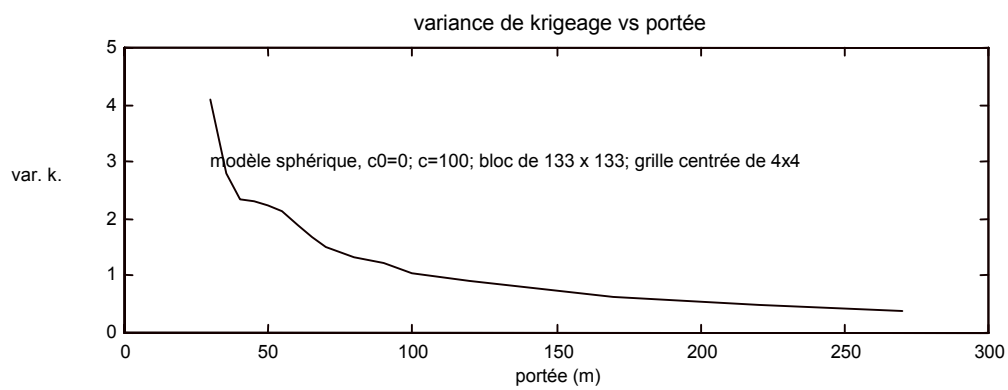
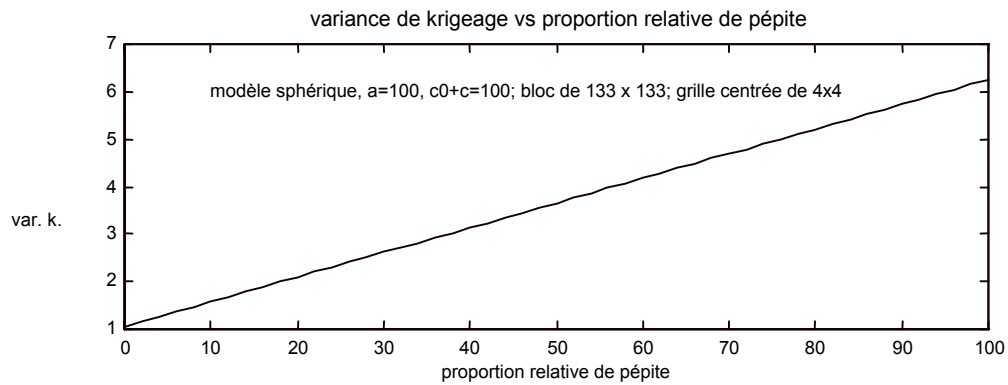
POSITION DES POINTS ENTRE EUX

Contrairement aux méthodes de type "inverse de la distance", la position des points entre eux est très importante. Chaque point est pondéré automatiquement en fonction de sa "zone d'influence". (Les poids par inverse de la distance auraient été $1/3$ pour chaque point dans les 2 cas). (Toujours variogramme sphérique avec $a=100$, $C=100$, $C_0=0$).



INFLUENCE DE L'EFFET DE PÉPITE ET DE LA PORTÉE

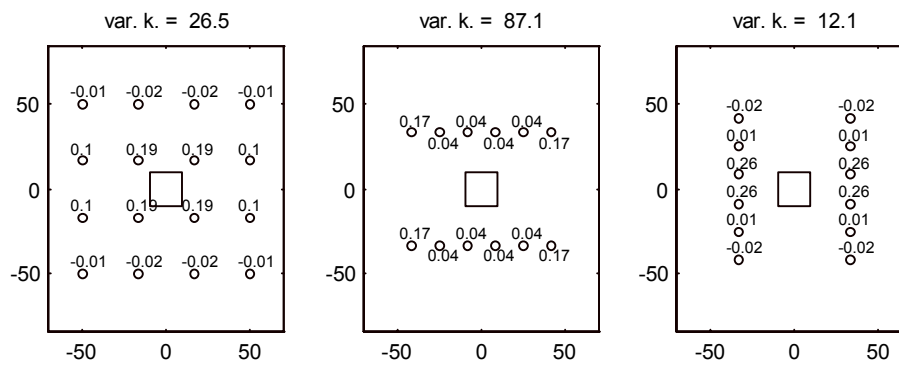
Plus l'effet de pépité est important (relativement à un plateau fixe), plus la variance d'estimation augmente. Inversement, plus la portée augmente, plus la variance d'estimation diminue.



