1. Covariances non-stationnaires

1.1. Introduction

Les FAI-k permettent de tenir compte d'une moyenne non-stationnaire. Toutefois, la covariance généralisée est une fonction stationnaire. Ainsi, pour une configuration donnée de points et une certaine covariance généralisée, la variance de krigeage sera la même peu importe que l'on soit dans une partie du domaine où les variations sont fortes ou faibles. Une idée est de découper le domaine en zones homogènes. Cependant cette approche crée des discontinuités entre les zones. De plus, on ne peut tenir compte par cette approche d'une variation graduelle de la structure spatiale.

Higdon (1999) et Paciorek et Schervish (2006) ont développé des modèle de covariances non-stationnaires permettant de résoudre ces problèmes. L'idée repose essentiellement sur l'association d'une fonction noyau à chaque point x_i. Par convolution, on démontre que la covariance entre deux points quelconques x_i et x_j peut alors s'écrire :

$$R^{NS}(x_i, x_j) = |\Sigma_i|^{1/4} \left|\Sigma_j\right|^{1/4} \left|\frac{\Sigma_i + \Sigma_j}{2}\right|^{-1/2} R^S\left(\sqrt{Q_{ij}}\right)) \tag{1}$$

où

$$Q_{ij} = \left(x_i - x_j\right)^T \left(\frac{\Sigma_i + \Sigma_j}{2}\right)^{-1} \left(x_i - x_j\right) \tag{2}$$

R^S est une fonction de corrélation stationnaire qui est définie en toute dimension (i.e. dans R^p pour tout p, ce qui exclut que R soit le modèle sphérique par exemple); Σ_i est une matrice positive définie (et donc nécessairement symmétrique) associée au point x_i. Q_{ij} est la distance de Mahalanobis associée à la matrice de covariance moyenne $\left(\frac{\Sigma_i+\Sigma_j}{2}\right)$. Chaque matrice Σ_i permet une anisotropie distincte pour ce point dans le calcul des distances (incluant portées et rotations). La corrélation non-stationnaire qui en résulte est notée R^{NS}. On passe d'une corrélation non-stationnaire à une covariance non-stationnaire par:

$$C^{NS}(x_i, x_j) = \sigma_i \sigma_j R^{NS}(x_i, x_j) \tag{3}$$

1.2. Exemple

Le calcul de la covariance non-stationnaire est illustré pour un cas 2D. On veut estimer l'épaisseur de mort-terrain au point x_0(450,0) avec 3 données "forages" en x_1(100,0), x_2(600,0), x_3(1000,0), et une donnée "affleurement" x_{out}(500,0). Les paramètres des covariances en ces points sont donnés au tableau suivant et ceux-ci sont considérés être une fonction de la distance à l'affleurement (d).

Paramètres des covariances aux différents points en fonction de la distance à l'affleurement le plus près (d)

Point	d	f(d)	a(d)	C(d)	C0(d)
x_1	400	0	6686	78	9.5
x_2	100	0.067	6246.2	78	8.864
x_3	500	0	6686	78	9.5
x_{out}	0	1	120	78	0
x_0	50	0.629	2553.3	78	3.521

On calcule les covariances avec l'équation 1. Dans cette équation, Σ_i est une matrice diagonale 2x2 avec a_i^2 sur la diagonale et similairement pour Σ_j et où les a_i sont lus dans le tableau 1. Les covariances résultantes sont données au tableau 2.

Covariances non-stationnaires et poids de krigeage

	$C(x_i, x_j)$				$C(x_i, x_0)$	
	x_1	x_2	x_3	x_{out}	x_0	λ
x_1	87.5	72.0322	68.1764	2.5719	48.5711	0.2130
x_2	72.0322	86.8636	73.1542	2.9289	52.9483	0.4861
x_3	68.1764	73.1542	87.5	2.5181	46.6377	0.0880
x_{out}	2.5719	2.9289	2.5181	78	7.1159	0.2129

1.3. *Example: covariance entre x_2 et x_{out}*

On calcule d'abord $Q_{2,out}$ avec l'équation 2:

$$\begin{aligned} Q_{2,out} &= [100, 0]\left(\frac{\begin{bmatrix} 6246.2^2 & 0 \\ 0 & 6246.2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 120^2 & 0 \\ 0 & 120^2 \end{bmatrix}}{2}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 5.1243 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{4}$$

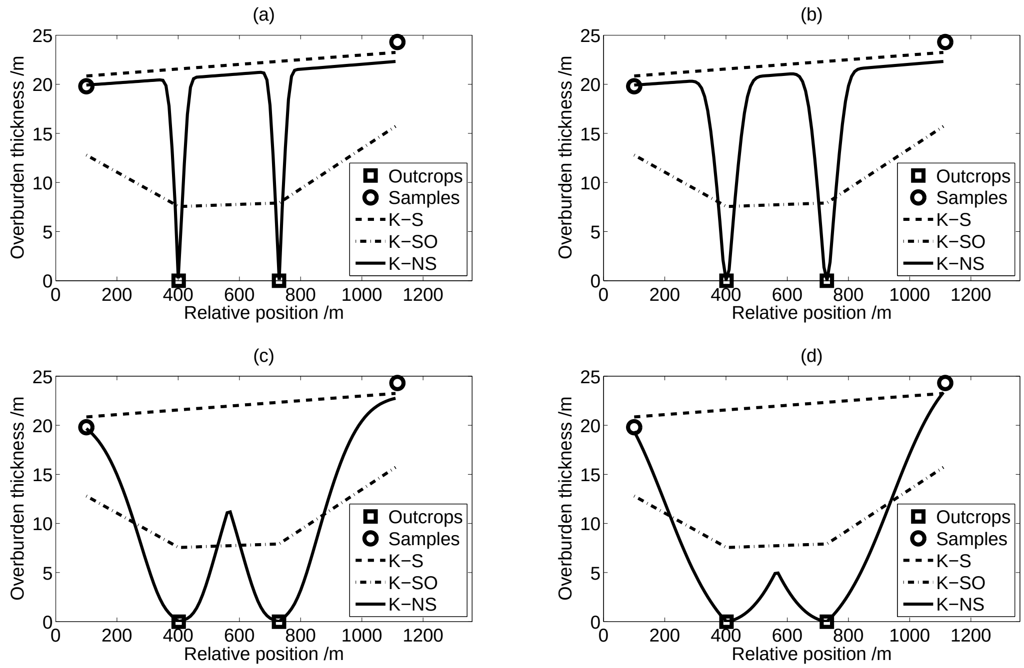
Utilisant l'équation 1 on obtient la corrélation non-stationnaire:

$$\begin{aligned} R^{NS}_{2,out} &= 6246.2 \times 120 \times (5.1243 \times 10^{-8}) \times \exp(-\sqrt{5.1243 \times 10^{-4}} \\ &= 0.0375 \end{aligned} \tag{5}$$

Finalement, on calcule la covariance non-stationnaire:

$$C^{NS}_{2,out} = 0.0375 * \sqrt{(78)(78)} = 2.9289$$

La figure suivante montre un profil d'interpolation pour: i. le cas stationnaire sans tenir compte de deux affleurements (K-S), ii. le cas stationnaire en assignant 0 comme épaisseurs aux deux affleurements (K-S0), et iii. le cas non-stationaire où la covariance varie en fonction de la distance à l'affleurement.



Profils d’épaisseur de mort-terrain avec a_{out} de (a) 60 m, (b) 120 m, (c) 500 m et (d) 1000 m.