

# GML6402A : Géostatistique

Cours 9 : Simulation de faciès et statistique  
d'ordre supérieur



**POLYTECHNIQUE  
MONTREAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

# Objectifs

- Décrire le fonctionnement de la méthode DeeSee;
- Comprendre l'importance des statistiques d'ordre supérieur en géosciences
- Être en mesure de simuler des champs présentant des statistiques d'ordre supérieur



# Plan du cours

1. Simulation multipoints (DeeSee)
2. Statistique d'ordre supérieur
  - Asymétrie de rang
  - Asymétrie directionnelle
  - Moment centré d'ordre supérieur
3. Simulation de statistique d'ordre supérieur
4. Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieur



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

**Motivation :** Fournir des modèles plus réalistes que d'autres techniques ne peuvent réaliser

Trois idées clés pour le multipoints :

1. Les statistiques à deux points ne suffisent pas à décrire les modèles :  
→ Statistiques à points multiples
2. Les données ponctuelles sur le terrain sont insuffisantes :  
→ Ensemble de données d'entraînement / image d'entraînement
3. Modèle statistique analytique non exploitable :  
→ Approche non paramétrique



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Idéologie :

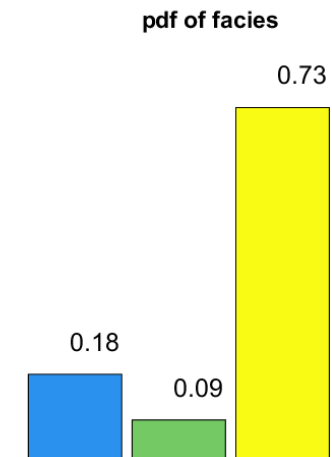
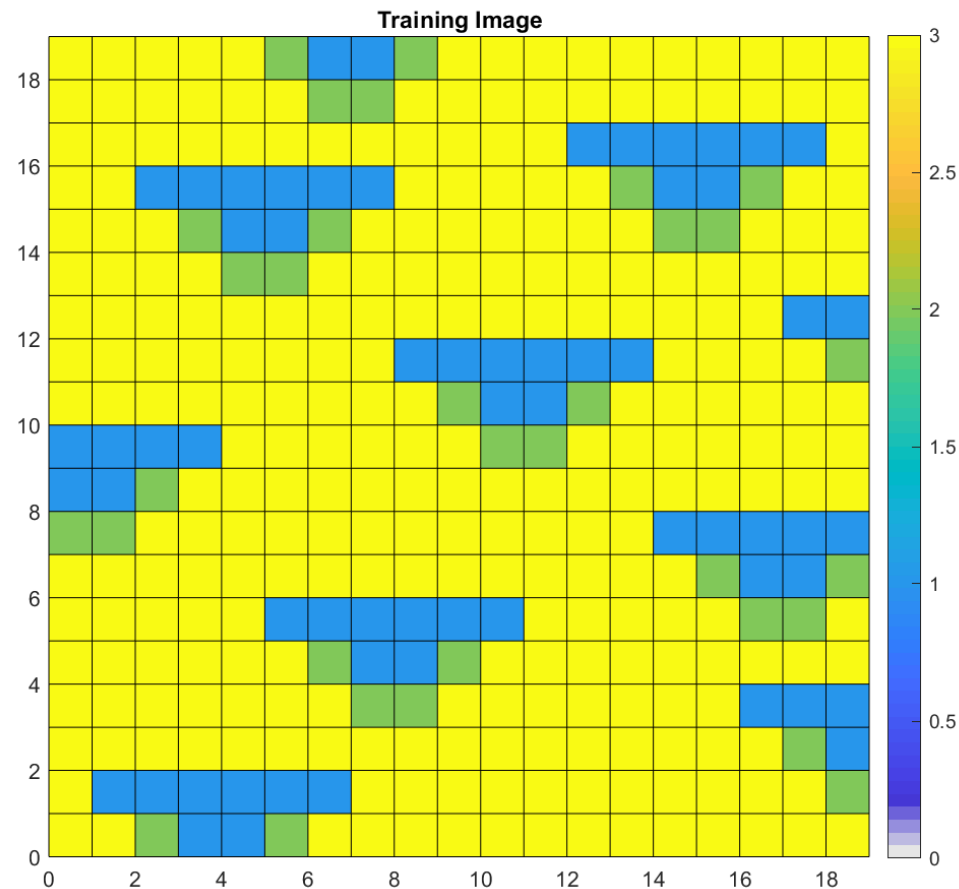
### Échantillonnage direct : DeeSse (Direct Sampling)

- Pas de calcul CPDF
- Masque de recherche flexible
- Pour chaque nœud à simuler
  - I. Obtenir les données de conditionnement au tour du nœud
  - II. Échantillonner aléatoirement une valeur conditionnelle à partir de l'image d'entraînement
  - III. Aller au nœud suivant

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

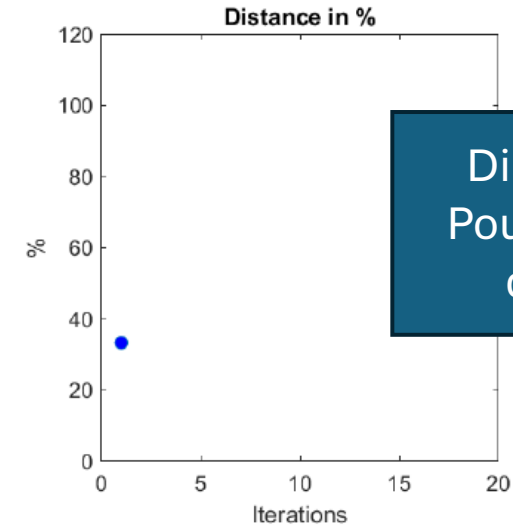
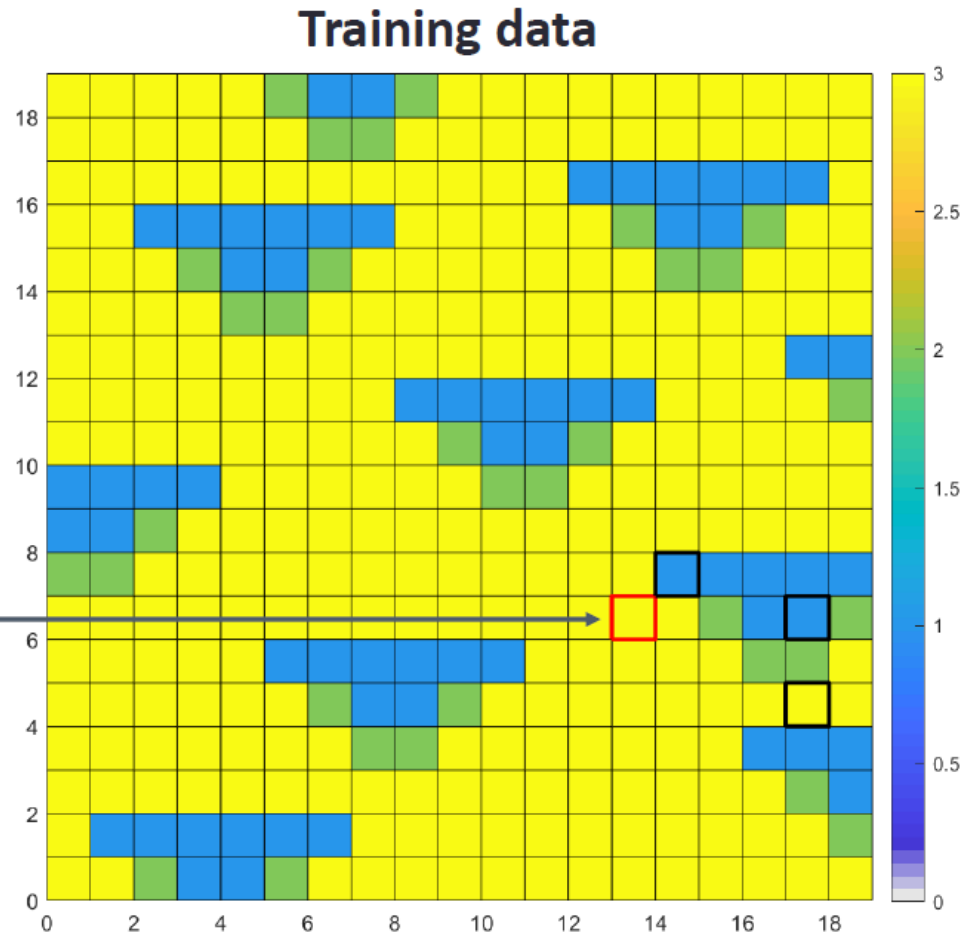
Exemple :

Utiliser des images d'entraînement qui servent de base pour générer des configurations possibles de faciès



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

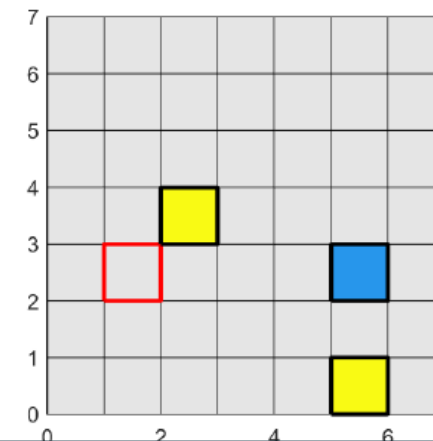
Exemple :



Distance =  
Pourcentage  
d'écart

Choisir une localisation aléatoire, et calculer une distance

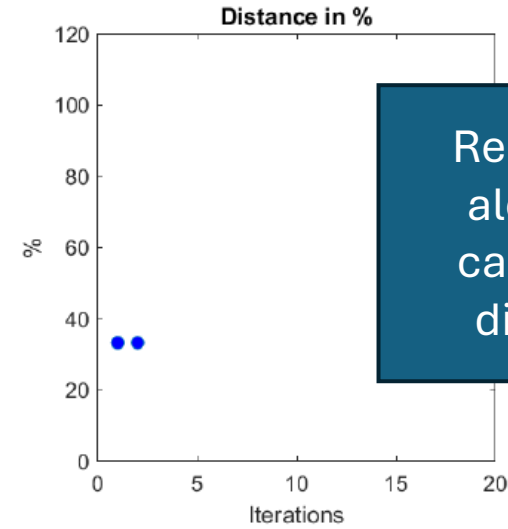
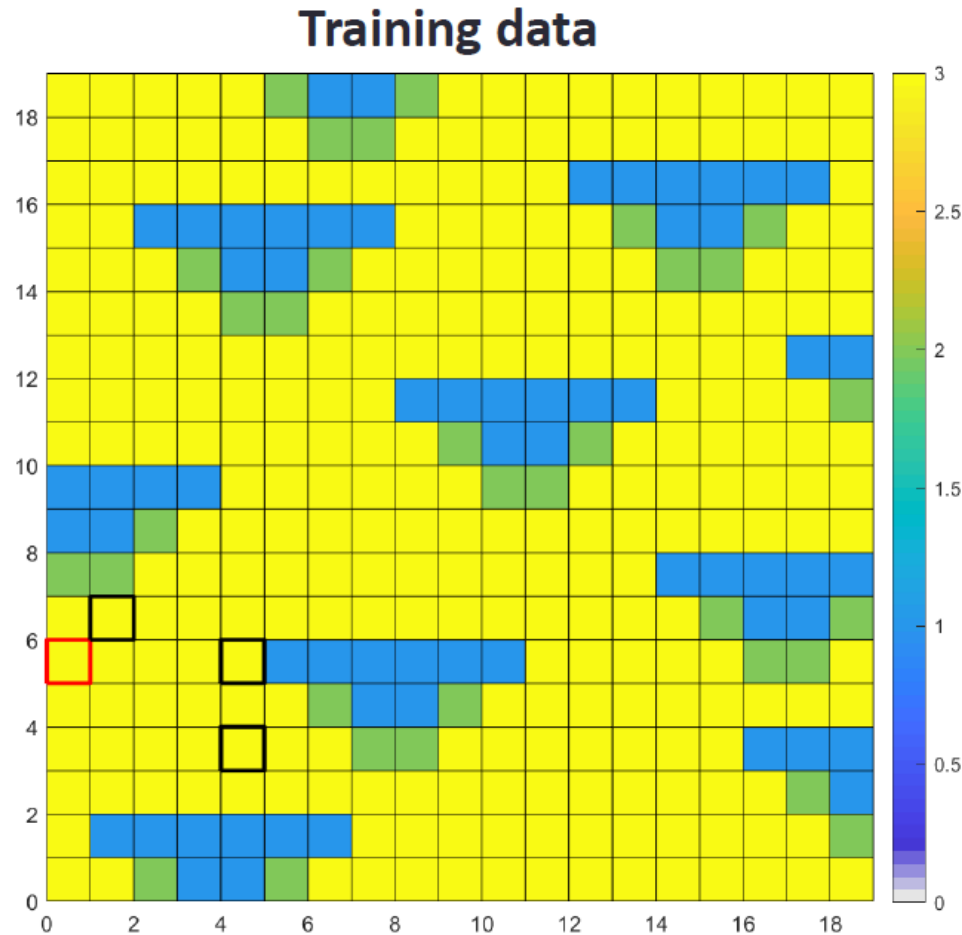
### Simulation grid



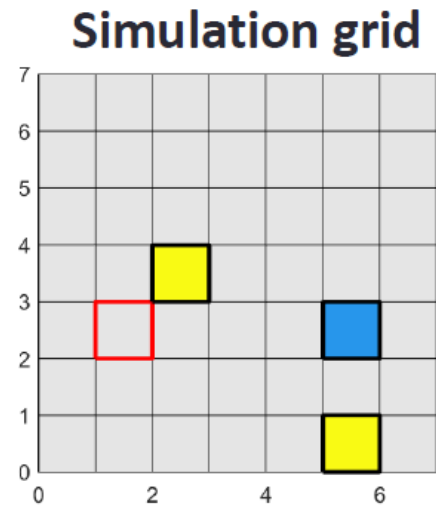
Calculer la distance entre : 1) L'évènement dans la TI et 2) la grille de simulation

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Exemple :



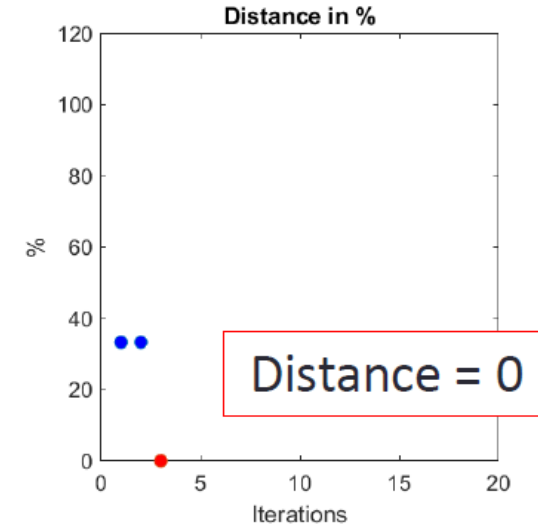
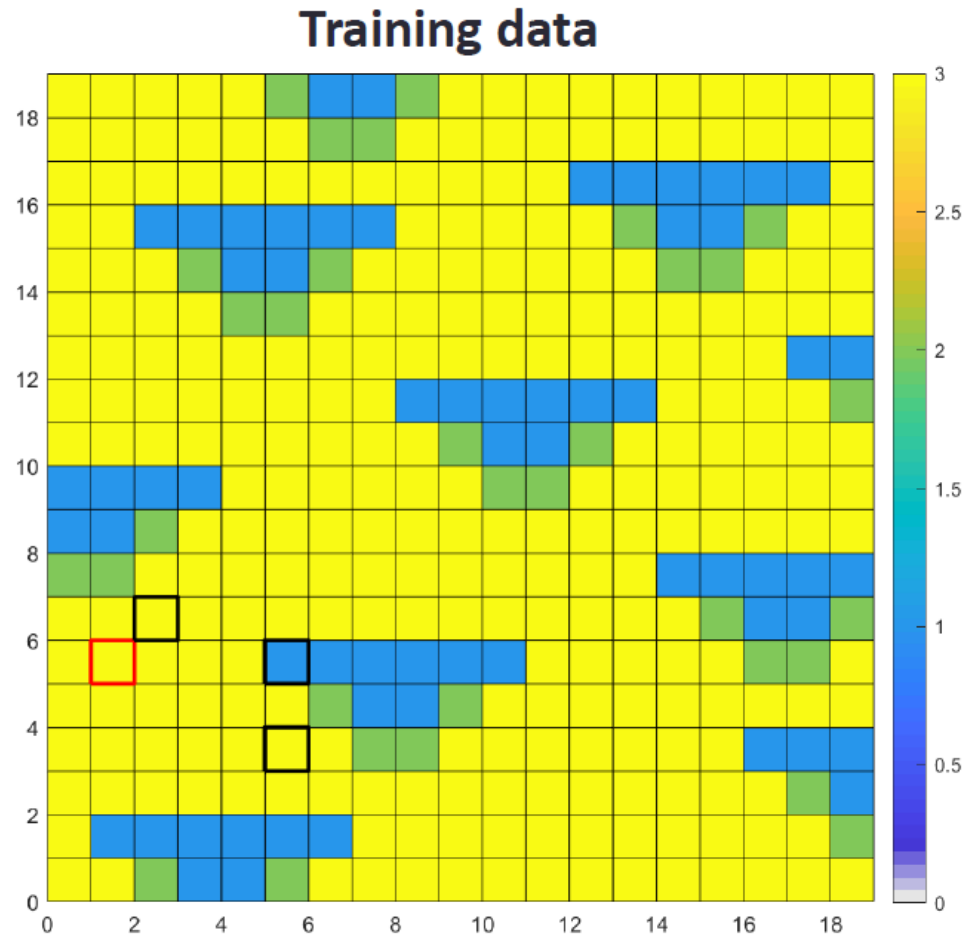
Recherche aléatoire, calcul de distance



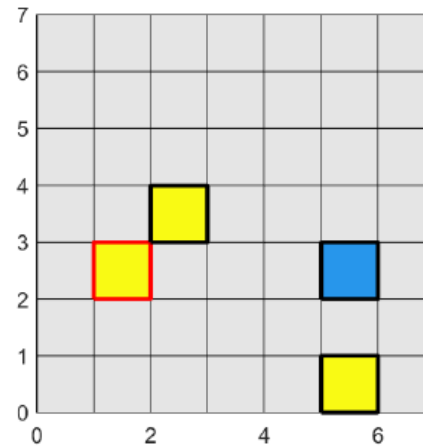


# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Exemple :