INFLUENCE D'ANISOTROPIES

On doit adapter l'échantillonnage en augmentant la densité d'échantillonnage dans la direction de plus faible portée.

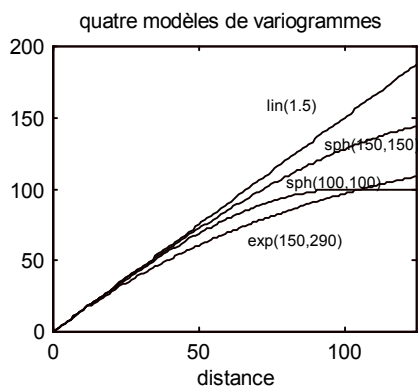
Dans cet exemple, le modèle est sphérique avec $C_0=0$; $C=100$ et $a_x=200$ et $a_y=50$. Les 3 exemples ci-contre correspondent à une même densité d'échantillonnage (1 échantillon par surface de 33×33 unités). Pour le même coût d'échantillonnage on peut donc obtenir des estimations beaucoup plus précises si l'on ajuste la stratégie d'échantillonnage à l'anisotropie.



INFLUENCE DU CHOIX DU MODÈLE

Le choix du modèle a peu d'influence sur les résultats du krigeage pour autant que chaque modèle fournisse un ajustement équivalent pour les courtes distances. Ici, le champ fait 100m x 100m et chaque point est espacé de 33.3m. On estime le point au centre de la grille. Les modèles théoriques fournissent à peu près les mêmes valeurs pour les distances de 0 à 25m, or les points centraux, recevant les poids les plus élevés, sont à 24m du point à estimer.

| | | | |
|-------------|-------------|---|---|
| λ_1 | λ_2 | | |
| + | + | + | + |
| | λ_3 | | |
| + | + | + | + |
| | | • | |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |



| | | | |
|--------------|---|---------------------|---|
| Sphérique: | C=100 a=100m $\lambda_1=-.02$ $\lambda_2=-.01$ $\lambda_3=.29$ $\sigma_k^2=28.0$ | Sphérique: | C=150 a=150m $\lambda_1=-.01$ $\lambda_2=-.01$ $\lambda_3=.29$ $\sigma_k^2=27.8$ |
| Exponentiel: | C=150 a=290m $\lambda_1=-.01$ $\lambda_2=-.01$ $\lambda_3=.28$ $\sigma_k^2=28.2$ | Linéaire: Pente=1.5 | $\lambda_1=-.01$ $\lambda_2=-.01$ $\lambda_3=.28$ $\sigma_k^2=27.6$ |

EFFET DE LISSAGE

Krigage simple:

Des équations du krigage simple, il découle directement que:

$$\text{Var}(Z_v) = \text{Var}(Z_v^*) + \sigma_{ks}^2$$

Pour "v" fixe, le terme $\text{Var}(Z_v)$ ne dépend pas de la localisation, les termes $\text{Var}(Z_v^*)$ et σ_{ks}^2 , eux, dépendent du bloc considéré et des échantillons disponibles.

Krigage ordinaire:

Des équations du krigage ordinaire, il découle directement que:

$$\text{Var}(Z_v) = \text{Var}(Z_v^*) + \sigma_{ko}^2 + 2\mu$$

Pour "v" fixe, le terme $\text{Var}(Z_v)$ ne dépend pas de la localisation, les termes $\text{Var}(Z_v^*)$ et σ_{ko}^2 et μ , eux, dépendent du bloc considéré et des échantillons disponibles. Normalement, $\sigma_{ko}^2 + 2\mu > 0$, d'où l'effet de lissage annoncé.

