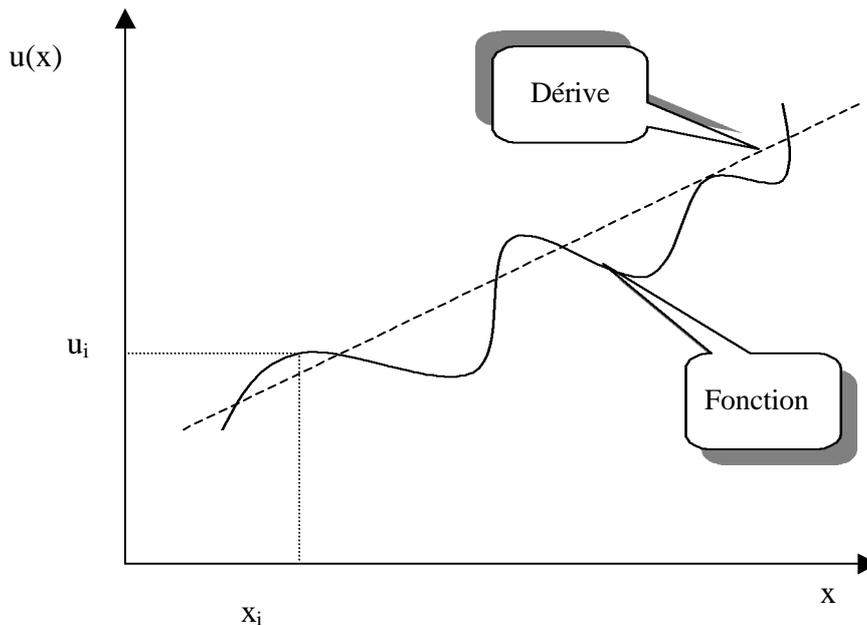


LE KRIGEAGE

Le krigeage est une méthode qui permet de reconstruire, à partir d'une série de mesures d'une entité géométrique ou d'observations d'un phénomène, un modèle mathématique approché du phénomène ou de la forme.



Le principe de la méthode est simple. Tout ensemble d'observations ou mesures peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x) = a(x) + b(x) \quad (2.1)$$

où $a(x)$ est la valeur moyenne de l'échantillon (appelée dérive)
 $b(x)$ est une fonction qui représente les fluctuations (appelée covariance)

Le krigeage va nous permettre de déterminer ces deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$ de façon singulière.

MISE EN PLACE DES ÉQUATIONS DU KRIGEAGE

La première notion importante est celle de valeur moyenne ou d'espérance mathématique $E[\cdot]$. Par exemple, pour un cas discret, soit un échantillon tel que

$$O = \{ O_1, O_2, O_3, O_4, \dots, O_i, \dots, O_n \}$$

alors $E[O] = \sum_{i=1}^n p_i o_i$, où p_i est le poids de o_i ,

ou encore

$$E[O] = \bar{X} = (1/N) \sum_{i=1}^N o_i, \text{ dans le cas de l'équiprobabilité.}$$

Le krigeage est le meilleur estimateur linéaire sans biais. Plusieurs hypothèses sont posées sur la fonction.

Puisque la fonction s'écrit sous la forme $u(x) = a(x) + b(x)$, on pose,

$$a(x) = E[u(x)] \tag{1.1}$$

Où $E[u(x)]$ est l'espérance mathématique de la fonction $u(x)$. On peut alors faire plusieurs hypothèse sur la forme de $a(x)$:

- $a(x) = a_0$, dérive constante
- $a(x) = a_0 + a_1 x$, dérive linéaire
- $a(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x)$, dérive trigonométrique
-

Il faut aussi associer l'espace discrétisé, donc fini, à l'espace réel, infini. Ainsi la fonction $u(x)$ est représentée dans l'espace discrétisé par un ensemble de valeurs en plusieurs points. Ainsi si chacun des points est numéroté de la façon suivante, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ où i varie de 1 à N , le nombre de points utilisés pour représenter $u(x)$, alors on a les relations suivantes :

- $u(x_i) \longrightarrow u_i$
- $\sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i$ (1.2)
- $u(x) \longrightarrow u$

Où les λ_i sont des coefficients tels que l'approximation la fonction $u(x)$ dans ce nouvel espace s'obtient par la relation suivante :

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i) \tag{1.3}$$

En appliquant l'espérance mathématique à cette expression, on trouve,

$$E[u(x)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[u(x_i)] \tag{1.4}$$

Grâce à 1.1, on simplifie le terme de l'espérance mathématique, et on trouve, dans le cas où on aurait fixé $a(x)$ à une dérive linéaire :

$$a_0 + a_1 x = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_0 + a_1 x_i) \quad (1.5)$$

Et ce quels que soient a_0 et a_1 . Par conséquent, comme cette égalité doit toujours être vérifiée, on obtient,

$$a_0 \left(1 - \sum_{i=1}^N I_i \right) + a_1 \left(x - \sum_{i=1}^N I_i x_i \right) = 0, \quad (1.6)$$

Ce qui conduit aux deux équations suivantes qui sont les conditions de non-biais pour le krigeage utilisant une dérive linéaire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i &= x \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ces deux équations font partie du système d'équations à résoudre pour le krigeage d'un échantillon. Il est à noter qu'une équation est à ajouter dans le cadre des conditions de non-biais pour chaque ordre supérieur de la dérive. Par exemple, si la dérive choisie est d'ordre 2, une dérive quadratique, alors la condition suivante est à ajouter :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i^2 = x^2 \quad (1.8)$$

Ainsi de suite pour un ordre 3, 4 et plus.

Maintenant, nous devons optimiser les λ_i . Dans ce but, on minimise la demi-variance de l'erreur d'estimation sous les conditions de non-biais,

$$\text{Min} \frac{1}{2} E \left[u(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i) \right]^2 = \text{Min}(\varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N)) \quad (1.9)$$

où $\varepsilon(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ est la demi-variance de l'erreur, avec $\{\lambda_i\}_{i=1}^N \in \mathfrak{R}^N$ tel que

$$E[u(x)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[u(x_i)] \quad (1.4)$$

Le système obtenu est le suivant :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E[u(x_i)u(x_j)] \lambda_j + \mu_0 + \mu_1 x_i = E[u(x)u(x_i)] \quad \text{pour } i \leq i \leq N \quad (1.11)$$

Ce qui correspond à un système de N équations. Les coefficients μ_0 et μ_1 sont les multiplicateurs de Lagrange. Pour le cas de la dérive linéaire, on rajoute les équations de non-biais suivantes,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i &= x \end{aligned} \tag{1.7}$$

Et on obtient un système à (N+2) équations et (N+2) inconnues qui a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E[u(x_i)u(x_j)] \lambda_j + \mu_0 + \mu_1 x_i = E[u(x)u(x_i)], 1 \leq i \leq N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x \end{cases}$$

Soit l'hypothèse intrinsèque du krigeage,

$$E[u(x)u(y)] = K(|x - y|) \tag{1.12}$$

Où la fonction K() est la covariance généralisée. Afin de simplifier l'expression, on admet généralement que

$$h = |x - y| \tag{1.13}$$

Où h désigne la distance euclidienne entre un point situé à x et un autre situé à y.

Il existe plusieurs modèles possibles pour définir la covariance généralisée, les plus courants sont,

$$K(h) = \begin{cases} h \\ h^2 \ln(h) \\ h^3 \end{cases} \tag{1.14}$$

Et sous forme matricielle, le système de krigeage prend la forme suivante, toujours dans le cas d'une dérive linéaire,