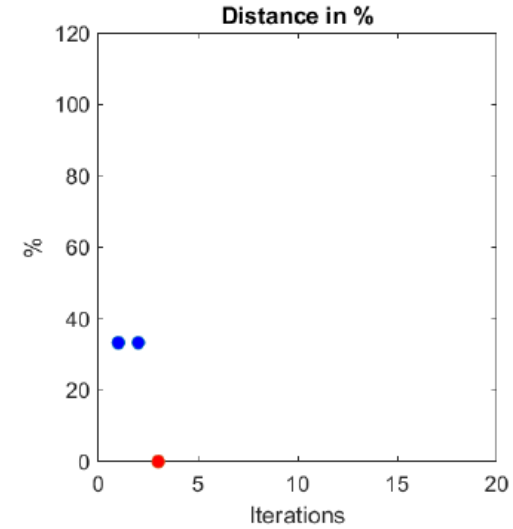
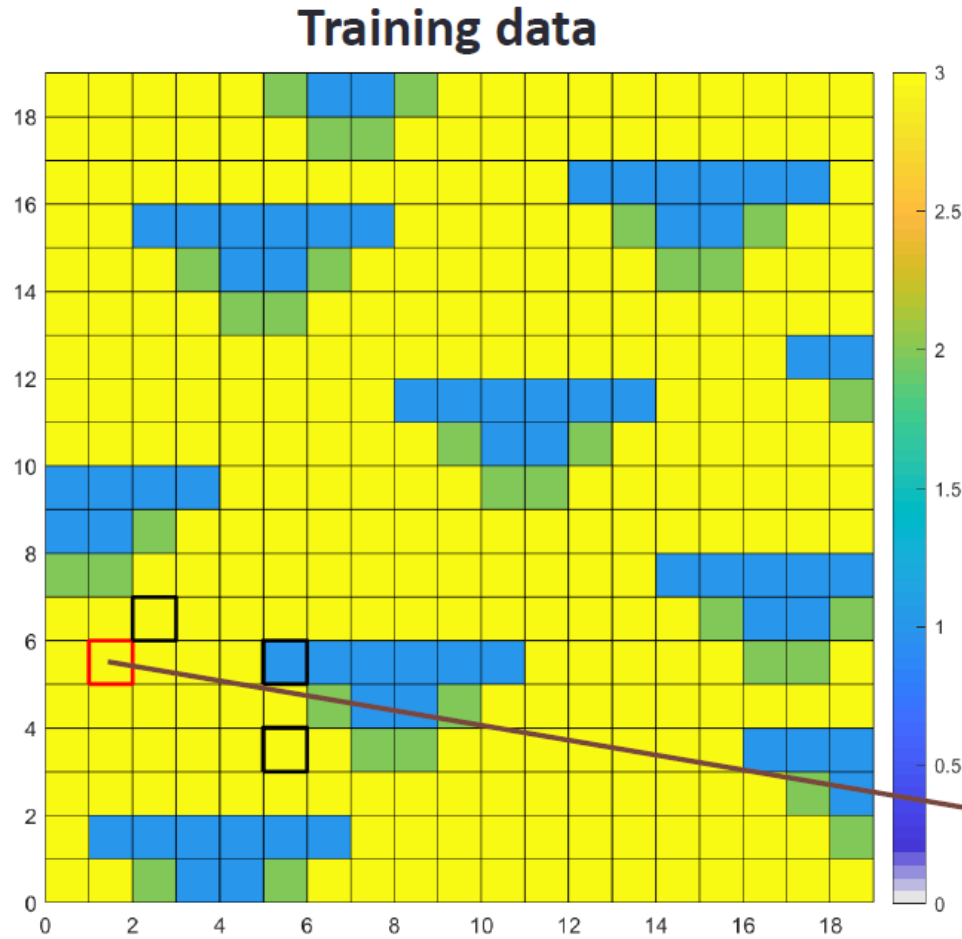
### Simulation grid



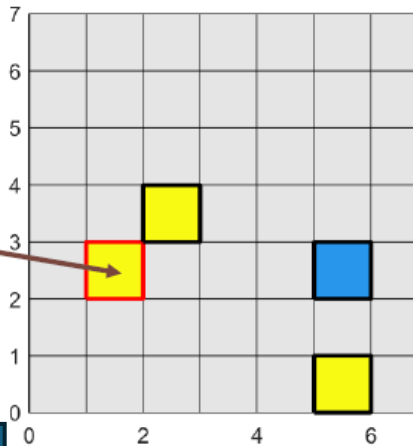
On arrête lorsque l'on rencontre l'évènement

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Exemple :



### Simulation grid



On copie la valeur de la TI dans la grille de simulation

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

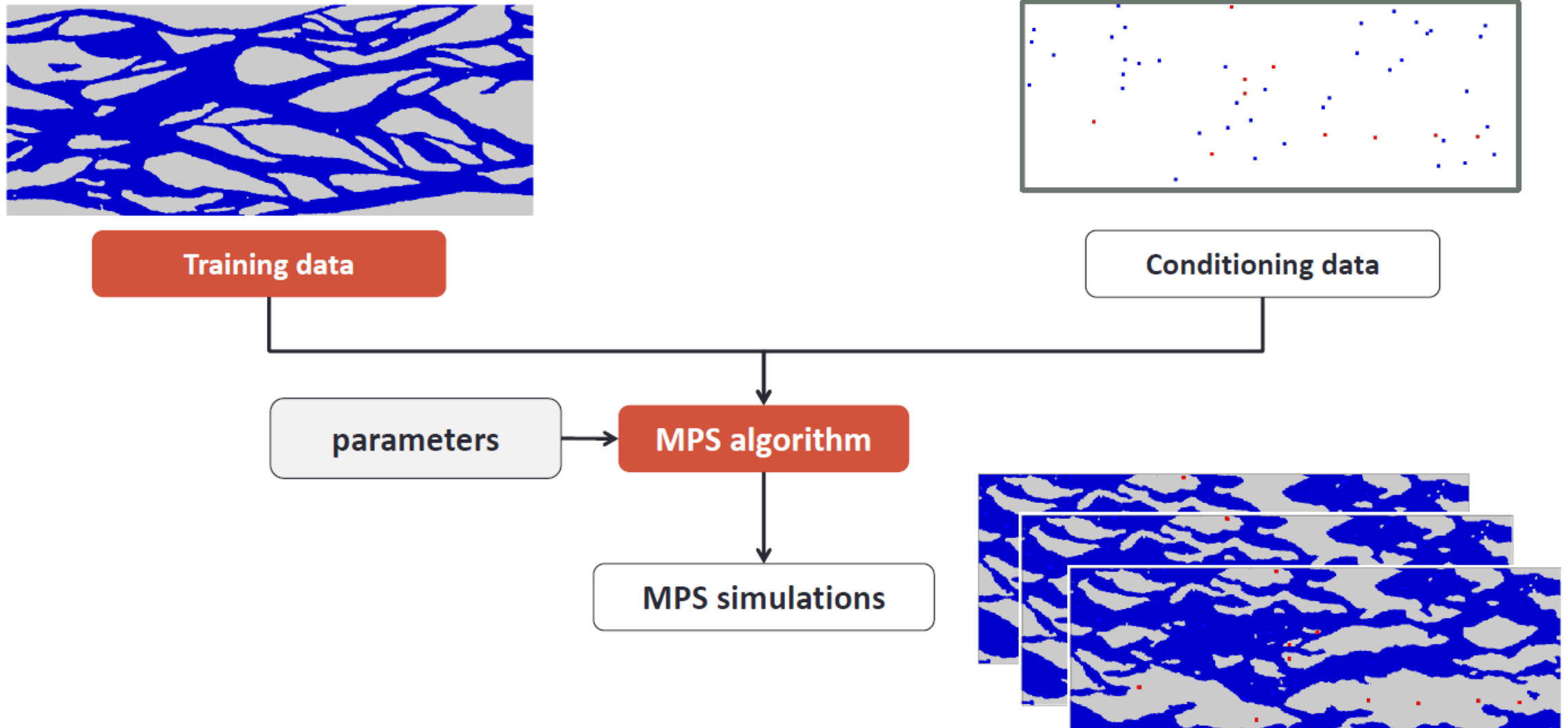
## Rappel :

- Pour estimer une probabilité, il faut des **répétitions** de motifs similaires
- Les motifs doivent être **bien répartis** dans l'image d'entraînement. Sinon, la probabilité peut être dénuée de sens
- L'image d'entraînement doit **être stationnaire** et afficher des répétitions de motifs



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Workflow :



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

**Théorie :**

Distance :

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i = \begin{cases} 0, & \text{si } Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}_i) = Z(\mathbf{y} + \mathbf{h}_i) \\ 1, & \text{si } Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}_i) \neq Z(\mathbf{y} + \mathbf{h}_i) \end{cases}$$

L'idée du DS consiste à scanner les données d'entraînement :

1. On trouve le premier évènement tel que :

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) < t$$

2. Une fraction  $f$  de la TI a été scanné, et on garde le meilleur évènement rencontré.

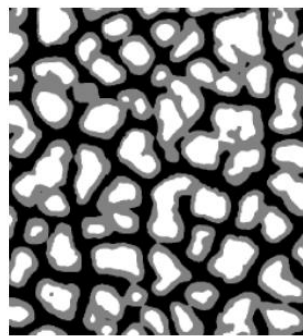
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Paramètres :

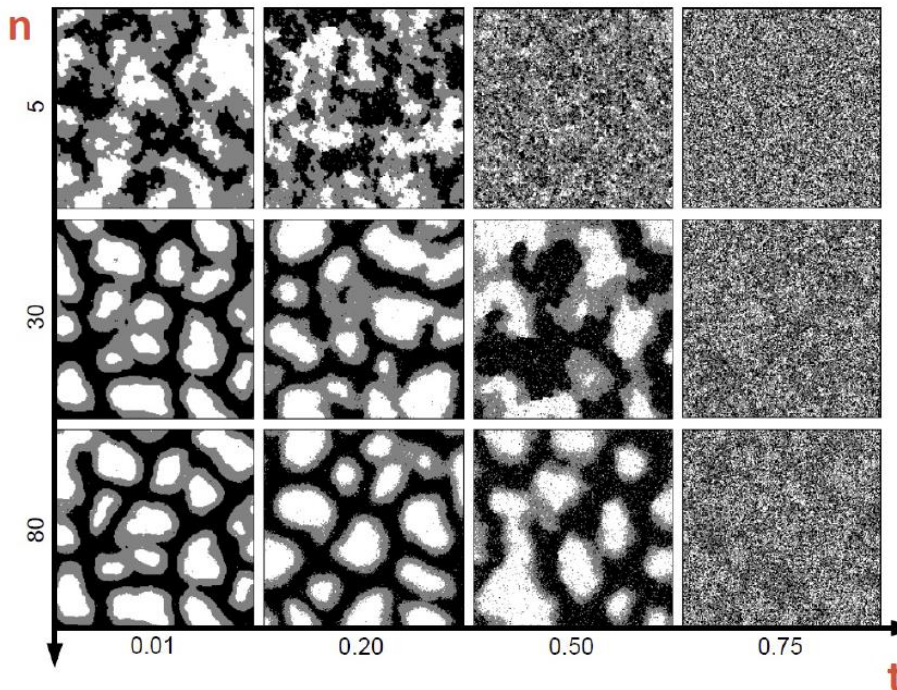
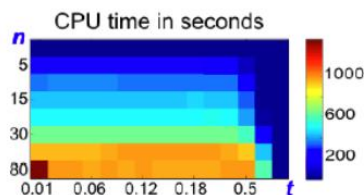
**Taille du voisinage ( $n$ ):** dépend de la dimension de l'espace, 10 à 100

**Seuil d'acceptation pour la distance ( $t$ ):** une valeur comprise entre 0 et 1

**Fraction de balayage maximale de la TI ( $f$ ):** Entre 0,1 et 0,5



Training image



$$f = 0.3$$

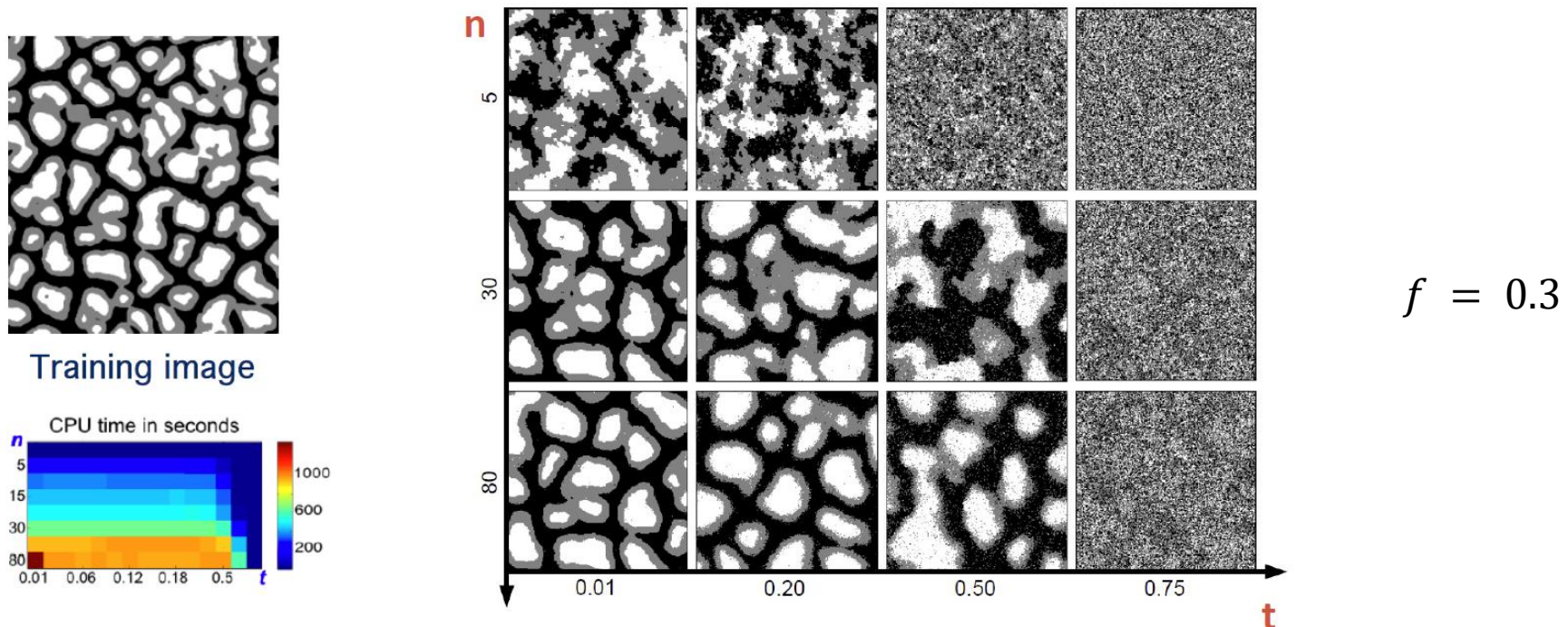
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Paramètres :

**Taille du voisinage ( $n$ ):** dépend de la dimension de l'espace, 10 à 100

**Seuil d'acceptation pour la distance ( $t$ ):** une valeur comprise entre 0 et 1

**Fraction de balayage maximale de la TI ( $f$ ):** Entre 0,1 et 0,5



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

**Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :**

Pour simuler des structures avec

- Orientations;
- Taille des structures qui diffèrent de ce qui est dans le TI;
- Proportions de faciès.

Peut être appliqué

- **Globalement** → même transformation (rotation / mise à l'échelle) / proportion ciblesur toute la grille de simulation
- **Localement** → nécessite une carte des angles / rapports d'échelle / proportions

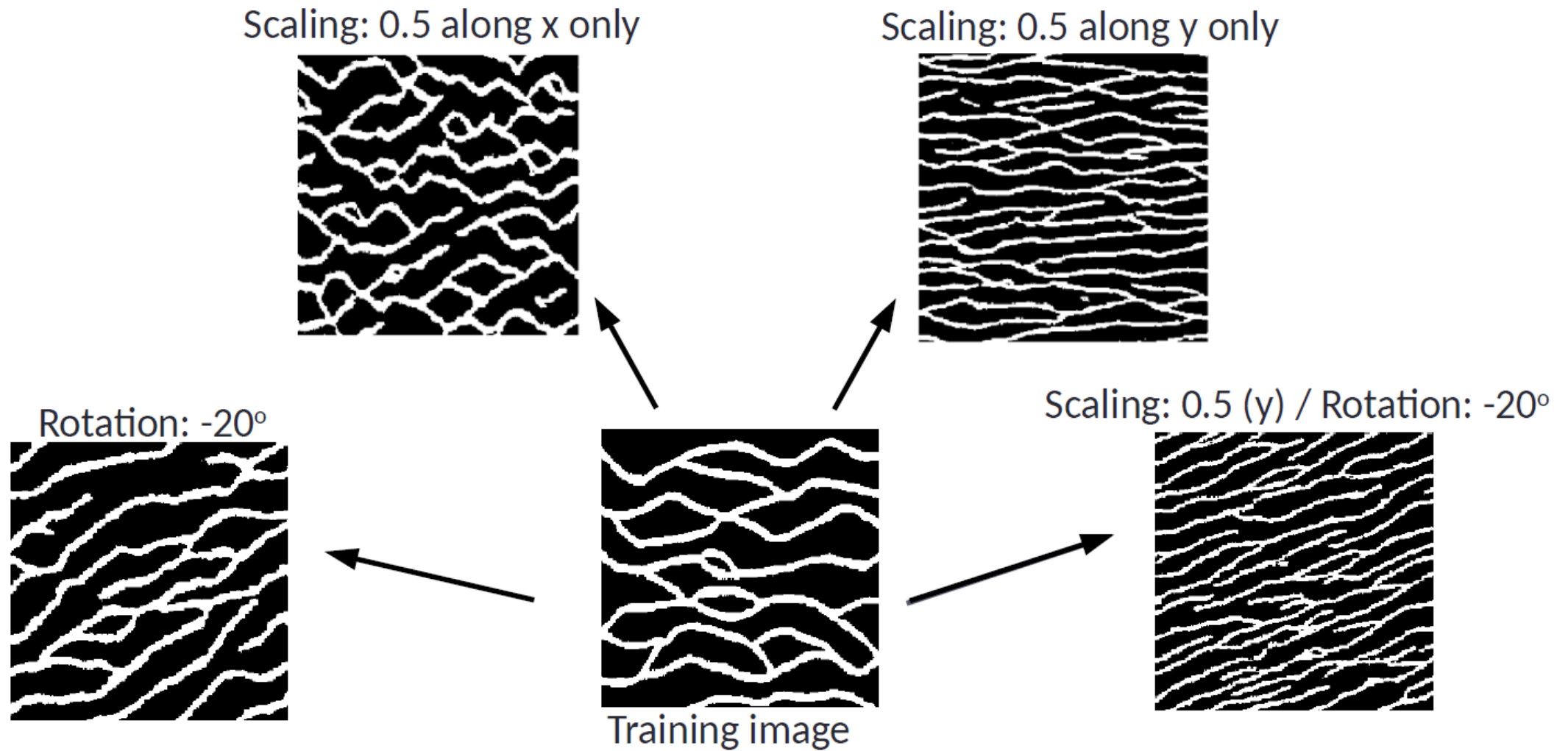




# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

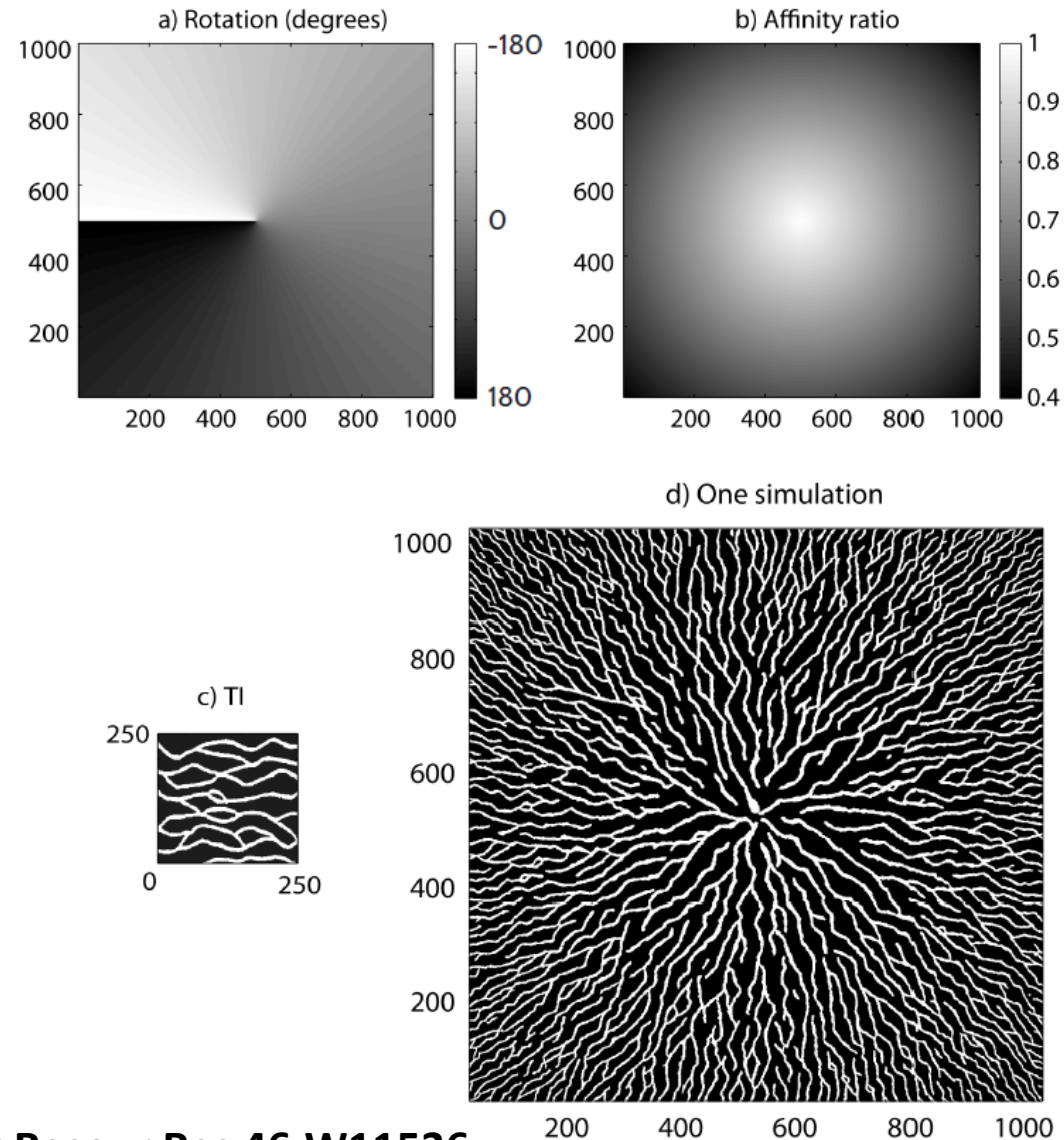
Globalement :