Exemple. Considérons un bloc carré de taille 10 x 10 estimé par ses 4 coins. Le variogramme est sphérique avec palier de 1 et portée de 20. L'estimation est faite par krigage ordinaire (poids égaux à 0.25).

Utilisant les abaques, on trouve :

$$\text{Var}(Z_v) = 0.6278$$

$$\sigma_{ko}^2 = 0.1311$$

$$\text{De plus, } \text{Var}(Z_v^*) = 1/16 * (4 * 1 + 8 * 0.3125 + 4 * 0.1161) = 0.4353$$

On trouve en substituant dans les équations de krigage ordinaire $\mu = 0.0307$

$$\text{On a bien. } 0.4353 + 0.1311 + 2 * 0.0307 = 0.6278$$

On peut étendre la relation de lissage aux variances de dispersion des blocs et des valeurs krigées (on suppose que la taille du voisinage utilisée pour le krigage est faible par rapport à la taille du gisement et que le voisinage ne change pas d'un bloc à l'autre):

Krigage simple:

$$D^2(Z_v | G) = \text{Var}(Z_v) - \bar{C}(V, V) = \text{Var}(Z_v^*) - \bar{C}(G, G) + \sigma_{ks}^2 \approx D^2(Z_v^* | G) + \sigma_{ks}^2$$

Krigage ordinaire:

$$D^2(Z_v | G) = \text{Var}(Z_v^*) + \sigma_{ko}^2 + 2\mu - \bar{C}(G, G) \approx D^2(Z_v^* | G) + \sigma_{ko}^2 + 2\mu$$

BIAIS CONDITIONNEL

Considérons la teneur réelle du bloc Z_v et son estimation Z_v^* . Supposons que l'espérance conditionnelle de Z_v étant donné Z_v^* est linéaire (ce sera assuré si les deux suivent une loi binormale). On aura alors:

$$E[Z_v | Z_v^*] = a + bZ_v^*$$

$$\text{où } b = \frac{\text{Cov}(Z_v, Z_v^*)}{\text{Var}(Z_v^*)} \text{ et } a = (1-b)m$$

Krigeage simple

Par construction, on a : $\text{Var}(Z_v^*) = \text{Cov}(Z_v, Z_v^*) \Rightarrow b = 1, a = 0$

Conséquemment,

$$E[Z_v | Z_v^*] = Z_v^*$$

ce qui démontre que dans ce cas on retire en moyenne ce que l'on a prévu (absence de biais conditionnel).

Krigeage ordinaire

Par construction on a alors:

$$\text{Var}(Z_v^*) + \mu = \text{Cov}(Z_v, Z_v^*) \Rightarrow b = 1 + \frac{\mu}{\text{Var}(Z_v^*)}, a = \frac{-\mu}{\text{Var}(Z_v^*)}$$

Conséquemment,

$$E[Z_v | Z_v^*] = Z_v^* + \frac{\mu}{\text{Var}(Z_v^*)} (Z_v^* - m)$$

ce qui indique que le krigeage présente un biais conditionnel. Ce biais sera très faible lorsque l'estimation sera précise (faible variance de krigeage et multiplicateur de Lagrange près de zéro, forte $\text{Var}(Z_v^*)$).

Généralement, le multiplicateur de Lagrange est légèrement négatif, ce qui implique que la pente de la régression est inférieure à 1. Donc en utilisant les valeurs krigées directement, on surestime légèrement aux fortes teneurs et on sous-estime aux faibles teneurs.

Note : pour l'estimateur par méthode polygonale, l'on a :

$$b = \frac{\text{Cov}(Z_v, Z_v^*)}{\text{Var}(Z_v^*)} = \frac{\text{Cov}(Z_v, Z_i)}{\sigma^2} < 1$$

cet estimateur présente un biais conditionnel qui sera d'autant plus important que le point utiliser sera éloigné du bloc à estimer.

