### GML6402 Devoir 1 Automne 2024 /12.5

Objectifs : Mettre en application le calcul et la modélisation des variogrammes. Vérifier l’admissibilité de modèles

 Programmer un code simplifié pour le calcul des variogrammes expérimentales.

À remettre le mardi 10 septembre en papier (ou par courriel) avant le début du cours.

1- **1.5 pts** Soit la disposition suivante des données d’une mine montrant l’épaisseur d’une veine minéralisée.



1. **0.5 pts** Calculer le variogramme expérimental pour la distance 10 m dans la direction est-ouest exactement.
2. **0.5 pts** Calculer le variogramme expérimental pour la distance 20 m dans la direction nord-sud.
3. **0.5 pts** Calculer le variogramme omnidirectionnel pour la classe de distance 0 m à 16 m.

|  |
| --- |
|  |

2- 2 **pts** Une variable aléatoire montre le modèle de covariance gaussien donné par : 

1. **0.5 pts** Quelle est l’équation du variogramme correspondant ? Que vaut le variogramme (modèle) pour deux points espacés de 5 m ?
2. **0.5 pts** Quelle est la portée effective de ce modèle (i.e. distance h où C(h)=0.05 C(0))
3. **0.5 pts** Quelle est la variance de la variable aléatoire ?
4. **0.5 pts** Quelle est la corrélation entre les variables aléatoires correspondant à deux points espacés de 5 m ?

3-. **2 pts** Le modèle de covariance linéaire tronqué est défini par l’équation suivante :



On a une grille régulière carrée de 8 x 8 dont la maille est a/. On forme une combinaison linéaire des 64 variables aléatoires correspondant aux noeuds. À chaque noeud, on associe le poids 1 si mod(i+j,2)=0 et -1 si mod(i+j)=1 (voir figure).



a) **0.5 pts** Calculez la variance de cette combinaison linéaire, i.e. .

b) **0.5 pts** Suite au calcul en a), ce modèle de covariance est-il admissible en 2D ?

c) **0.5 pts** En 1D, la transformée de Fourier (continue) du modèle précédent est   (avec i = et *f* la fréquence). On a de plus : . Que concluez-vous quant à l’admissibilité de ce modèle en 1D ?

d) **0.5 pts** La transformée en 2D de la fonction de covariance est illustrée sur la figure suivante (en abscisse la fréquence et en ordonnée l’amplitude). Que concluez-vous?



|  |
| --- |
|  |

4- **1.5 pts** Soit les points illustrés à la figure suivante où l’on a mesuré la teneur en Cu (en %). Le variogramme est sphérique avec C0=0.5%2, C=3%2 et a=100 m.



Utilisant le variogramme fourni (ou la covariance correspondante), calculez :

a) **0.5 pts** Cov(Z1,Z2)

b) **0.5 pts** Var(Z1-Z2)

c) **0.5 pts** Var(Z1+Z2-2Z3)

|  |
| --- |
|  |

5- **1.5 pts** Une compagnie A effectue un relevé bathymétrique dans un chenal marin. Une compagnie B effectue un relevé bathymétrique au même endroit mais selon un patron d’échantillonnage légèrement différent et avec un appareillage différent. Certaines différences sont observées pour les valeurs des deux levés. La compagnie B prétend que son relevé est plus précis que celui de A car elle utilise une procédure de correction instantanée pour l’effet des vagues, ce que A ne fait pas (A utilise toutefois un GPS différentiel).

On vous présente les variogrammes suivants obtenus parallèlement et perpendiculairement au chenal pour les deux compagnies (ronds bleus : A ; carrés rouges : B).

1. **0.5 pts** Discutez du résultat obtenu. Les variogrammes obtenus appuient-ils l’argument de la compagnie B ?
2. **0.5 pts** Diriez-vous que les résultats des 2 compagnies sont également précis (voir note) ? Également justes ? Justifiez.
3. **0.5 pts** Suggérez un modèle 2D de variogramme s’ajustant bien à ces données pour des distances allant jusqu’à 50 m transversalement et longitudinalement.

|  |  |
| --- | --- |
| Longitudinalement | Transversalement |
|  |  |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Aparté : Il faut distinguer les concepts de *précision* et de *justesse* (ou exactitude). La précision d’une mesure indique simplement le caractère reproductible d’une mesure. La justesse (« accuracy » en anglais), signifie que non seulement la mesure est reproductible mais qu’en plus elle ne montre pas de biais par rapport à la vraie valeur inconnue.

Une mesure juste est donc à la fois précise et sans biais, une mesure précise peut être biaisée ou non. En terme mathématique, si l’on définit Yv la vraie valeur inconnue, Ym la valeur moyenne vers laquelle convergeraient un grand nombre de mesures et Y une mesure, on a :



En statistique, on peut développer des modèles qui permettent de prévoir la *précision* d’une mesure (e.g. en géostatistique). Toutefois, on ne dispose pas normalement de modèles pour le biais. C’est une composante que l’on essaye d’éliminer ou de réduire le plus possible en adoptant de bonnes procédures d’échantillonnage.

Il faut finalement distinguer entre le biais de la mesure (à éviter autant que possible) et le biais de nature statistique associé à certains estimateurs qu’il peut parfois être avantageux d’adopter pour permettre des estimations plus précises (i.e. plus reproductibles) que les estimations non-biaisées (ex. en régression on choisit parfois des estimateurs biaisés « ridge regression »).

6- **4 pts** Réalisez une fonction Matlab (ou python) qui reçoit en entrée une matrice de données en 2D (x, y, valeur), la largeur des « bins » pour les distances, une direction et un angle de régularisation et qui retourne le variogramme expérimental pour ces paramètres. La sortie est présentée dans une matrice n\_bin x 3 avec la distance moyenne pour les paires dans le bin, le nombre de paires et la valeur du variogramme expérimental.