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Localement :



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Fonctionnement

**La TI n'est jamais  
modifiée**

## Rotation:

Appliquer une certaine rotation à la TI

→ Le motif est tourné en utilisant la rotation inverse avant de scanner la TI

## Mise à l'échelle :

Appliquer une certaine dilatation à la TI

→ Le motif est dilaté par le rapport à l'inverse avant de scanner la TI

## Rotation et mise à l'échelle:

Appliquer une dilatation, **puis** une rotation à la TI

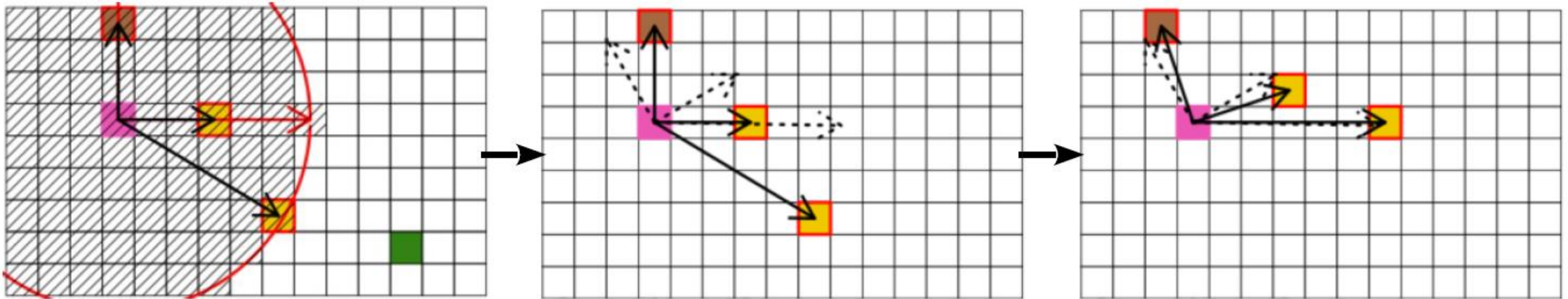
→ Le motif est transformé en utilisant la transformation géométrique inverse

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Objectif : obtenir des structures tournées de  $30^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre :  $\text{azimut} = 30^\circ$

Simulation d'une cellule, le pixel rose :



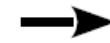
Identifier le motif dans la grille de simulation



Appliquer une rotation de  $30^\circ$  dans le sens inverse des aiguilles d'une montre



Obtenir le nouveau motif (en *arrondissant* les décalages)



Scanner la TI avec le nouveau motif

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Il est possible de spécifier des intervalles de valeurs possibles pour les rapports d'échelle et d'angles

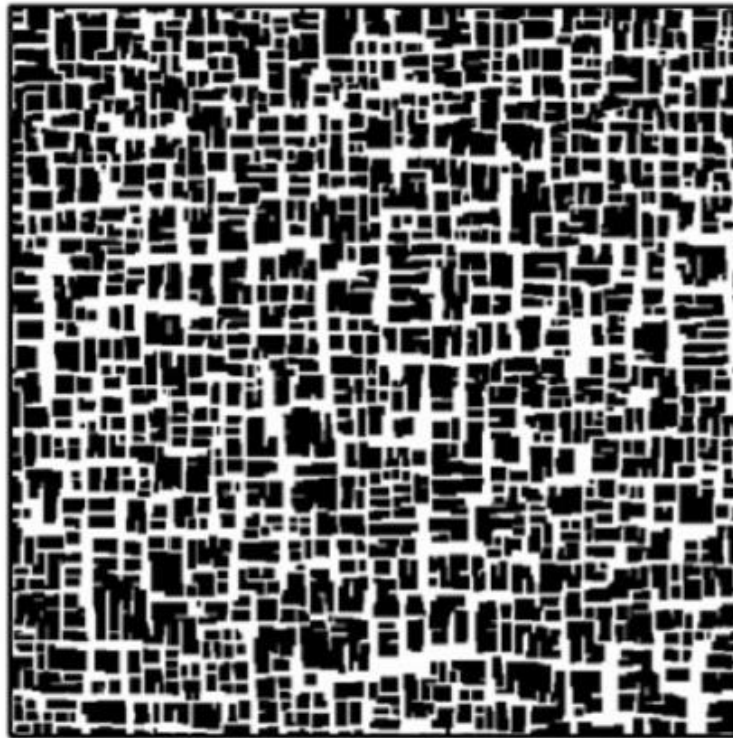
R : rotation

S: facteur d'échelle

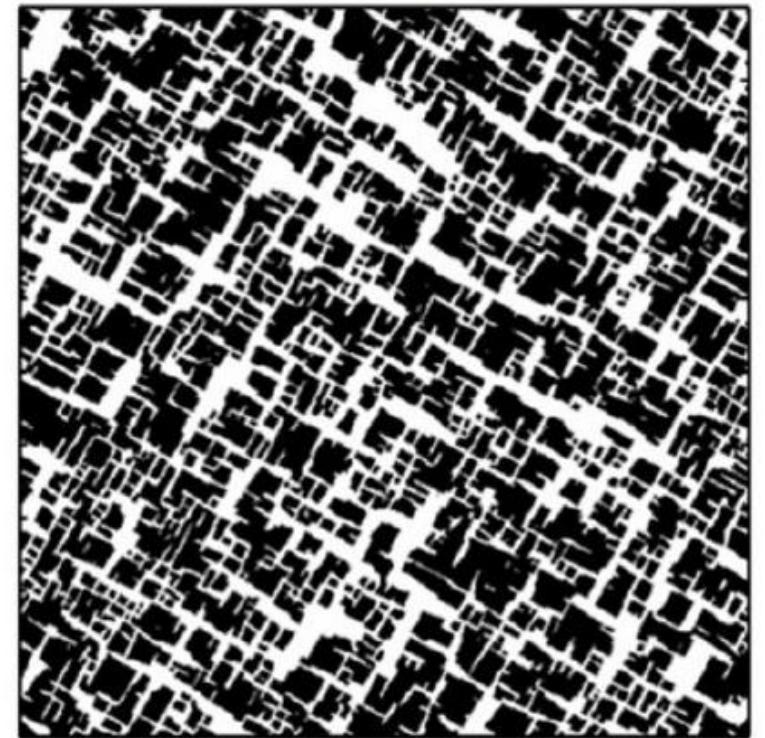
R in  $[-180,180]$  / S in  $[2/3,3/2]$



R = 0 / S in  $[1/3,3]$

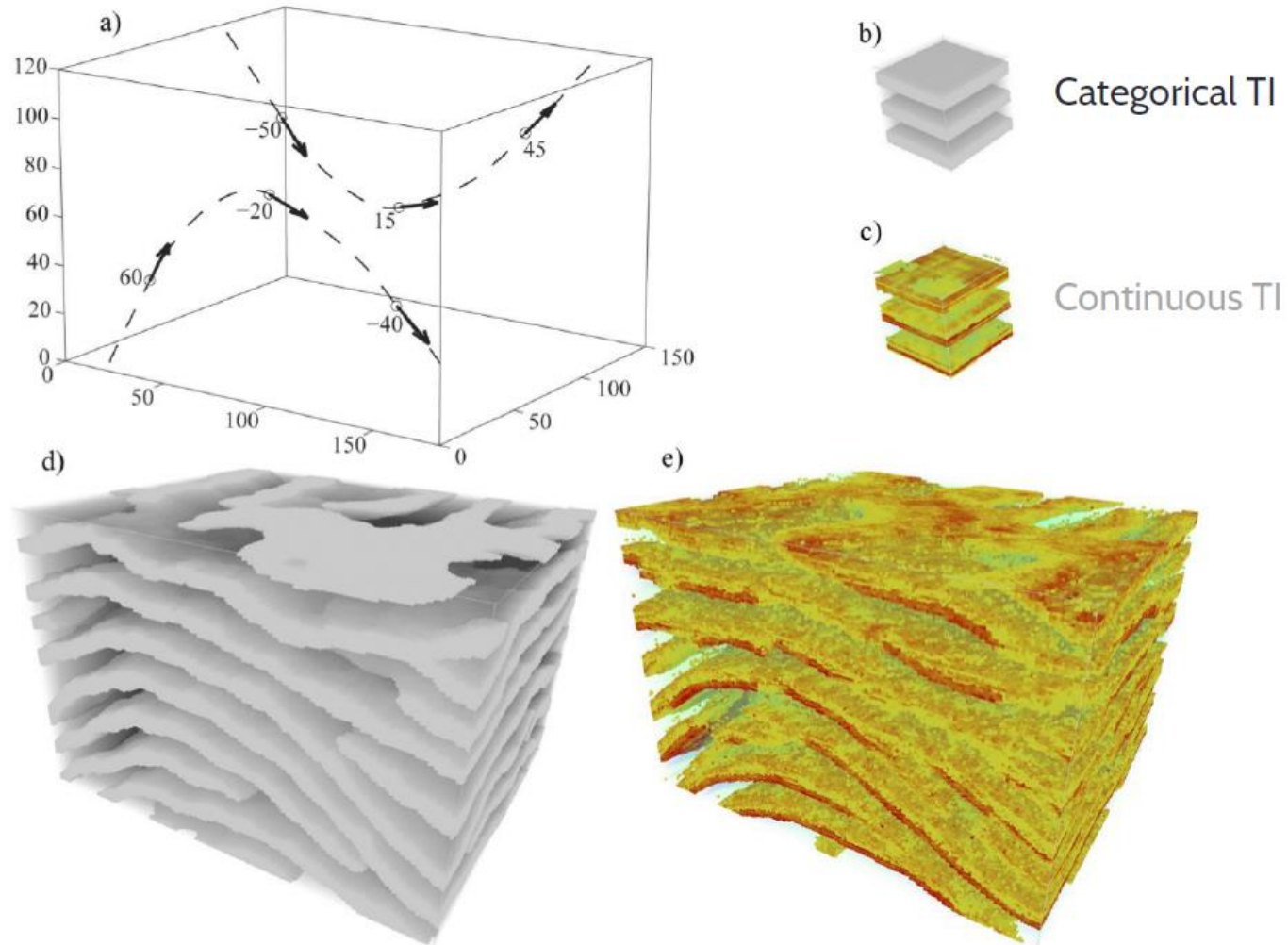


R=30 / S in  $[1/4,4]$



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

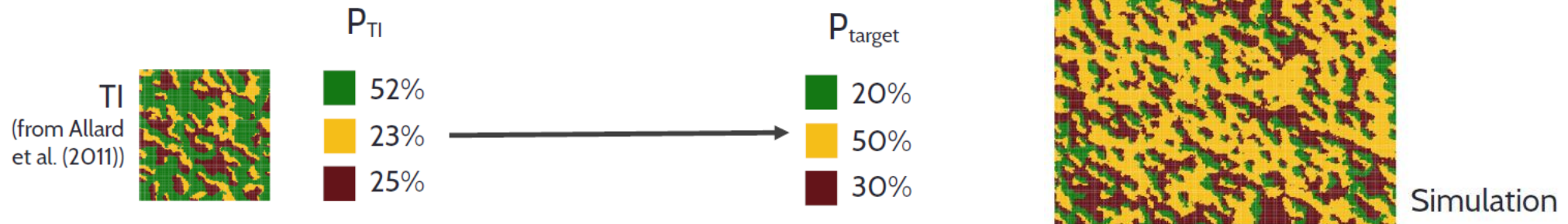
Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Objectif : On veut modifier les proportions des faciès de la TI



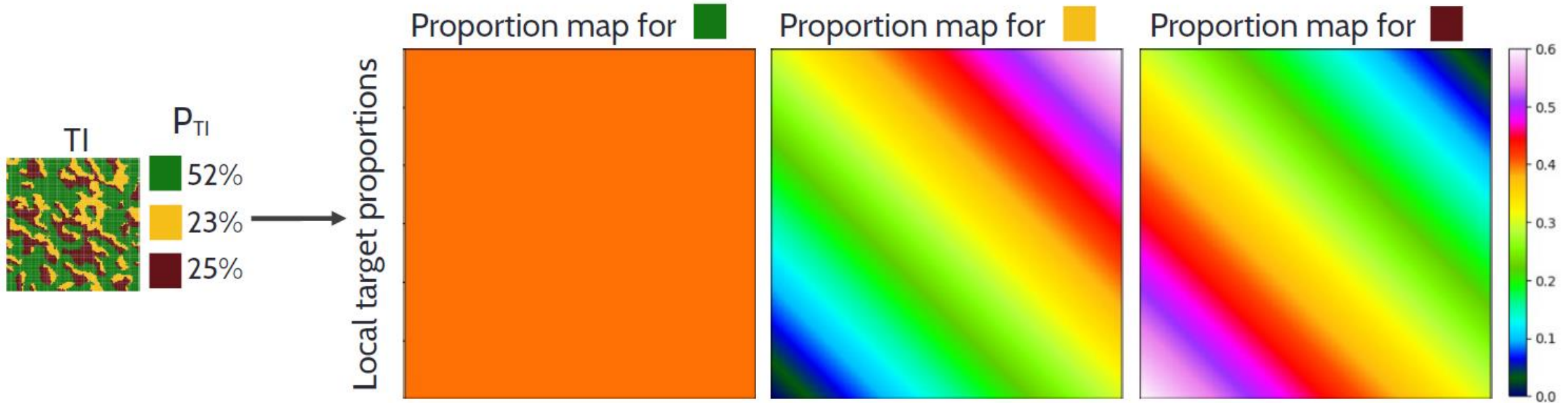
Idée : Ajouter un critère avant d'accepter une cellule TI scannée pendant la simulation

On a donc deux critères :

$$d(TI_{motif}, Sim_{motif}) < t_{motif} \text{ et } d(P_{cible}, P_{actuel}) < t_{prop}$$

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

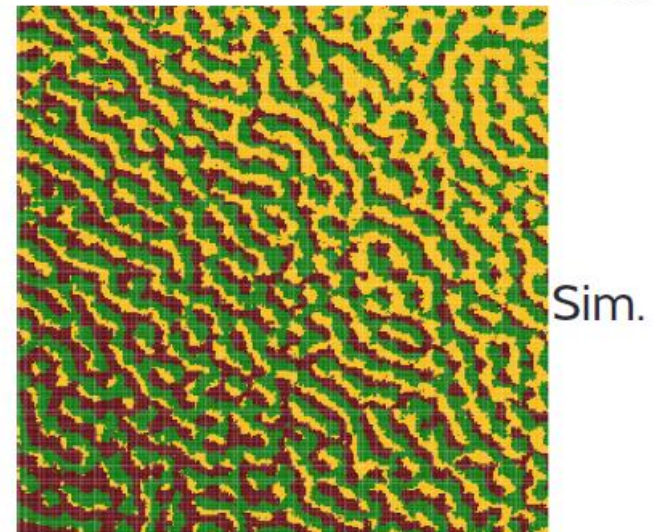


Comme le cas global, scannez jusqu'à :

$$\begin{aligned} \text{Dist}(TI_{patron}, GS_{patron}) &< t_{patron} \\ \text{et} \\ \text{Dist}(P_{cible}, P_{cur}) &< t_{prop} \end{aligned}$$

$$P_{cible} = P_{cible}(x)$$

$P_{cur}$  = proportion actuelle dérivée des cellules déjà simulées dans un voisinage de  $x$  selon un rayon de support (paramètre utilisateur supplémentaire)





# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

**Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :**

**Astuce :**

Distance de désactivation

Pour les contraintes de proportion globales et locales;

Lors de la simulation à petite échelle (tard dans la simulation)

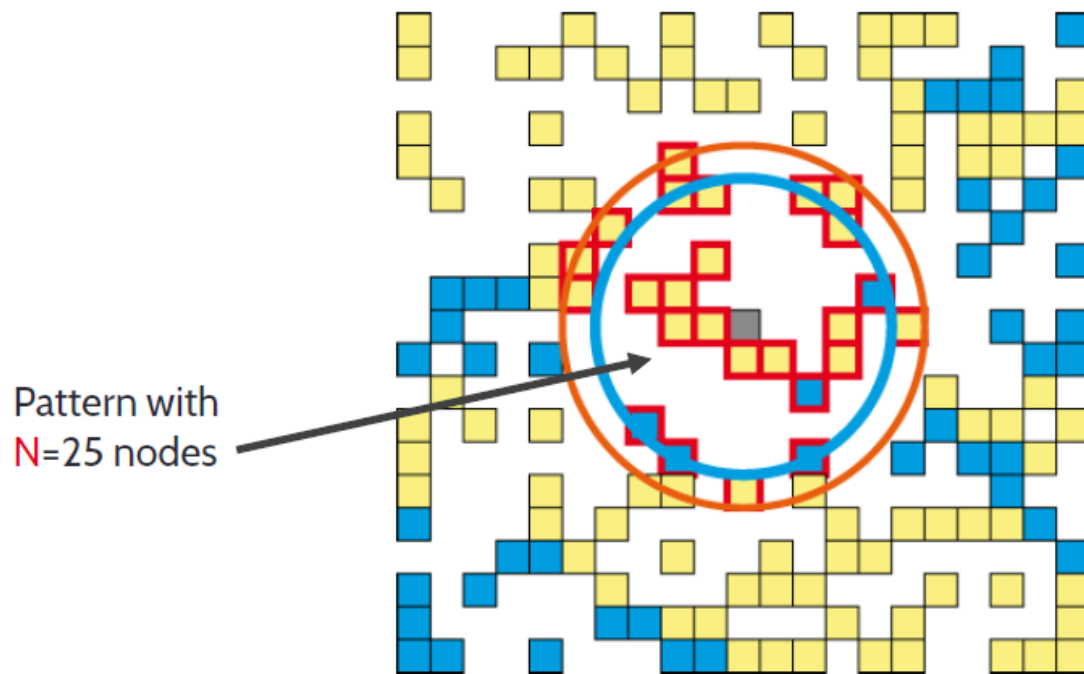
- Les cellules vides restantes dans la grille sont remplies
- Cochez uniquement le motif et désactivez la contrainte de proportion
  - Évitez la simulation bruyante (en forçant la proportion) mais les proportions finales peuvent s'écarter de celles cibles



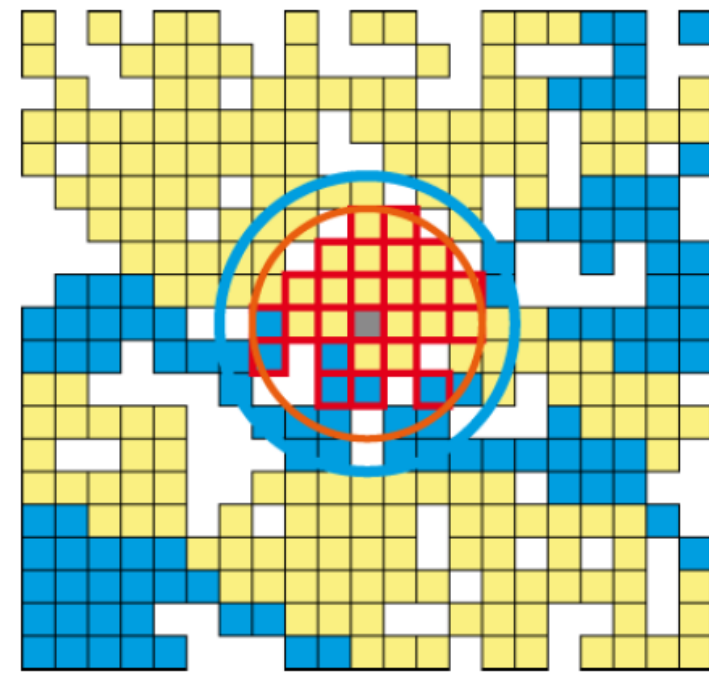
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

- Compute  $R_{pat}$  : radius including the pattern
- If  $R_{pat} < R_{lim}$ , then deactivate the proportion constraint  
→  $R_{lim}$  = deactivation distance (user parameter)



$R_{pat} > R_{lim}$



$R_{pat} < R_{lim} \rightarrow$  deactivate!