Remarque: lien entre lissage et biais conditionnel

Comme on l'a vu, on a $b = \frac{\text{Cov}(Z_v, Z_v^*)}{\text{Var}(Z_v^*)}$

On peut réécrire cela comme: $b = \frac{\rho \sigma_v \sigma_v^*}{\text{Var}(Z_v^*)} = \frac{\rho \sigma_v}{\sigma_v^*}$

ρ est le coefficient de corrélation entre Z_v et Z_v^* et est nécessairement inférieur (ou égal) à 1 et $\sigma_v^* = \text{Var}(Z_v^*)^{0.5}$. Pour que $b=1$, il faut donc obligatoirement que l'on ait $\sigma_v^* \leq \sigma_v$. On conclut que si un estimateur est plus variable que la quantité qu'il cherche à estimer alors il présente certainement un biais conditionnel (la pente de la régression sera inférieure à 1). C'est, par exemple, le cas pour l'estimateur par méthode polygonale ou la variance des valeurs estimées est égale à la variance des données ponctuelles. Le lissage de l'estimateur (propriété du krigage) est un préalable essentiel à l'absence de biais conditionnel.

5.6 Pratique du krigage

Grille de krigage: Souvent, le krigage est réalisé sur une grille régulière de points ou de blocs.

Dans le cas de points, L'objectif est habituellement de fournir une carte de la variable étudiée. La grille de krigage doit être alors assez dense pour que la carte corresponde effectivement au krigage et non à la méthode particulière (souvent inconnue) utilisée pour tracer les isocontours.

Lorsque des blocs sont estimés, ceux-ci correspondent en général à des unités de sélection (SMU: small mining units) de la mine et leur taille est donc dictée par l'opération. L'objectif peut être d'appliquer une teneur de coupure à ces blocs pour prévoir les ressources du gisement. Toutefois, le nombre de blocs de la grille ne devrait généralement pas dépasser d'un facteur 10 le nombre d'observations dans la zone d'intérêt. En effet, les ressources estimées varient très peu au-delà d'un certain niveau de discrétisation. Passé ce seuil, on augmente considérablement le temps de krigage sans effet réel sur les estimés.

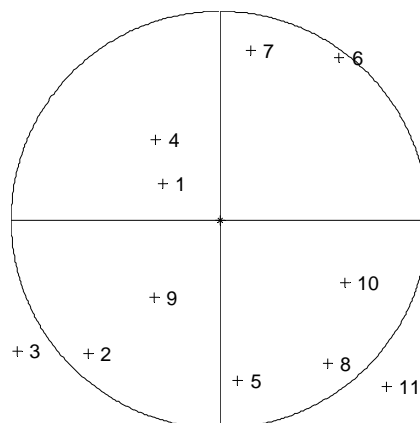
Voisinage utilisé pour le krigage:

- i. Habituellement en voisinages glissants.
- ii. Nombre de points suffisant (>10 ; peut atteindre jusqu'à 50-100).
- iii. Zone de recherche des points assez grande pour assurer un minimum de points dans le krigage.
S'il y a anisotropie, on peut adopter une zone de recherche elliptique parallèle à la direction de meilleure continuité. Toutefois une zone de recherche circulaire peut être suffisante si l'on augmente suffisamment le nombre de points dans le krigage.
- iv. Recherche par quadrants assure une répartition plus uniforme des points (exiger au moins 2 ou 3 points par quadrant)

Exemple: Recherche circulaire avec un maximum de deux points par quadrant.

3 et 11 sont rejetés car en dehors du cercle de recherche.

8 est rejeté car deux autres points sont plus rapprochés du point à estimer dans ce quadrant.