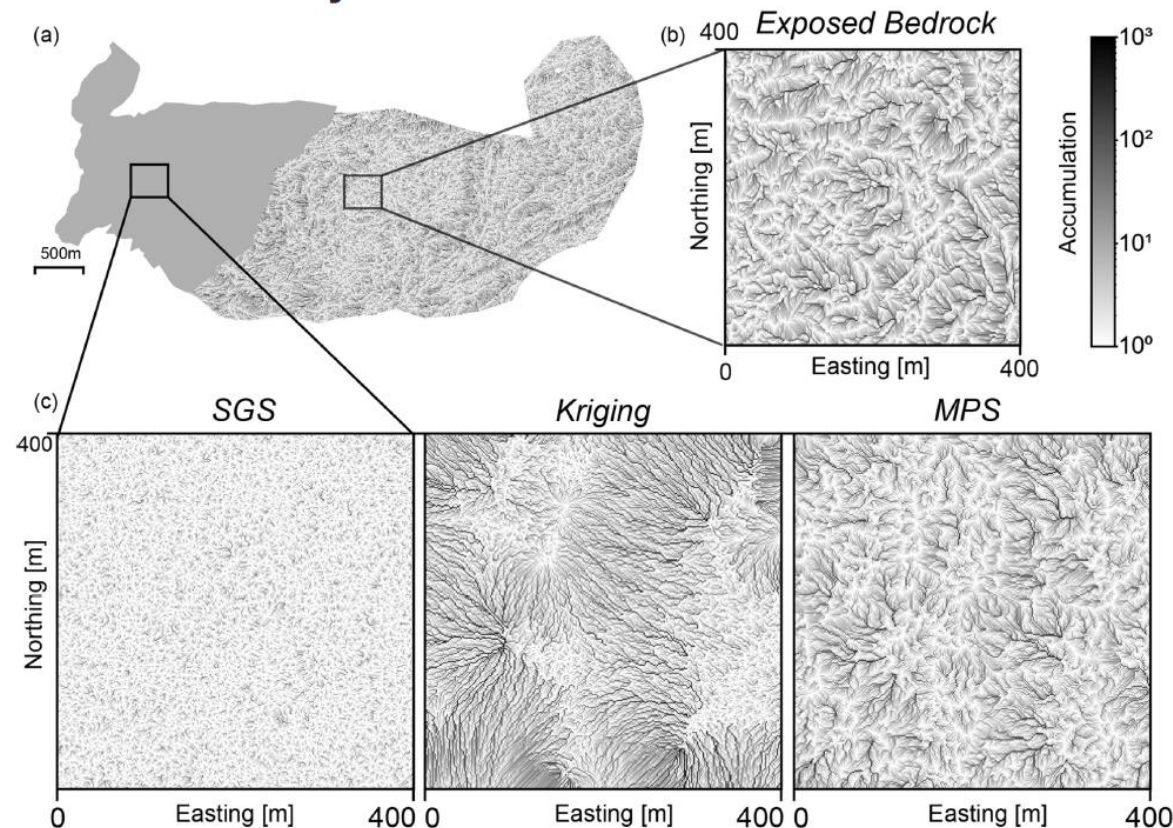
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Données continues :

Idée: On modifie la notion de distance pour tenir compte de la nature continue

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}_i) - Z(\mathbf{y} + \mathbf{h}_i)|$$

Flow accumulations are very different



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Multivariables :

Idée: On étant la motion de distance pour tenir compte de plusieurs TI

Choisir le nombre  $n_k$  de voisins par variable  $k$

Une distance par variable

1. On trouve le premier évènement tel que :

$$d\left(\mathbf{d}_{n_1}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_1}(\mathbf{y})\right) < t_1$$

$$d\left(\mathbf{d}_{n_2}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_2}(\mathbf{y})\right) < t_2$$

....

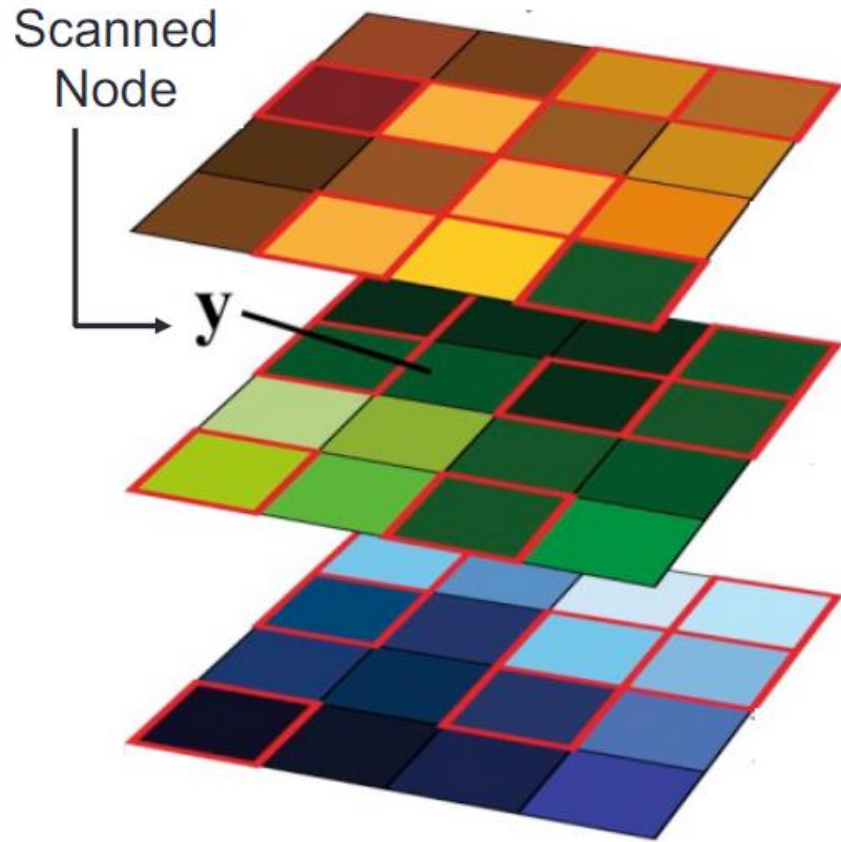
$$d\left(\mathbf{d}_{n_k}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_k}(\mathbf{y})\right) < t_k$$

2. Une fraction  $f$  de la TI a été scanné, et on garde le meilleur évènement rencontré.

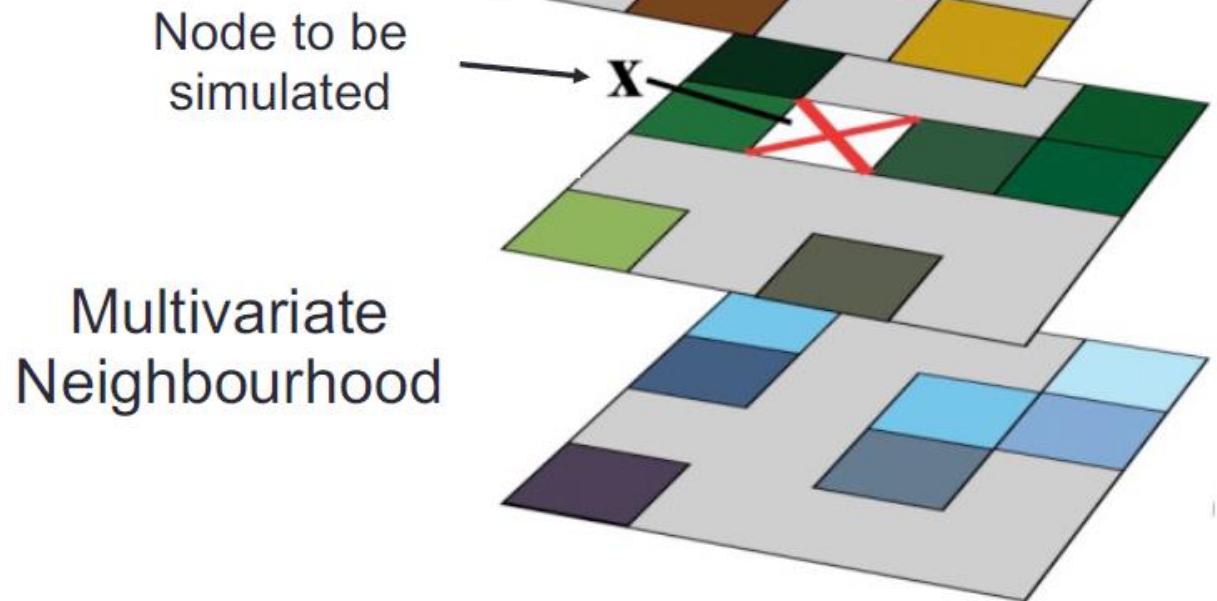
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multivariables :

Multivariate training data set



Simulation grid (incomplete data)

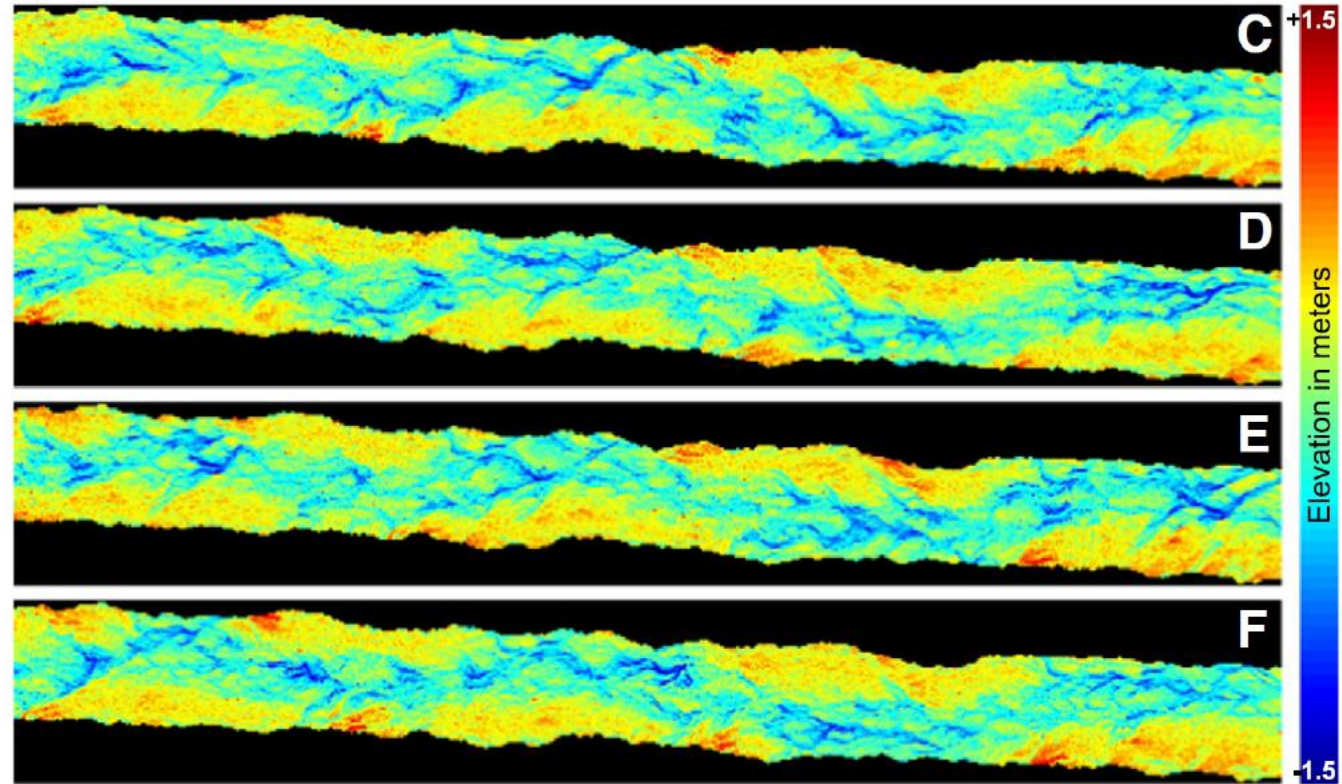
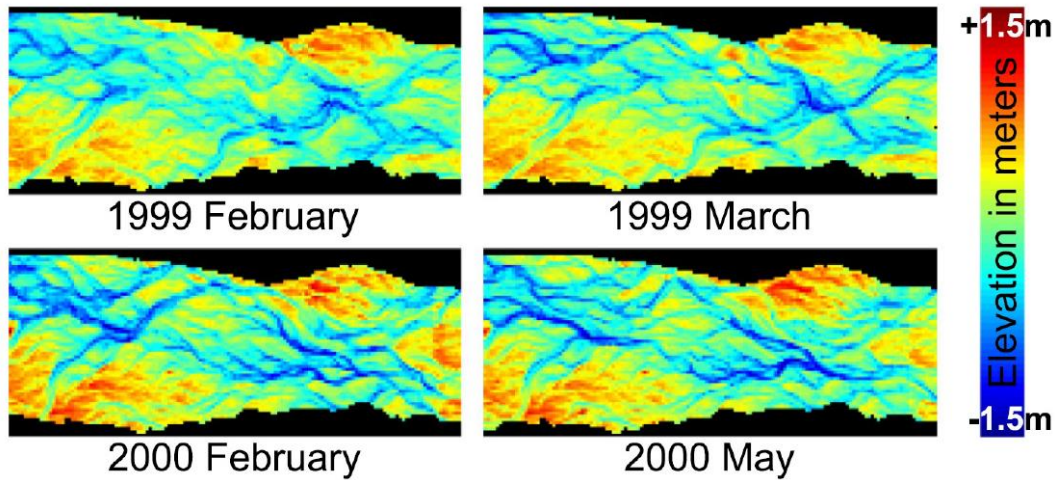


# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Multivariables :

### Évolution de la topographie

LIDAR Data from analog site = Training data set



Lane, Westaway, and Hicks (2003), *Earth Surf. Processes Landforms*, 28(3), 249–271

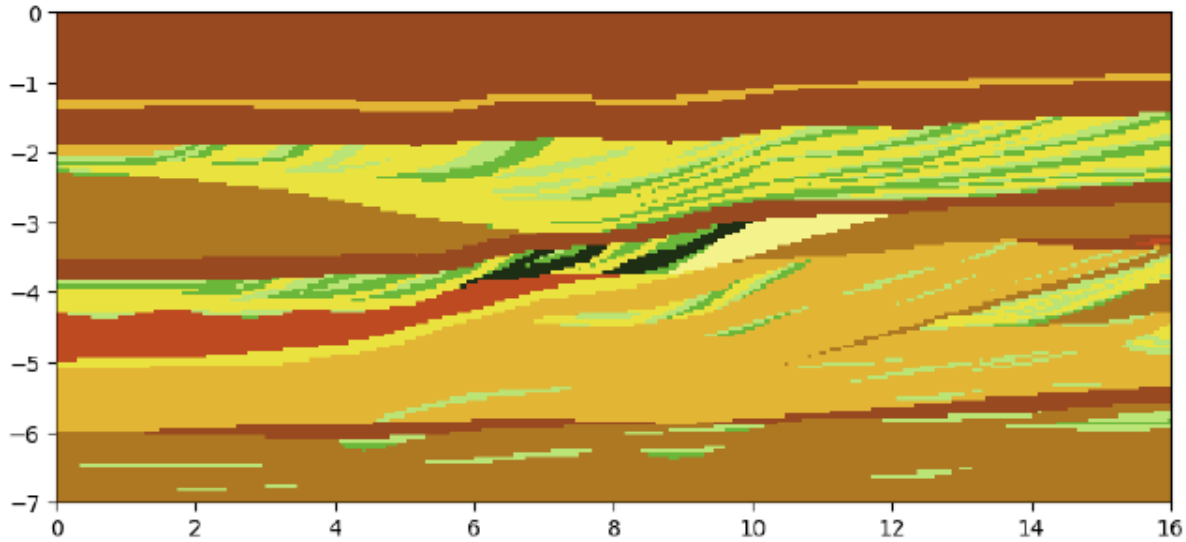
Pirot, Renard, and Straubhaar (2014) *Geomorphology*. 214: 148-156

# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

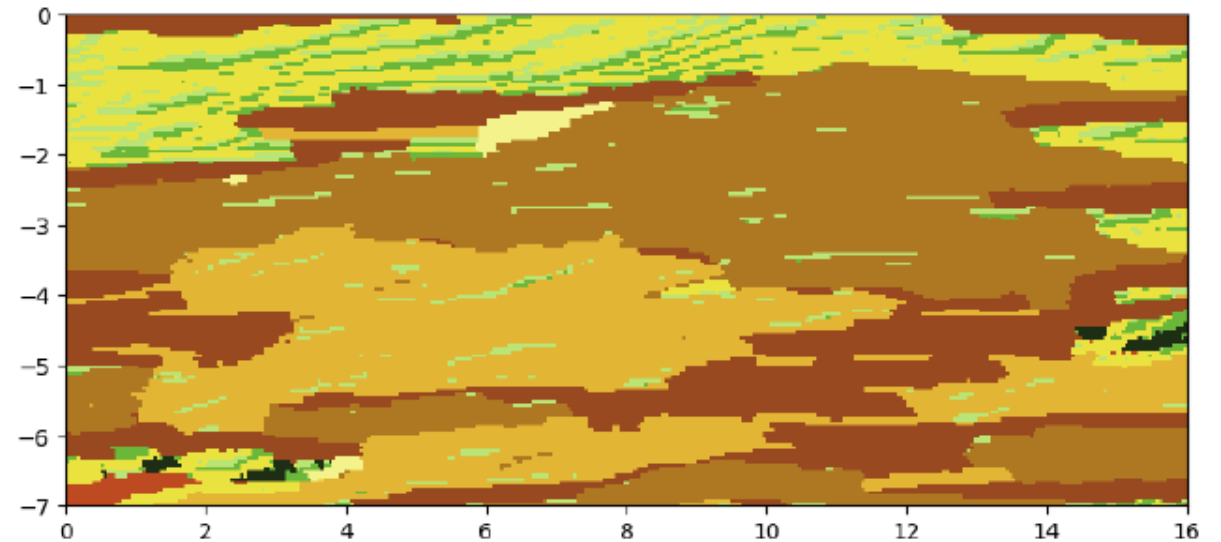
Avec tendances :