5.7 Validation croisée

Une pratique intéressante pour valider le modèle de variogramme et le voisinage utilisé pour le krigeage consiste à effectuer une validation croisée. Le principe est d'éliminer à tour de rôle chaque observation et de l'estimer à l'aide de ses voisins. En chaque point, on obtient donc une valeur vraie et une valeur estimée que l'on peut comparer pour déterminer si le modèle fournit des estimations se comportant comme prévu, si le voisinage utilisé est adéquat, etc.

Plus précisément, soit Z_i^* l'estimation obtenue par krigeage au point "i" (en enlevant la valeur observée Z_i) ainsi que la variance de krigeage σ_{ki}^2 . On peut définir un résidu $e_i = Z_i - Z_i^*$ et un résidu normalisé $n_i = \frac{e_i}{\sigma_{ki}}$.

Un modèle et un voisinage adéquats devraient fournir:

- i. $\sum_i e_i \approx 0$ et $\sum_i n_i \approx 0$
- ii. $\sum_i |e_i| \min$ ou $\sum_i e_i^2 \min$
- iii. $\left(\frac{1}{n} \sum_i n_i^2 \right)^{0.5} \approx 1$
- iv. Il faut aussi examiner l'histogramme des e_i et des n_i , de même que leur disposition spatiale pour vérifier si les statistiques précédentes pourraient être causées par 1 ou 2 données extrêmes et vérifier si les résidus sont spatialement homogènes.

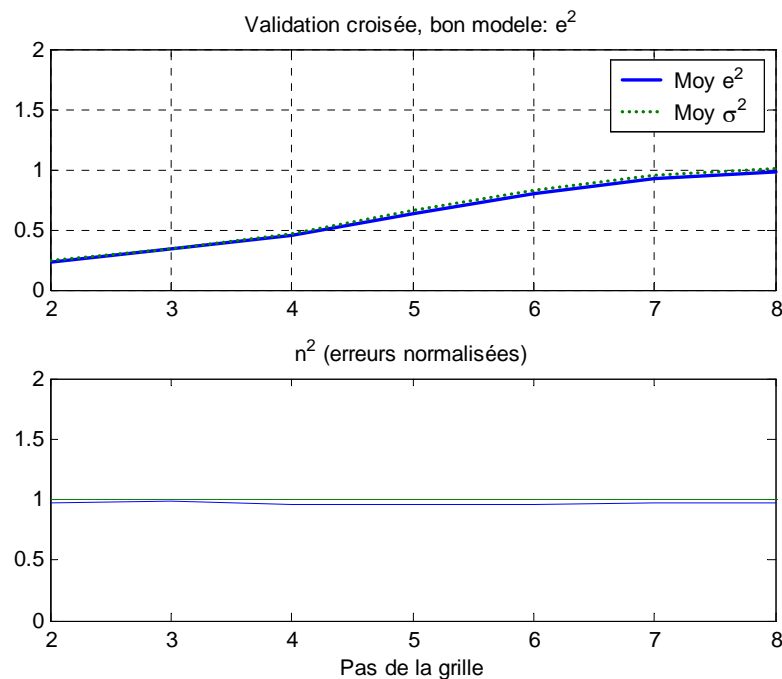
Remarques:

- Dans le krigeage pour la validation croisée, il faut chercher à reproduire autant que possible un contexte d'estimation semblable à celui qui sera utilisé au moment du krigeage proprement dit. Ainsi, si les données proviennent de forages, on n'utilisera pas tous les voisins du point à estimer car lorsqu'on estimera un bloc, les observations montreront des distances supérieures, par rapport au bloc, à celles rencontrées le long d'un forage. On devrait donc, pour estimer un point d'un forage, éviter d'utiliser des observations du même forage. Également, on devrait éviter d'inclure les points de la périphérie qui se trouvent alors estimés en situation d'extrapolation. On peut les repérer assez facilement à l'aide des variances de krigeage qui seront supérieures pour ces points.
- Les statistiques précédentes sont assez peu sensibles à des changements mineurs de voisinage ou de modèle de variogramme. Il faut les utiliser en conjonction avec le variogramme expérimental.
- Pour choisir entre 2 modèles, les statistiques des erreurs brutes sont préférables. On peut ensuite ajuster ce modèle, par exemple en multipliant le variogramme par une constante (C_0 et C). Dans ce cas les estimations ne changent pas mais les variances de krigeage sont multipliées par cette constante. Si la statistique des résidus normalisés, en (iii), est trop élevée, alors on doit utiliser un variogramme montrant moins de structure (i.e. fournissant une plus grande variance de krigeage).

Illustration de la validation croisée

Les 4 figures suivantes montrent les résultats de simulation effectuées pour 1600 points (40 x 40) à des pas variables (abscisse sur les graphes). En ordonnée, on retrouve dans la figure du haut la moyenne des erreurs de krigeage (par validation) au carré et la moyenne des variances de krigeage. Dans la figure du bas on a la moyenne des erreurs de krigeage normalisées par la variance de krigeage. Tous les krigeages sont effectués avec 50 voisins. Le véritable modèle utilisé pour la simulation est sphérique avec $a=10$ ($C_0=0$) pour les 3 premières figures et un effet de pépite pur pour la dernière. Dans tous les cas, la variance des données simulées est 1.

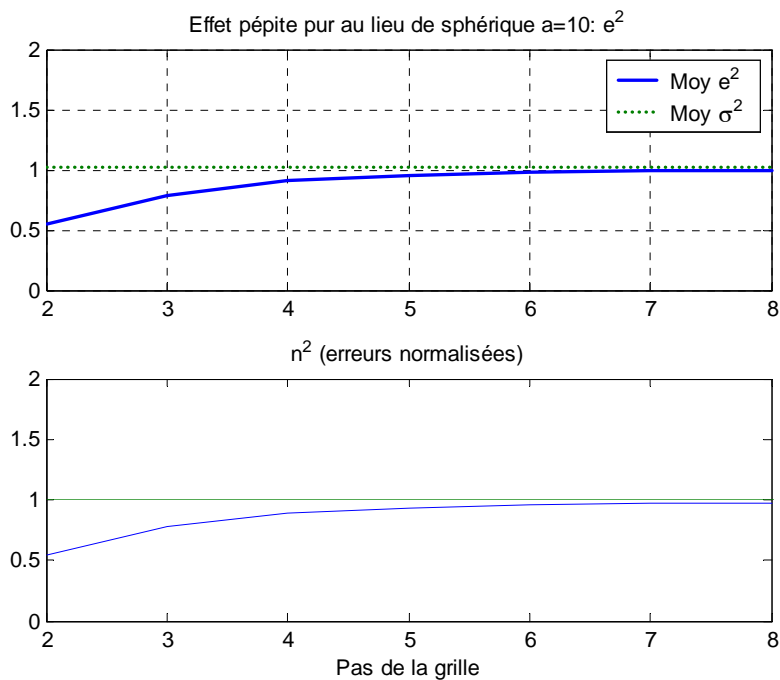
Figure 1 : le krigeage est effectué avec le bon modèle.



On note :

- la variance de krigeage prédit parfaitement la précision accrue due à une grille plus resserrée;
- les erreurs normalisées ont une variance de 1 comme prévu.