**DS ne peut gérer la non-stationnarité**

Tl



Simulation

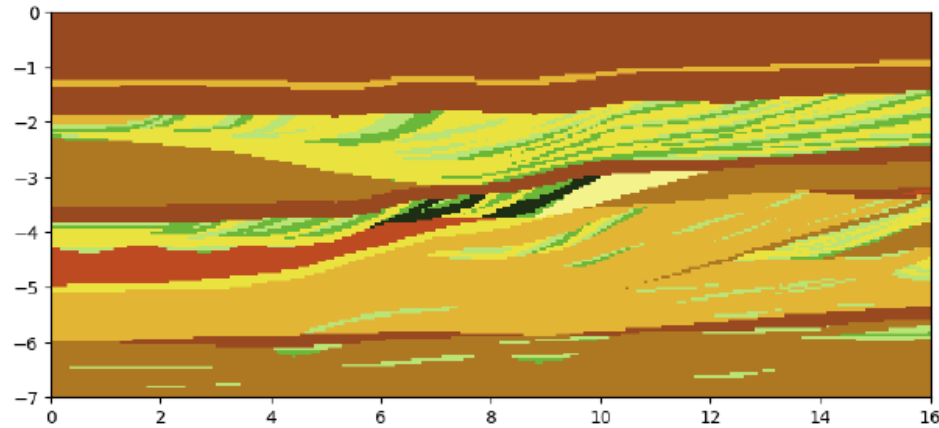


# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

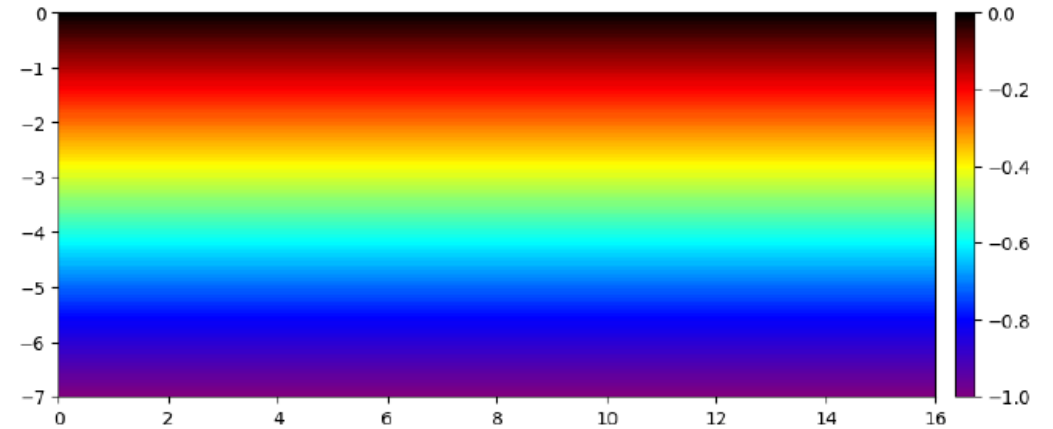
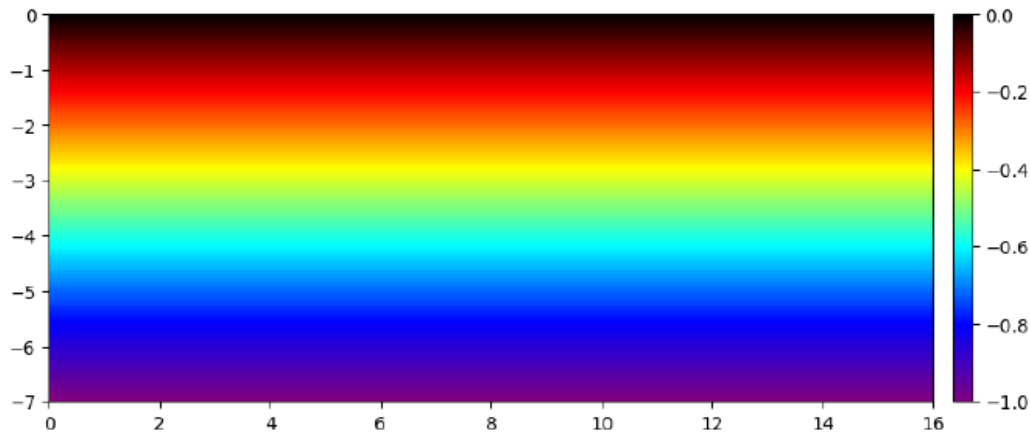
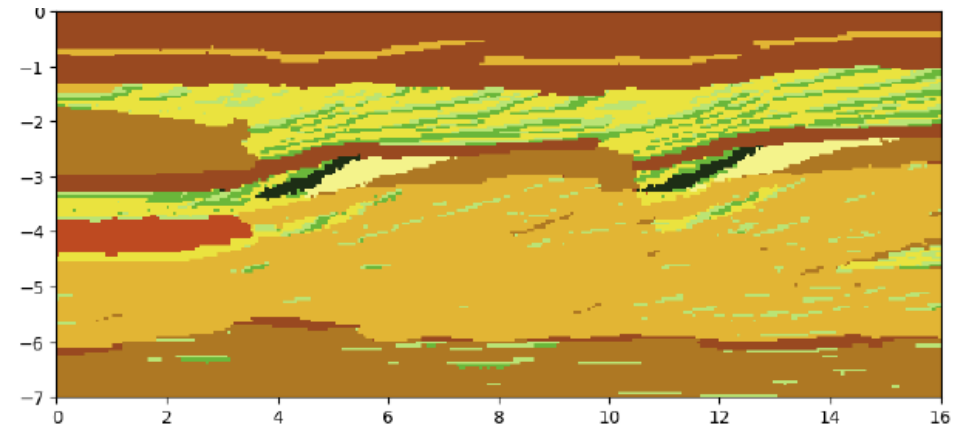
Avec tendances :

Solution: Ajouter une variable auxiliaire qui décrit la tendance

TI



Simulation

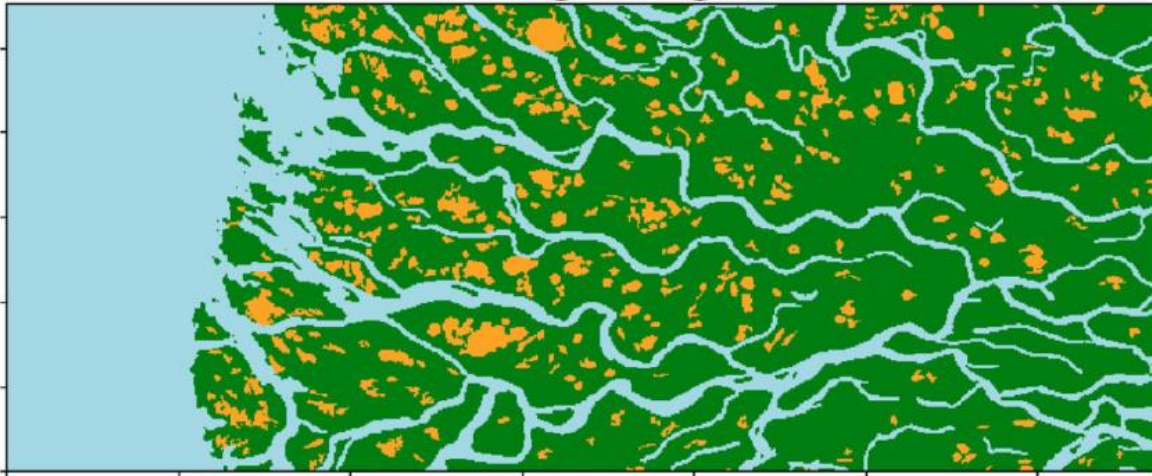




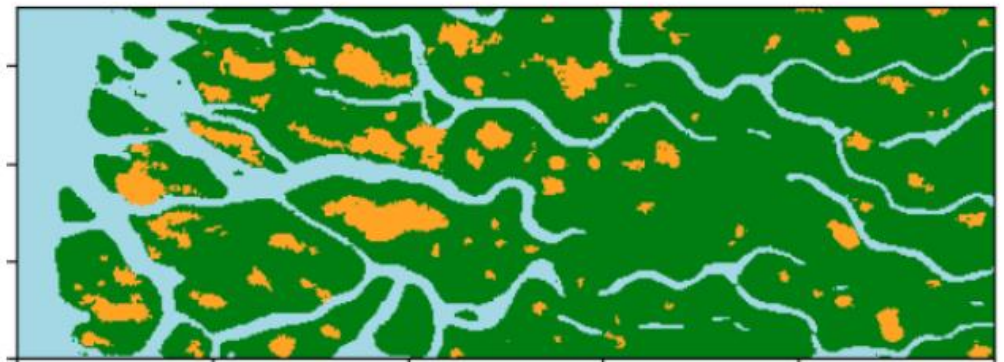
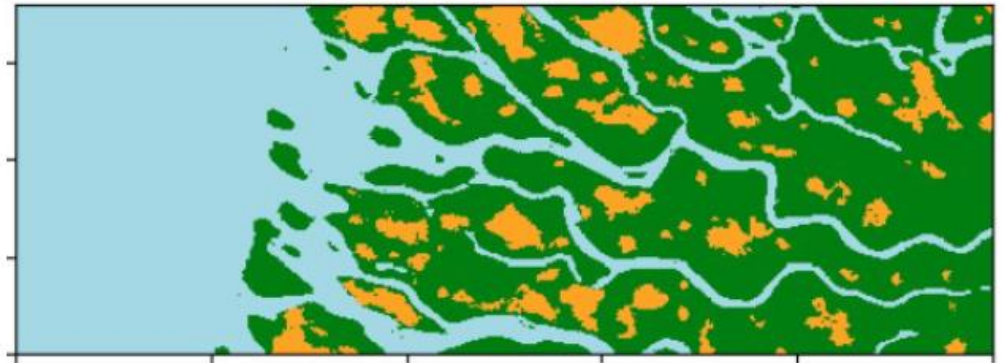
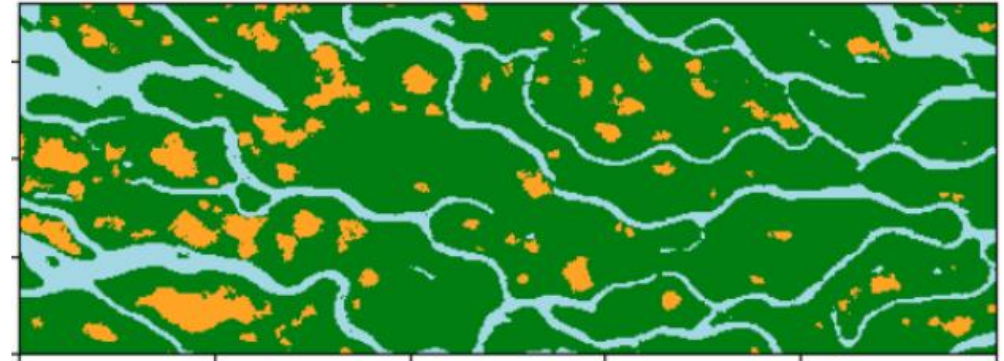
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Avec tendances :

Training image

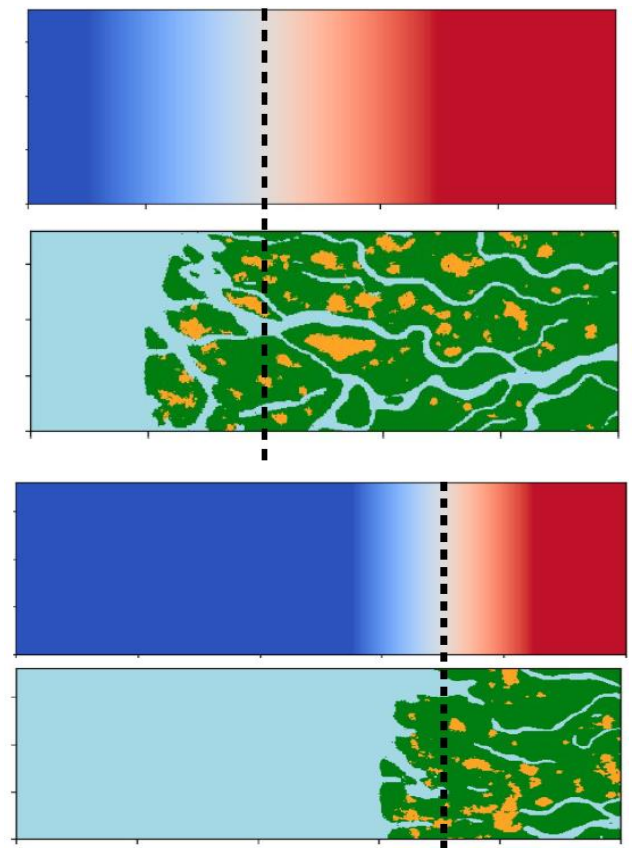
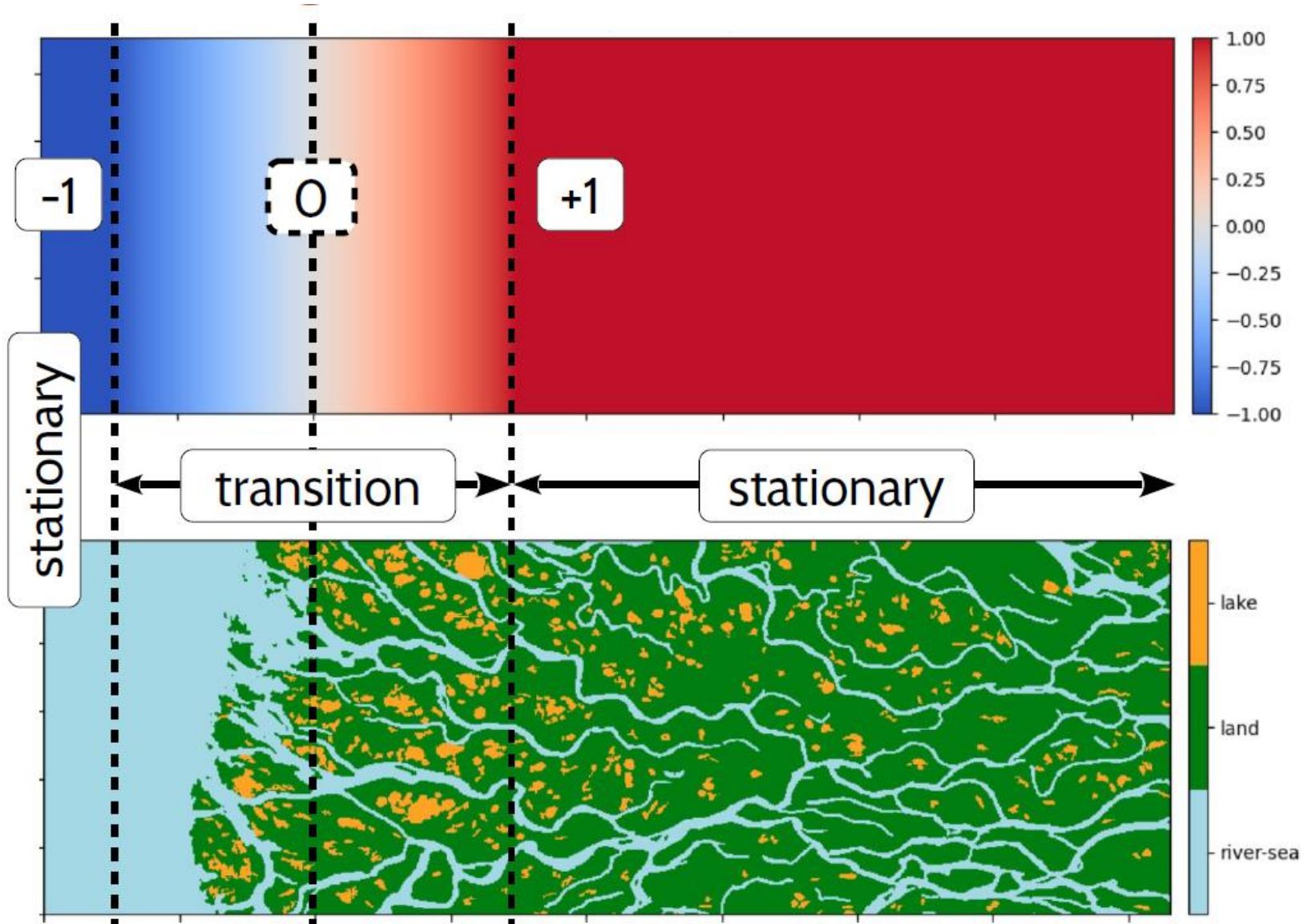


3 simulations



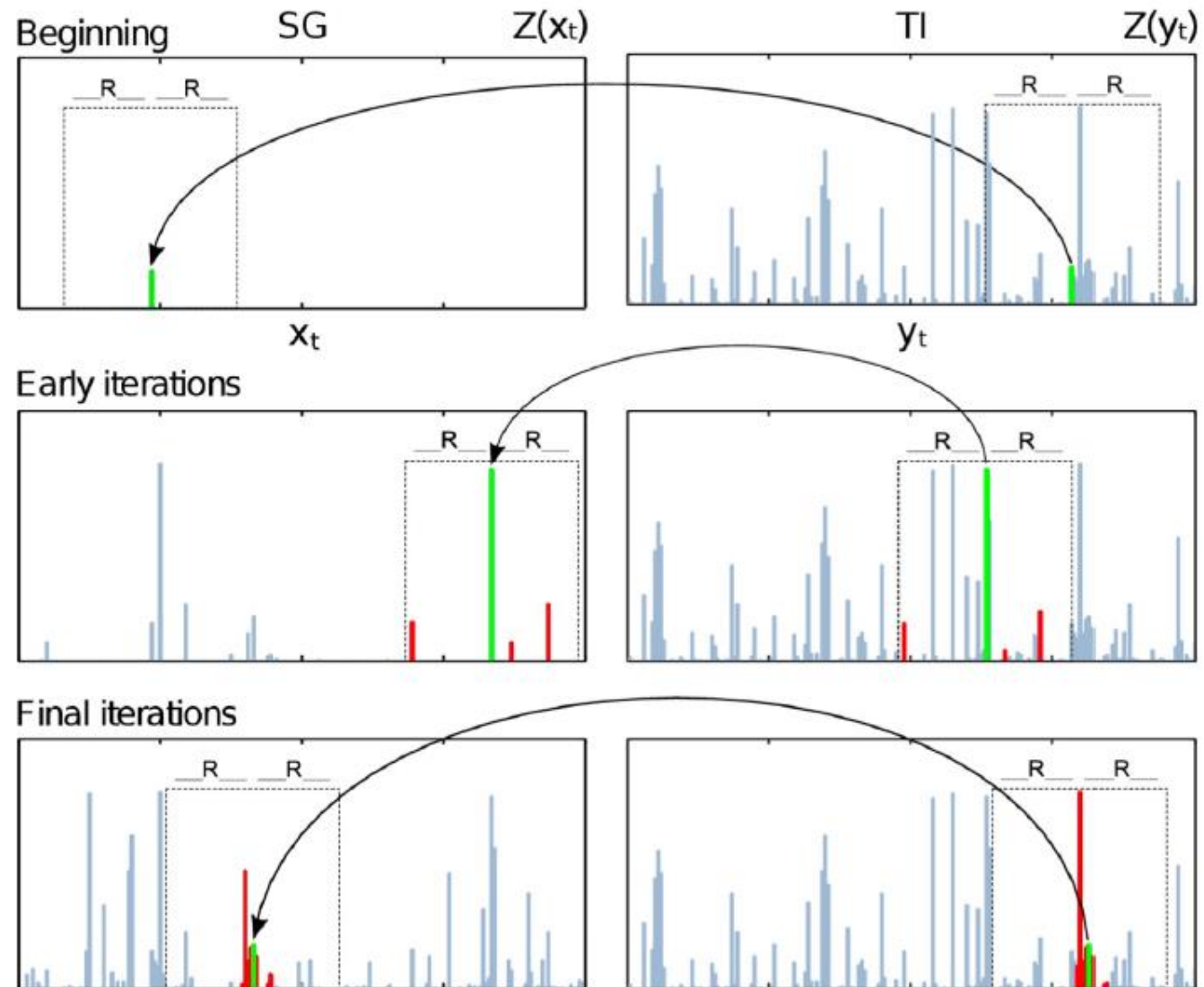
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Avec tendances :