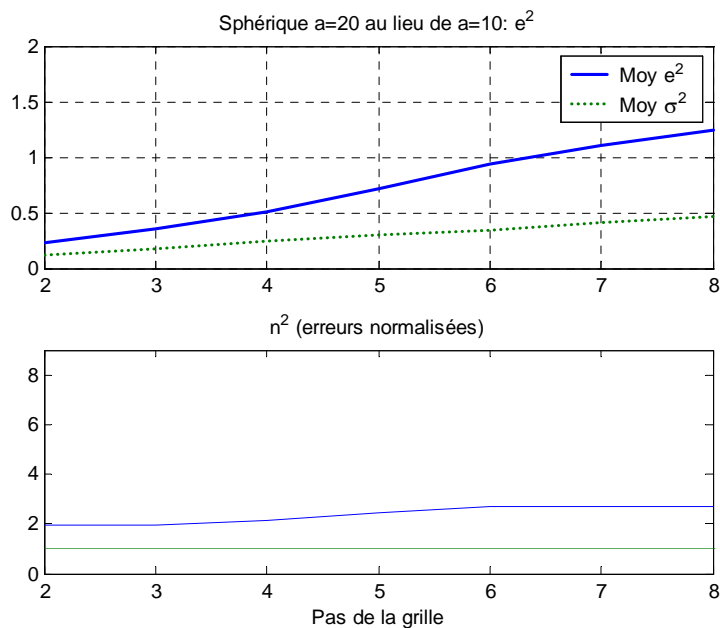
Figure 2 : On a fourni un modèle trop pessimiste (effet de pépité pur) au lieu du vrai modèle :



On note :

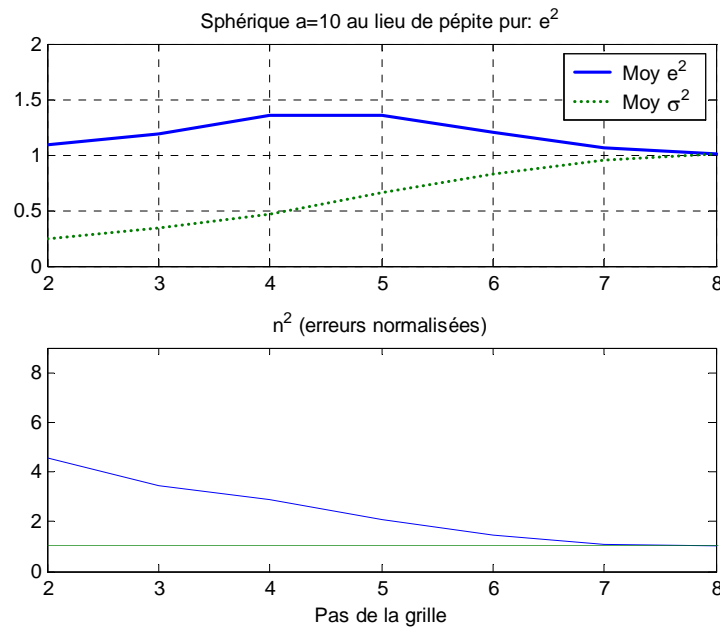
- pour la grille espacée (pas de 6 à 8), la structure est faible et la variance de krigeage prédit assez bien la précision obtenue;
- pour les grilles serrées (2 à 4), la variance de krigeage est supérieure à la variance des erreurs (vue pessimiste) ce qui résulte en une variance des erreurs normalisées inférieure à 1.

Figure 3 : On a fourni un modèle trop optimiste par rapport à la réalité de la simulation (a=20 au lieu de a=10)



On note que la variance de krigeage sous-estime la variance des erreurs (vue optimiste); la variance des erreurs normalisées est donc supérieure à 1.

Figure 4 : On a fourni un modèle trop optimiste par rapport à la réalité (sphérique avec $a=10$ fourni vs réalité : effet de pépité pur)



On note :

- la variance des erreurs augmente puis décroît en fonction du pas de la grille;
- bien qu'une grille au pas 4 représente 4 fois plus d'échantillons qu'une grille au pas 8, la variance des erreurs est supérieure. En spécifiant le mauvais modèle, on ne profite pas de l'information accrue disponible. Il peut donc être assez dangereux de fournir un modèle exagérément optimiste. L'explication pour la détérioration de la précision est que les poids de krigeage présentent un fort effet d'écran lorsqu'ils sont près du point à estimer (grille serrée) et que l'on se trouve donc à faire une moyenne sur quelques points seulement au lieu des 50 points lorsque la grille est assez espacée pour que les corrélations (et l'effet d'écran) soient faibles.
- la variance des erreurs normalisées est nettement supérieure à 1, indiquant que le modèle est exagérément optimiste

Autres mesures de validation

- i. La variance expérimentale des teneurs (i.e. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (Z_i - \bar{Z})^2$) devrait être égale à la variance de dispersion d'un point dans le gisement $D^2(\bullet|G)$.
- ii. La relation de lissage du krigeage (voir section 5.3) fournit naturellement un outil de validation du modèle. Une fois le modèle fixé, on peut calculer les variances de bloc pour différentes tailles de bloc. On peut également réaliser les krigeages pour différentes tailles de bloc et calculer la variance expérimentale des

valeurs krigées ($\hat{\sigma}_{Z_v}^*$) les moyennes des multiplicateurs de Lagrange ($\bar{\mu}$) et des variances de krigage $\bar{\sigma}_{ko}^2$.

On devrait alors avoir: $\hat{\sigma}_{Z_v}^* \approx D^2(Z_v | G) - \bar{\sigma}_{ko}^2 - 2\bar{\mu}$.

5.8 Exemple numérique de krigage

Soit les points suivants:

x_1
 $x_2 \quad x_0 \quad x_3$

$$x_1=(0,1)Z_1=9$$

$$x_2=(0,0)Z_2=3$$

$$x_3=(3,0)Z_3=4$$

On veut estimer le point x_0 situé à $(1,0)$. Supposons que l'on a un modèle sphérique, avec effet de pépite 1, palier 11 et portée 3. On calcule d'abord les distances entre toutes les paires de points:

h

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_0 | 0 | 1.4 | 1 | 2 |
| x_1 | 1.4 | 0 | 1 | 3.2 |
| x_2 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| x_3 | 2 | 3.2 | 3 | 0 |

On évalue le variogramme sphérique à chacune de ces distances avec l'équation:

$$\begin{aligned}
 \gamma_h &= 0 \text{ si } h = 0 \\
 \gamma_h &= 1 + 10 \left[1.5 \frac{h}{3} - 0.5 \left(\frac{h}{3} \right)^3 \right] \text{ si } 0 < h \leq 3 \\
 &= 11 \quad h > 3
 \end{aligned}$$

$\gamma(h)$

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_0 | 0 | 7.55 | 5.81 | 9.52 |
| x_1 | 7.55 | 0 | 5.81 | 11 |
| x_2 | 5.81 | 5.81 | 0 | 11 |
| x_3 | 9.52 | 11 | 11 | 0 |

On calcule la covariance correspondante

$$C(h)=11-\gamma(h)$$

| | x ₀ | x ₁ | x ₂ | x ₃ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x ₀ | 11.0 | 3.45 | 5.19 | 1.48 |
| x ₁ | 3.45 | 11 | 5.19 | 0 |
| x ₂ | 5.19 | 5.19 | 11 | 0 |
| x ₃ | 1.48 | 0 | 0 | 11 |

Ceci permet de construire le système de krigage:

$$K \lambda = k_0$$

i.e., dans ce cas:

$$\begin{bmatrix} 11 & 5.19 & 0 & 1 \\ 5.19 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.45 \\ 5.19 \\ 1.48 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dont la solution est:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .21 \\ .51 \\ .28 \\ -1.55 \end{bmatrix}$$

L'estimation est alors:

$$\Sigma \lambda_i Z_i = (.21)*9 + (.51)*3 + (.28)*4 = 4.54$$

La variance de krigage est donnée par:

$$\sigma_{k_0}^2 = 11 - \lambda' k_0 = 8.76$$

$$\text{Note: } \lambda' k_0 = (.21 * 3.45) + (.51 * 5.19) + (.28 * 1.48) - (1.55 * 1) = 2.24$$