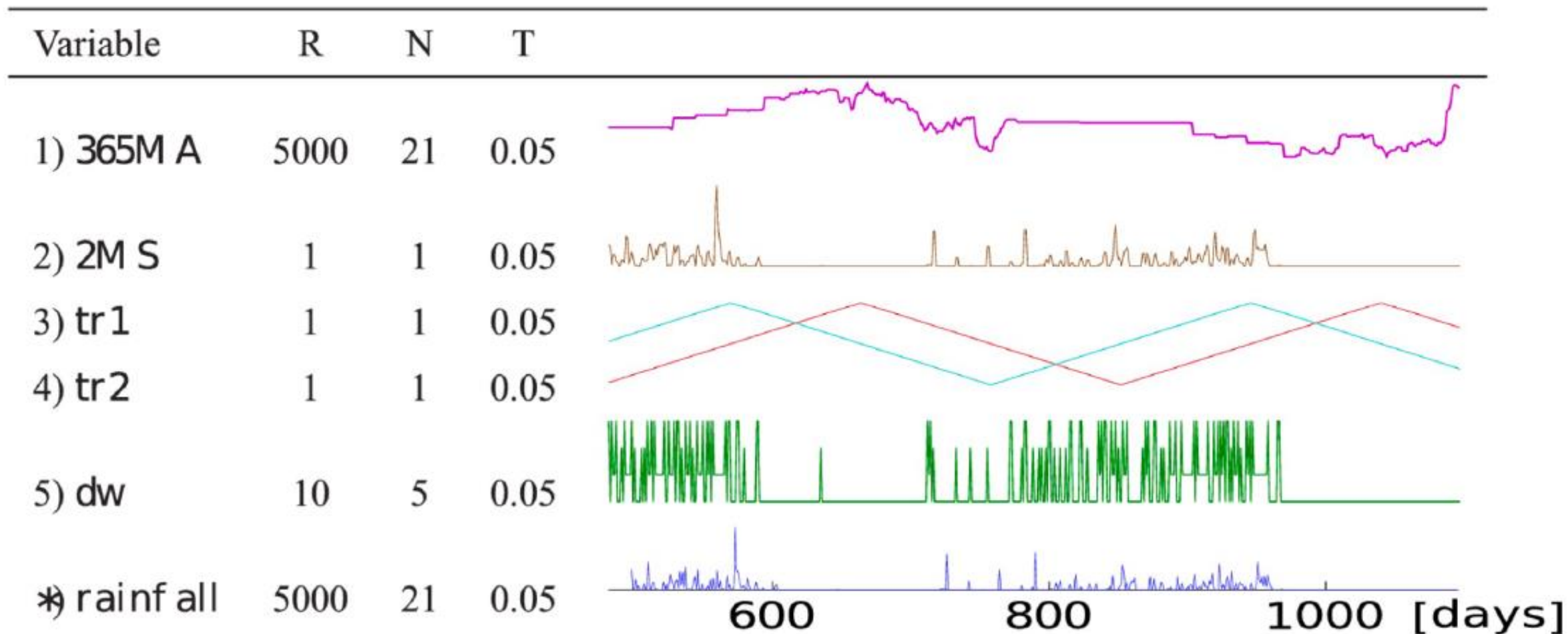
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Séries temporelles : chemin aléatoire



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

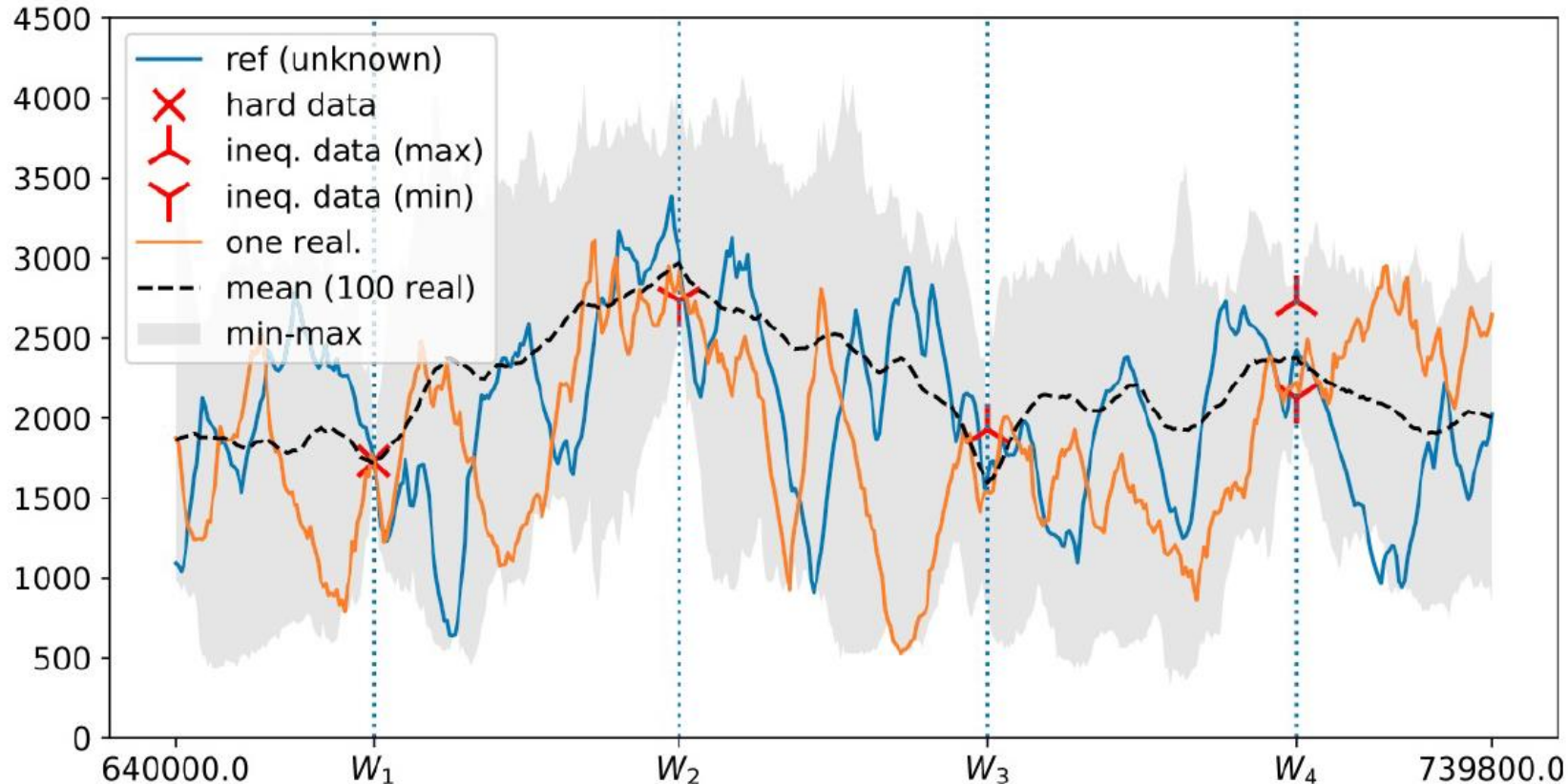
## Séries temporelles : Variables auxilliaires



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contraintes d'inégalités:

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad f(x) = \begin{cases} |Z(x_i) - Z(y_i)|, & \text{si la valeur est connue en } x_i \\ \max(z_{\min}(x_i) - Z(y_i), 0), & \text{si la borne inférieure est connue en } x_i \\ \max(Z(y_i) - z_{\max}(x_i), 0), & \text{si la borne supérieure est connue en } x_i \\ \max(\max(z_{\min}(x_i) - Z(y_i), 0), \max(Z(y_i) - z_{\max}(x_i), 0)) & \text{si les bornes supérieure et inférieure sont connues en } x_i \end{cases}$$



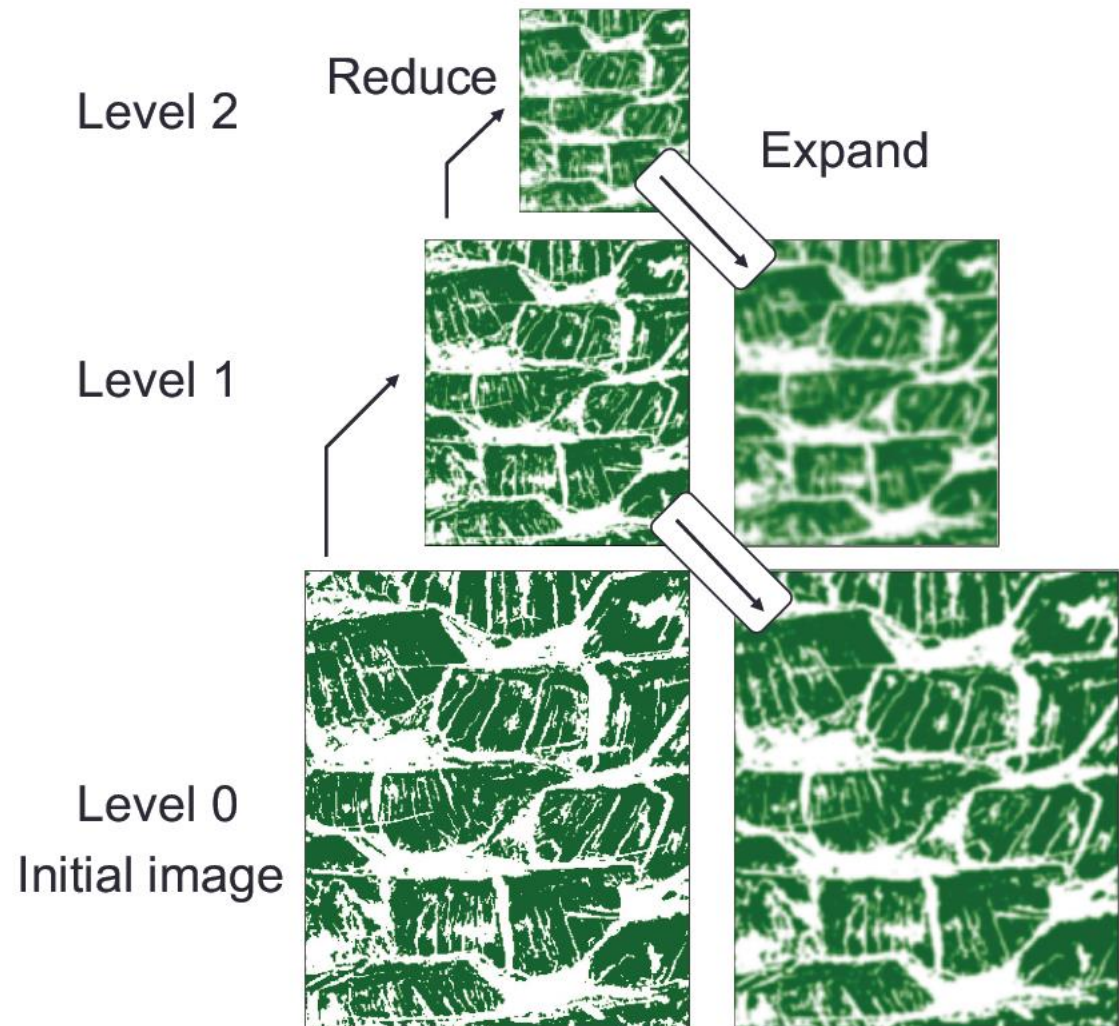
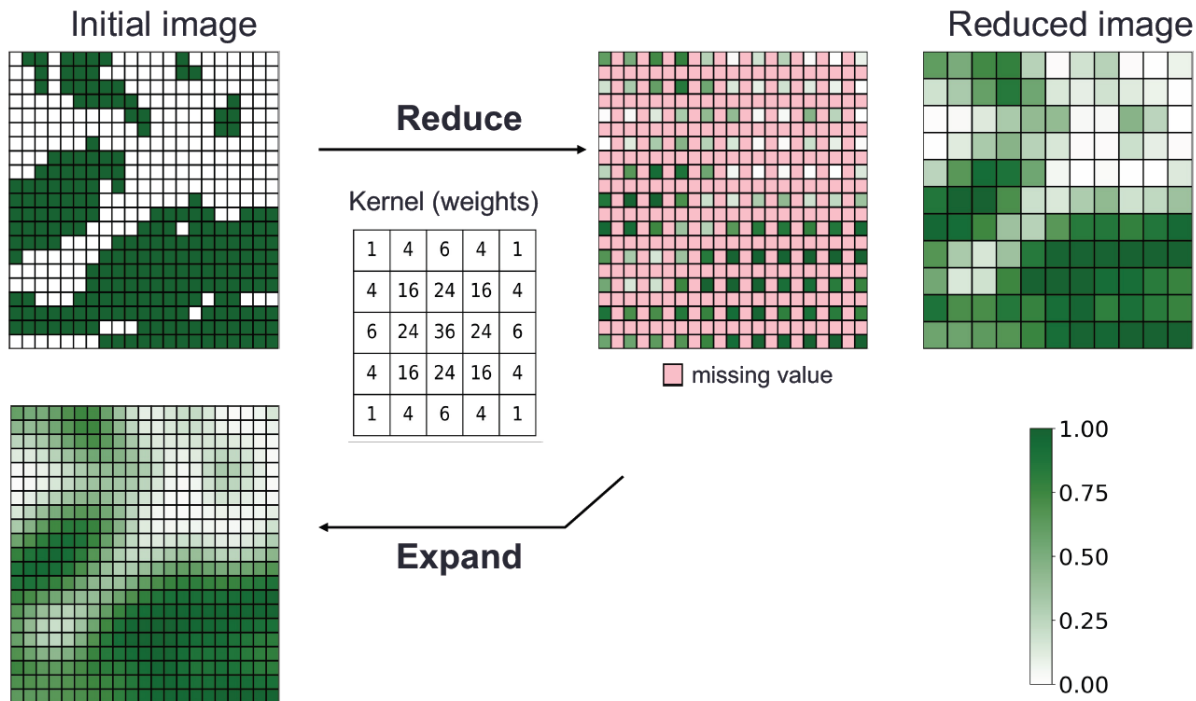
# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

## Multirésolution / pyramides:

On est capable de:

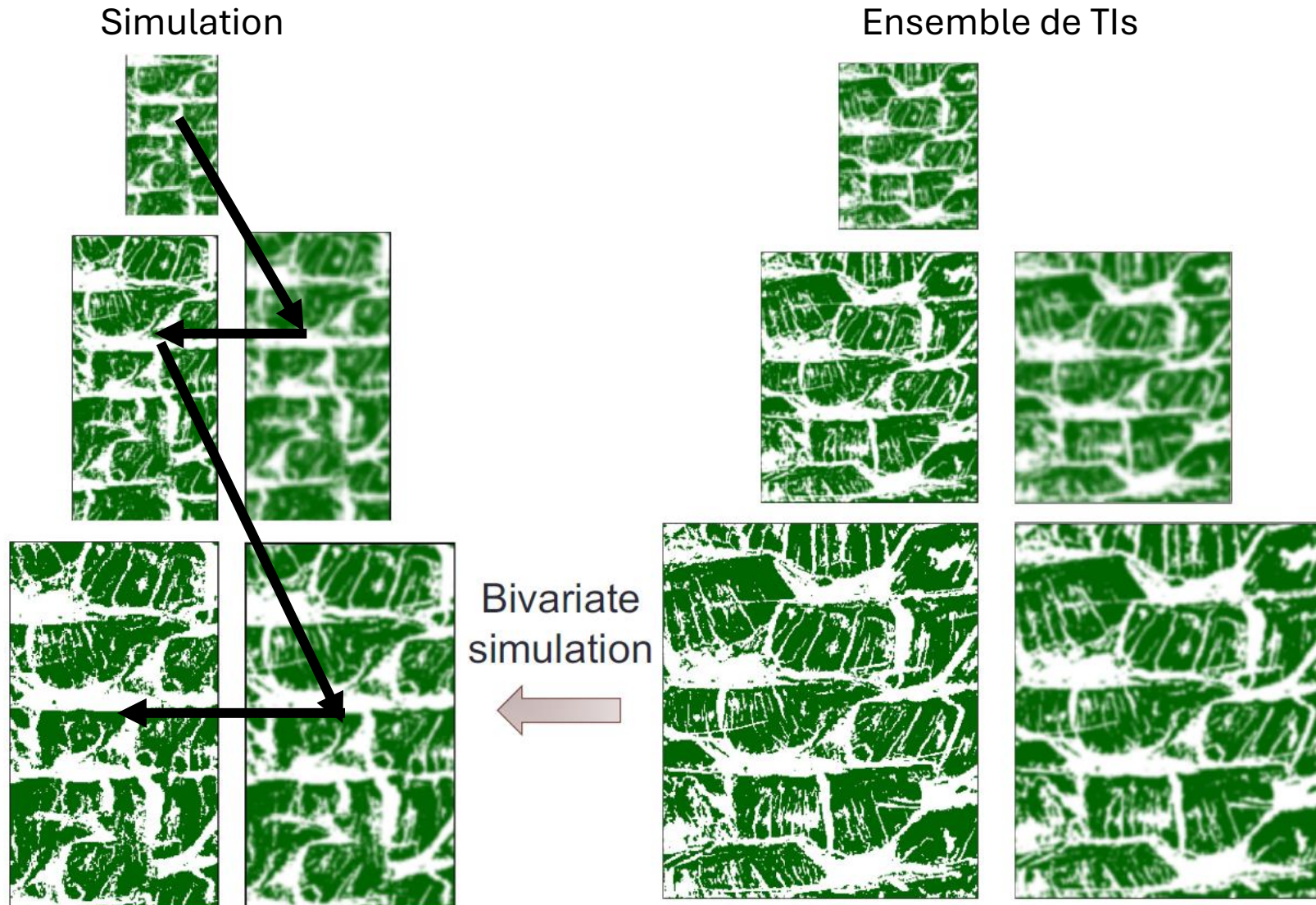
Réduire des images

Étendre des images



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multirésolution / pyramides:

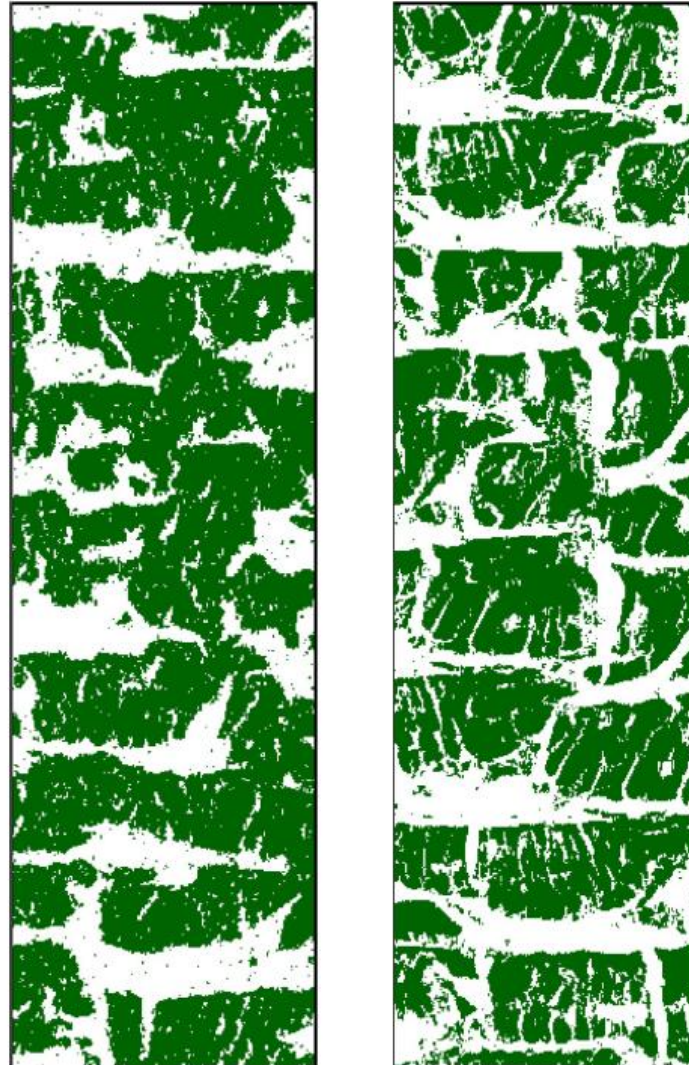


# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

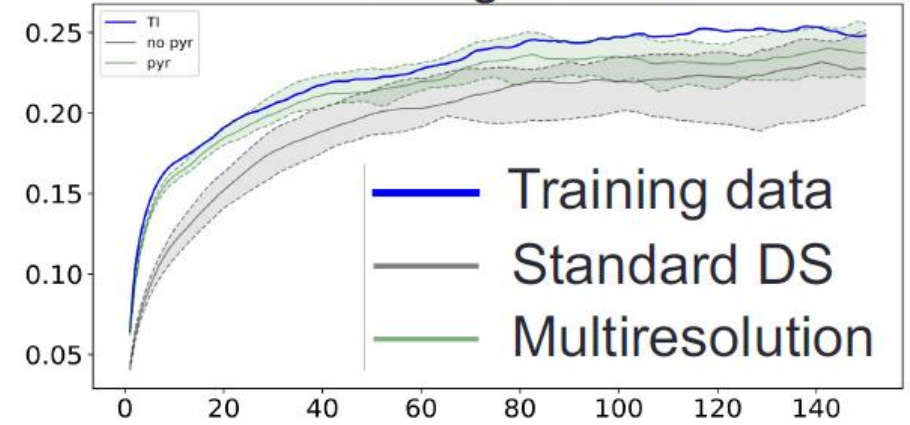
Multirésolution / pyramides:



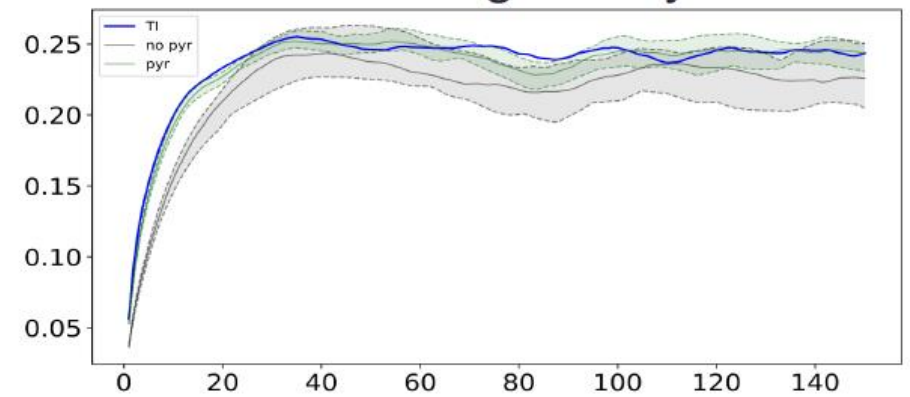
Standard DS    Multiresolution



Variogram - x



Variogram - y



20 realizations



# 1. Simulation multipoints (DeeSee)

**Conclusion :**

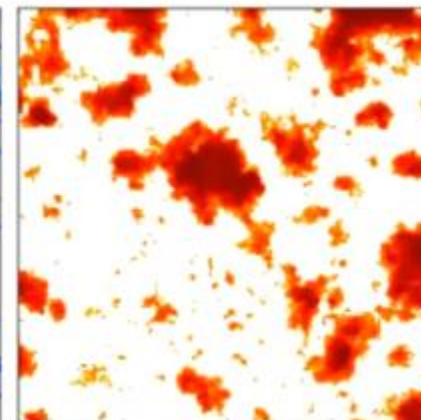
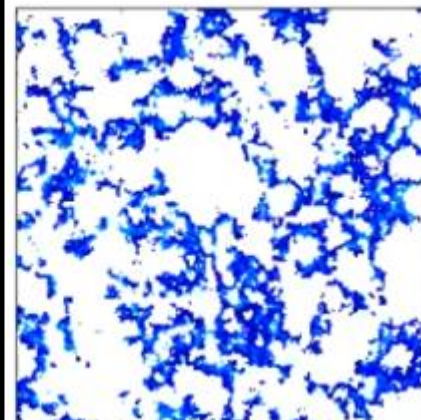
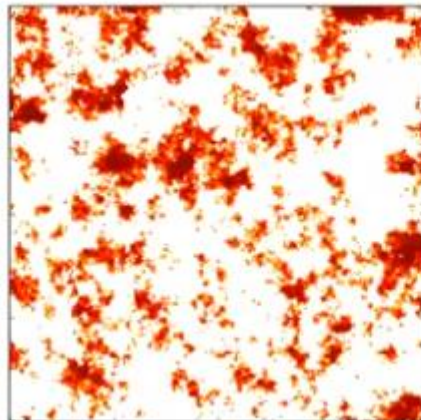
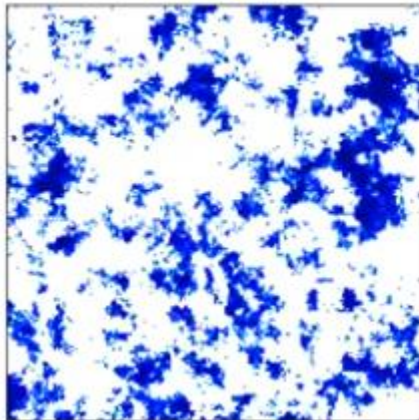
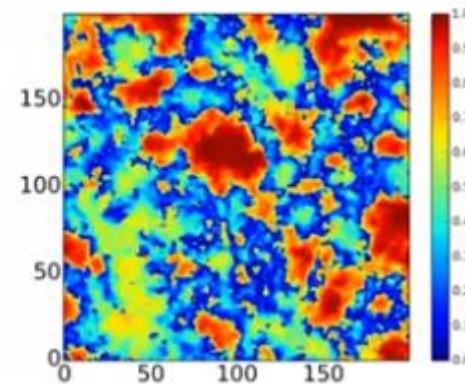
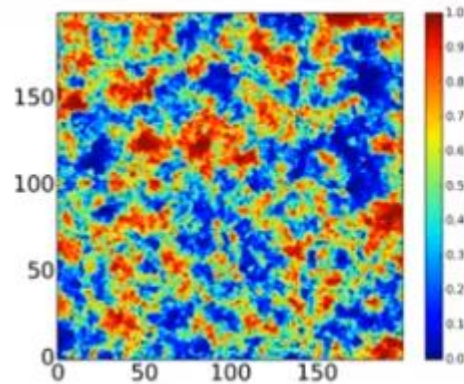
<b>Application de DeeSee permet :</b>
Variables catégorielles
Variables continues
Simulation multivariée conjointe
Proportion globale
Cartes de proportions locales
Valeurs moyennes sur les blocs
Conditionnement de connectivité
Tendances de rotation et de mise à l'échelle
TI non stationnaire
Tolérance sur rotation / mise à l'échelle
Conditionnement de bloc
Multirésolution / pyramides



## 2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

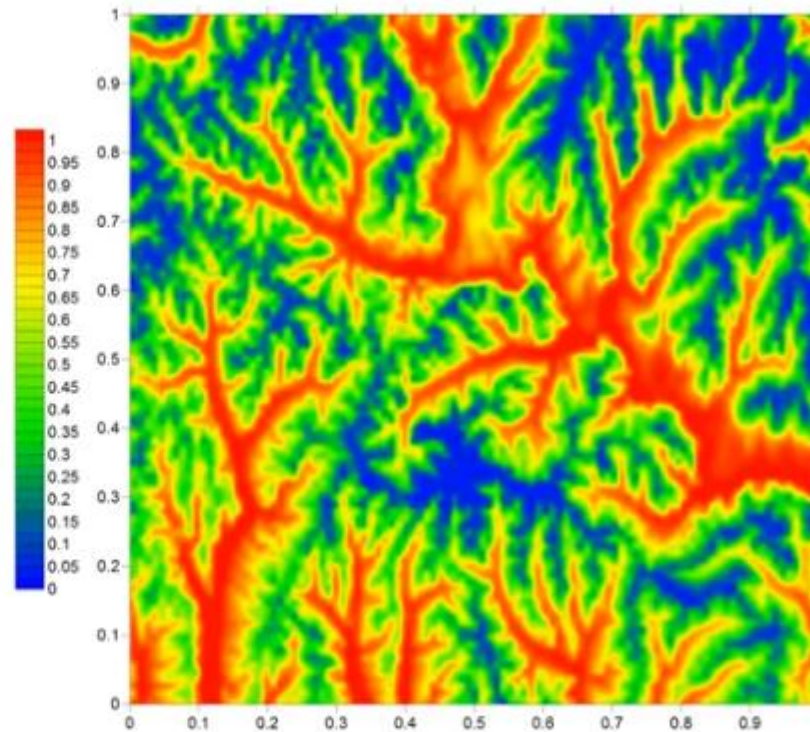
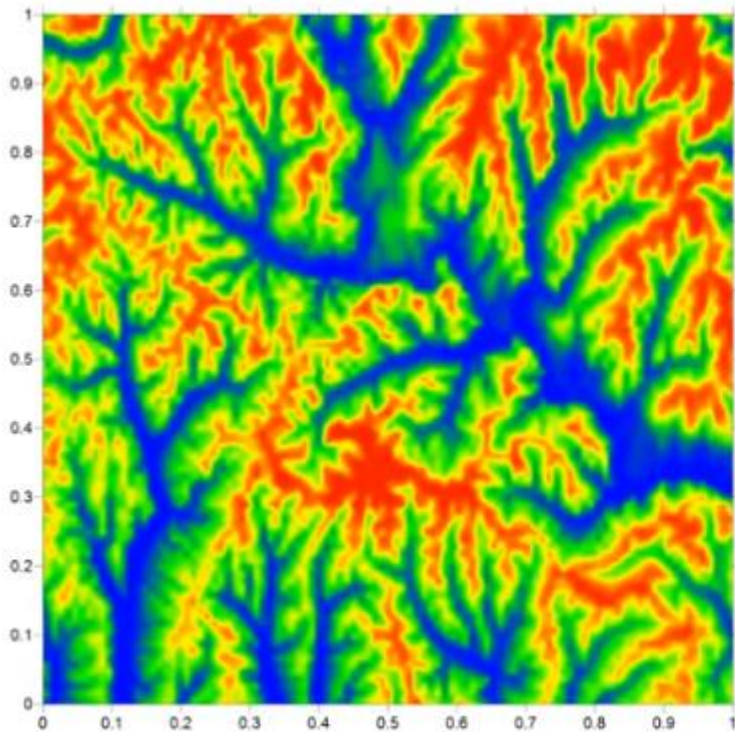
Que remarque-t-on visuellement entre les deux images ?



## 2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

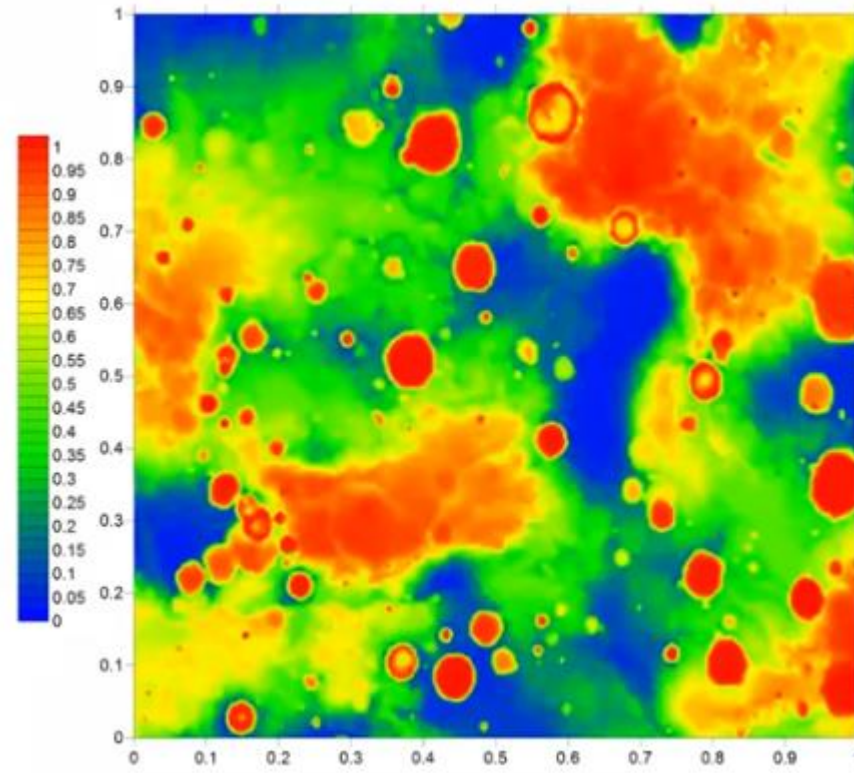
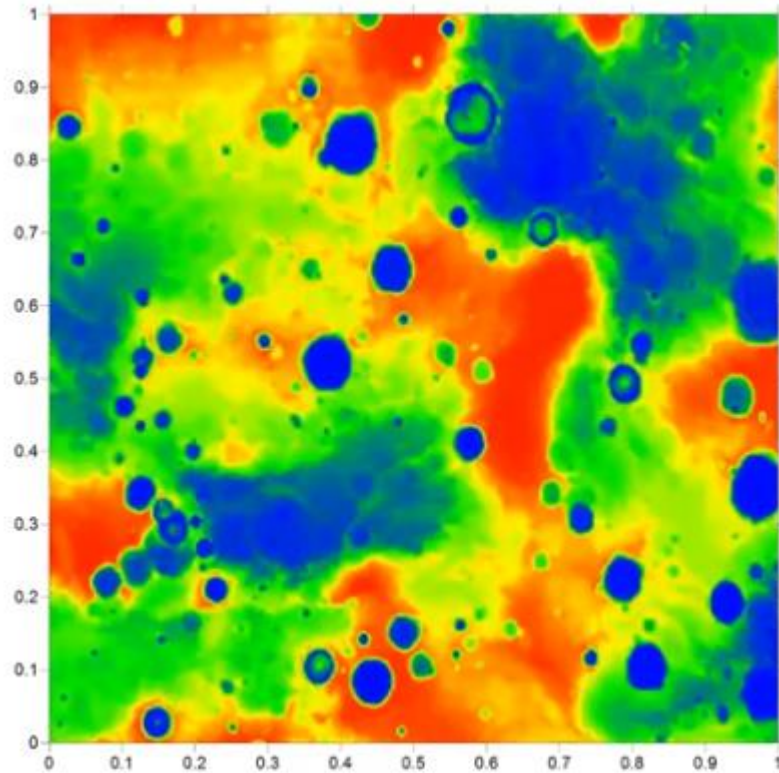
L'une des images est réelle, l'autre est inversée.  
Laquelle est la véritable image ?



## 2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

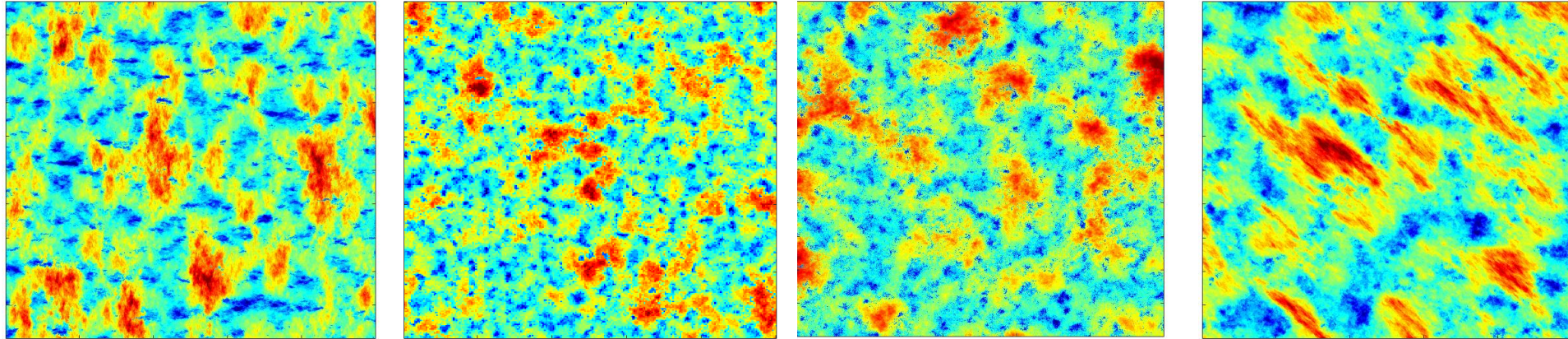
L'une des images est réelle, l'autre est inversée.  
Laquelle est la véritable image ?



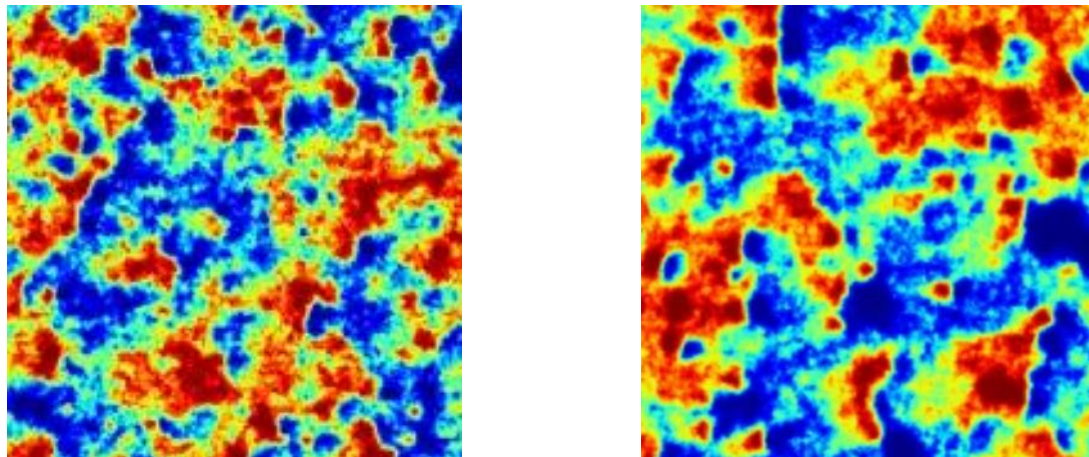
## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Asymétrie Spatiale :

- Différence entre les statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



- Différence entre les statistiques selon l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)



## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Équation :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)

$$A^*(h) = \mathbb{E}[(F_Z(x) + F_Z(x + h) - 1)^3]$$

- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)

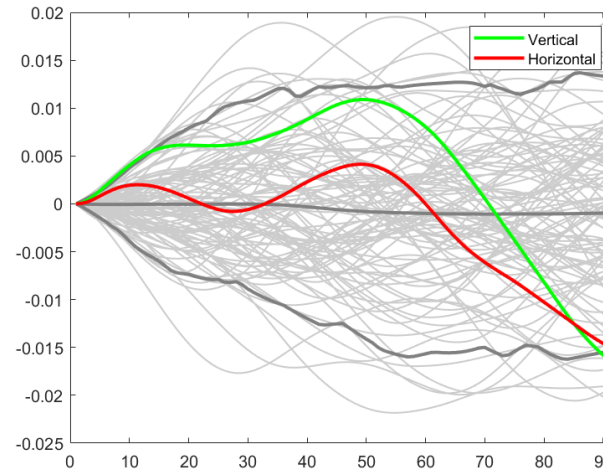
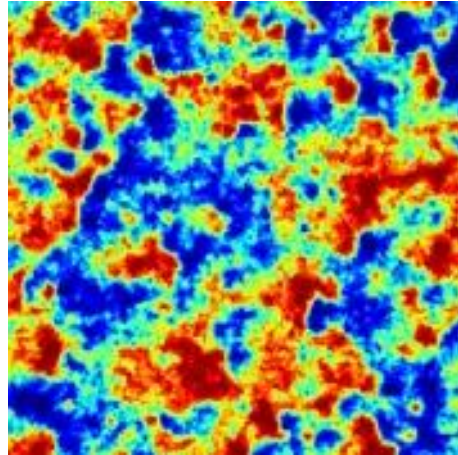
$$A_d(h) = \mathbb{E} \left[ (F_Z(x) - F_Z(x + h))^3 \right]$$



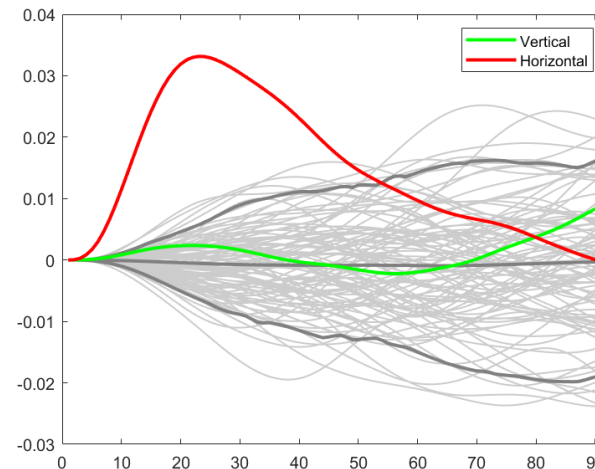
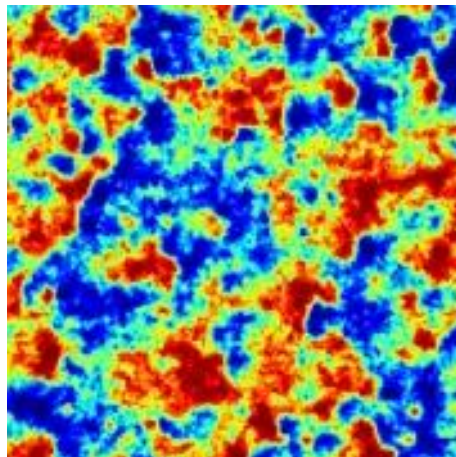
# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Équation :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



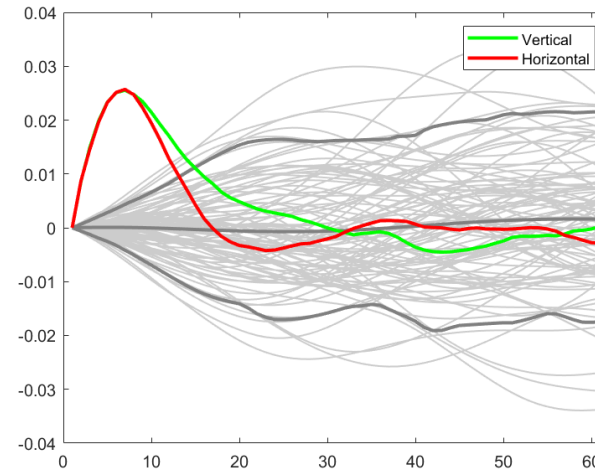
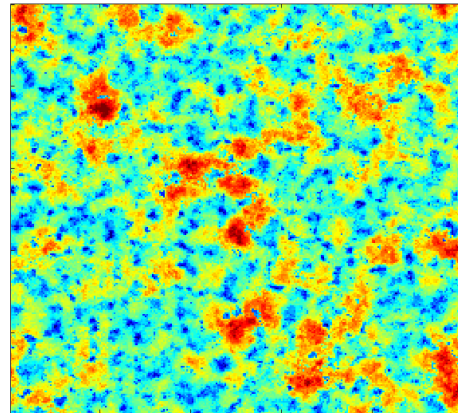
- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)



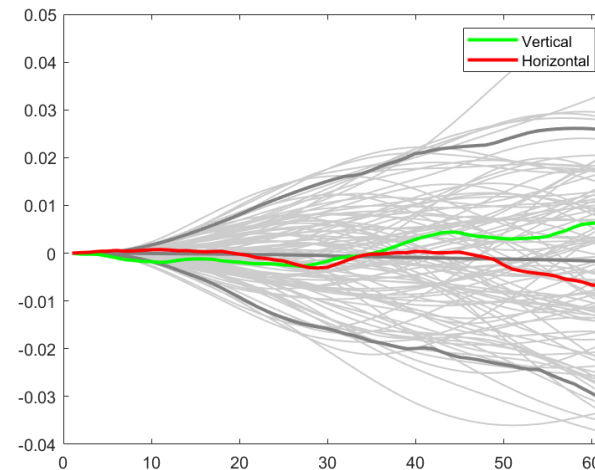
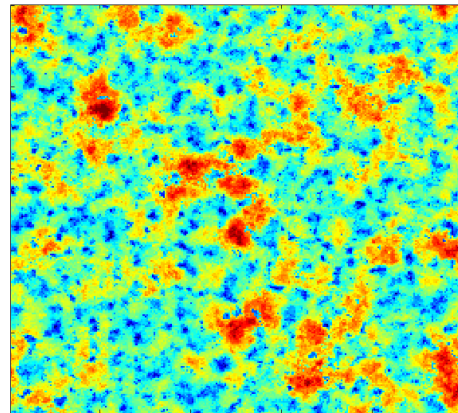
# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Visualisation des équations :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)





## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Comment simuler les statistiques d'ordre supérieur ? :

Plusieurs stratégies :

- Par optimisation stochastique (Hörning et Bárdossy, 2018; Lauzon et Marcotte, 2019, 2020)
- Par SGS :
  - approche SGS basée sur des copules (Li, 2010)
  - approche SGS basée sur les moments spatiaux d'ordre supérieur (Minniakhmetov et Dimitrakopoulos, 2022)
- Par définition d'une famille de champ spatial non-gaussien (Bárdossy et Hörning, 2023)

Chaque méthode permet de gérer une statistique d'ordre supérieur sans être ne mesure de tout les simuler adéquatement.



## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Par optimisation :

L'idée est de générer un champ aléatoire gaussien et de le perturber de manière itérative.

À chaque perturbation, nous calculons les statistiques d'ordre supérieur et les comparons avec celles déduites des données.

Nous conservons (ou non) la perturbation selon un critère (recuit, acceptation/rejet, probabilité, etc.).

À la fin, le champ gaussien aura été suffisamment perturbé pour converger vers un champ non-gaussien avec les caractéristiques désirées.

Algorithme existant:

*Random Mixing* (Bárdossy et Hörning, 2016)

*Phase annealing* (Hörning et Bárdossy, 2018)

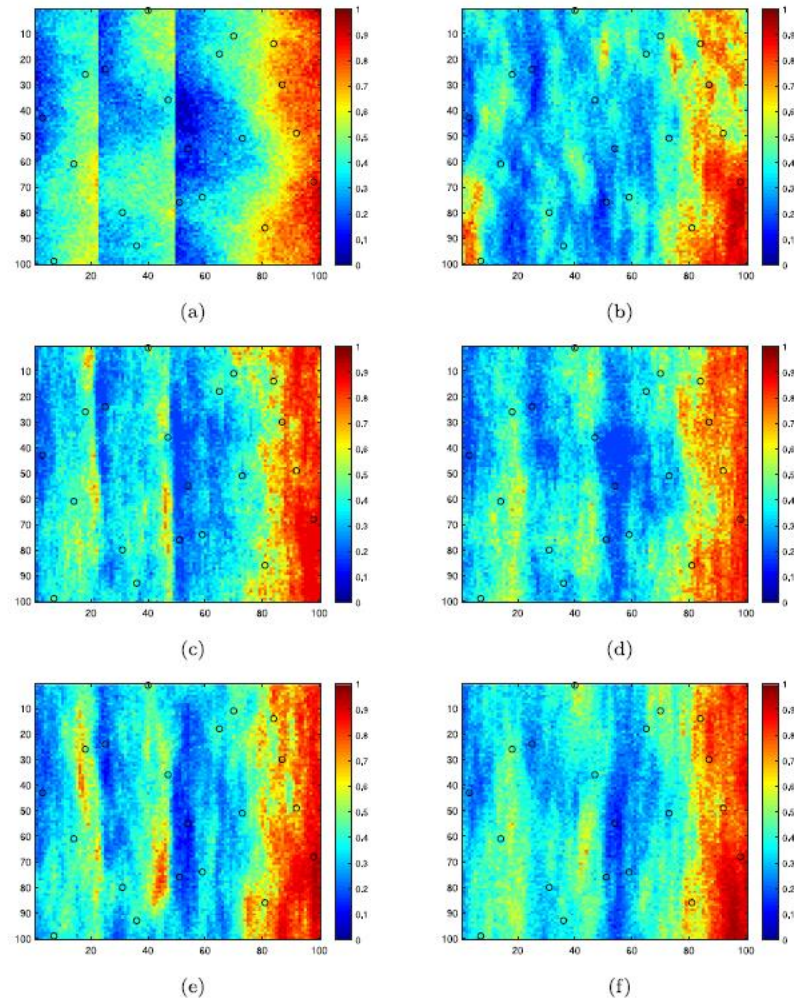
FFTMA-SA (Lauzon et Marcotte, 2019)

S-STBM (Lauzon et Marcotte, 2020)

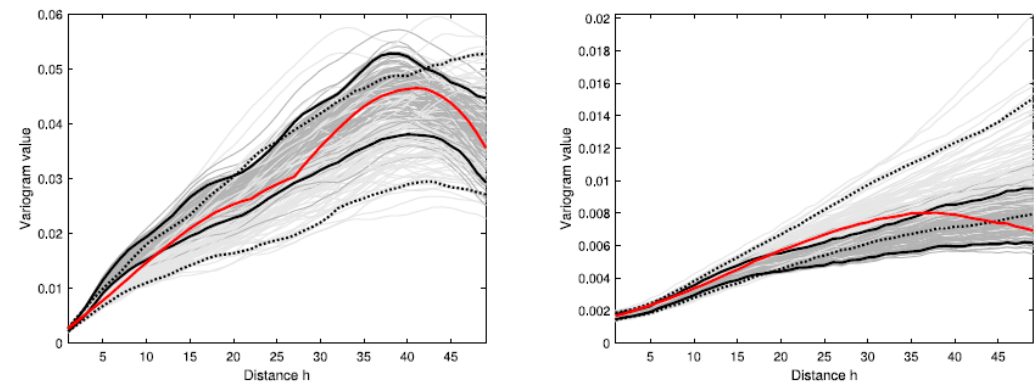


# 2. Statistique d'ordre supérieur

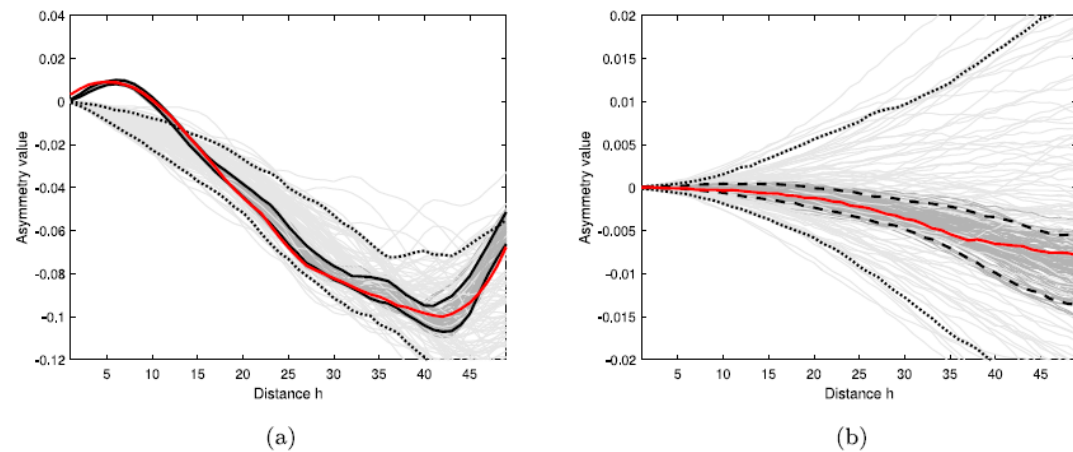
## Par optimisation : Asymétrie directionnelle



**Fig. 5.** (a) Reference field and location of conditioning data (black circles); (b) Uncalibrated STBM; (c) FFTMA-SA with OF directional asymmetry; (d) FFTMA-SA with OF third-order moments; (e) S-STBM with OF directional asymmetry; (f) S-STBM with OF third-order moments.



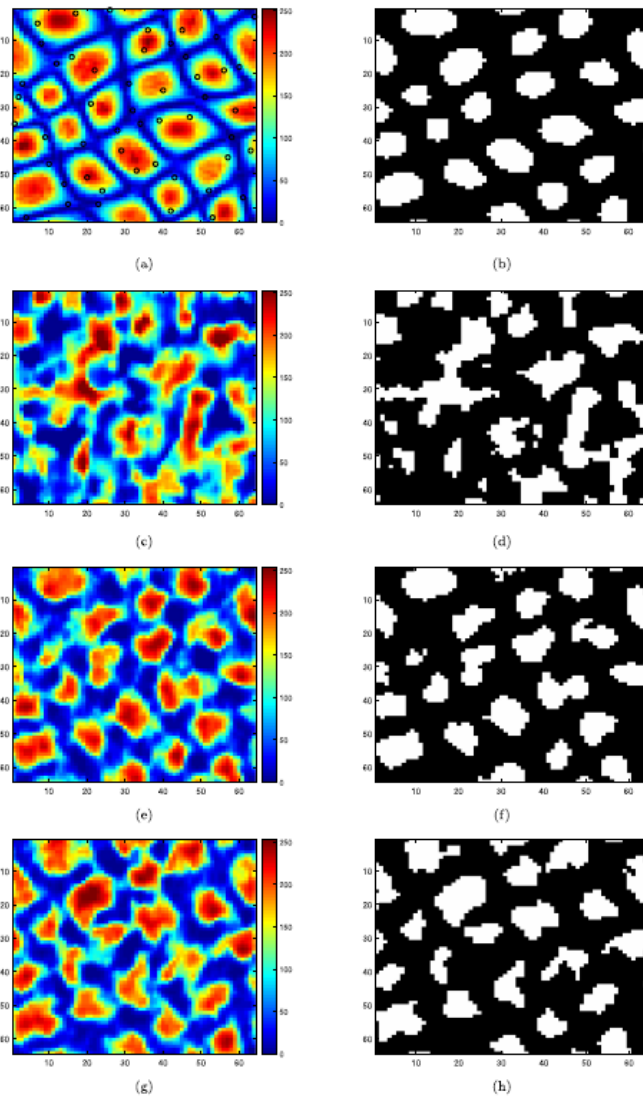
**Fig. 6.** Synthetic case. (a) Variograms along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).



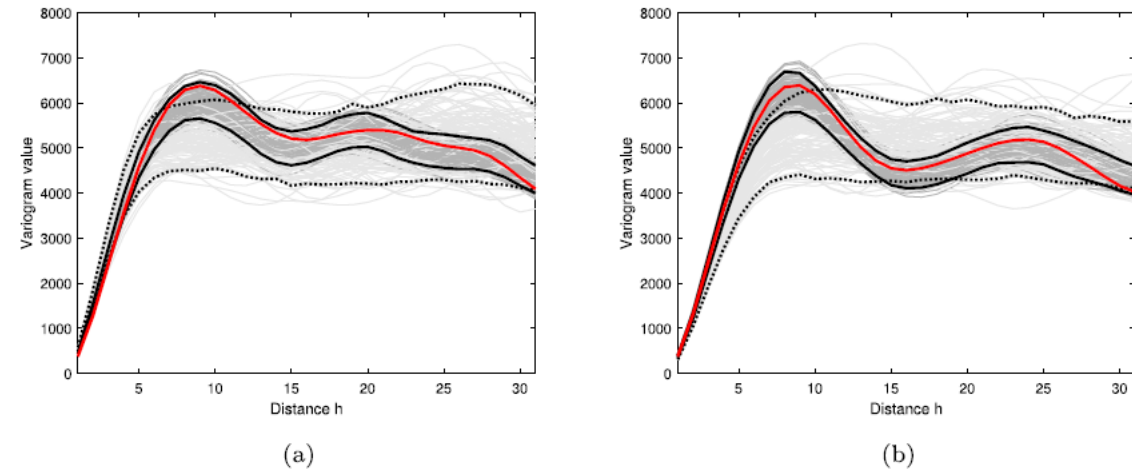
**Fig. 7.** Synthetic case. (a) Asymmetry function along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).

# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Par optimisation : Moment non-centré d'ordre 3



**Fig. 8.** Left column: Reference and realizations; Right column: thresholded at 70th percentile; First row: Reference field and 50 HD (black circle); Second row: Uncalibrated STBM with 50 HD; Third row: S-STBM with 50 HD; Fourth row: S-STBM with no HD. (20 000 OF calls, third-order spatial moments).



**Fig. 9.** “Giraffe” TL. (a) Variograms along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).

## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Par optimisation : Fonction objectif et calcul rapide par FFT

Par exemple, 
$$OF(\mathbf{z}^{sim}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( A_d^{sim}(\mathbf{h}_i) - A_d^{données}(\mathbf{h}_i) \right)^2$$

Calculer  $A_d$  (ou autres statistiques d'ordre supérieur) sous forme expérimentales revient lourd mathématiquement, surtout lorsque le modèle géologique est 3D avec plusieurs points :

Marcotte (1996) a développé des équations permettant le calcul rapide du variogramme par FFT.

Les statistiques d'ordre supérieurs peuvent aussi être résolues par FFT (Lauzon and Hörning, 2024).

## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Rappel : Covariance croisée non-centrée :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$$

Théorème de convolution :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV \rightarrow \mathcal{F}[C(\mathbf{h})] = \mathcal{F}^*(f(\mathbf{u})) \times \mathcal{F}(g(\mathbf{u}))$$

On peut donc calculer une covariance croisée non-centré en prenant la transformer de Fourier de  $f(x)$ , en appliquant le conjugué complexe au résultat, et en multipliant élément par élément le résultat avec la transformer de Fourier de  $g(x)$ . Il suffit de prendre la transformer de Fourier inverse pour obtenir la covariance croisée non-centré.

## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

En présence de données non-observées, il suffit de définir une variable indicatrice contenant la présence (ou non) d'une donnée.

$$I_f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si la donnée existe} \\ 0, & \text{si la donnée n'existe pas} \end{cases}$$

Par la suite, l'équation de la covariance croisée non-centré devient :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$$

Ici, l'ajout de l'indicatrice ne sert à rien, car  $I_f(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ .

Cependant, pour le calcul du variogramme et d'autres statistiques, les indicatrices sont utiles.



## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Variogramme :

$$\gamma_{fg}(\mathbf{h}) = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})[f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})][g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})]dV$$

$$V = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV = N(\mathbf{h})$$

On retrouver la forme  $\int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$  pour appliquer le théorème de convolution





## 2. Statistique d'ordre supérieur

### Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Donc pour  $N(\mathbf{h})$ , on pose  $f^*(\mathbf{x}) = I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})$  et  $g^*(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  et on obtient :

$$N(\mathbf{h}) = \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}^*(f^*(x))\mathcal{F}(g^*(x)) \right)$$

Pour l'intégrale du variogramme, il faut développer la multiplication en une série d'addition, on obtient à la fin :

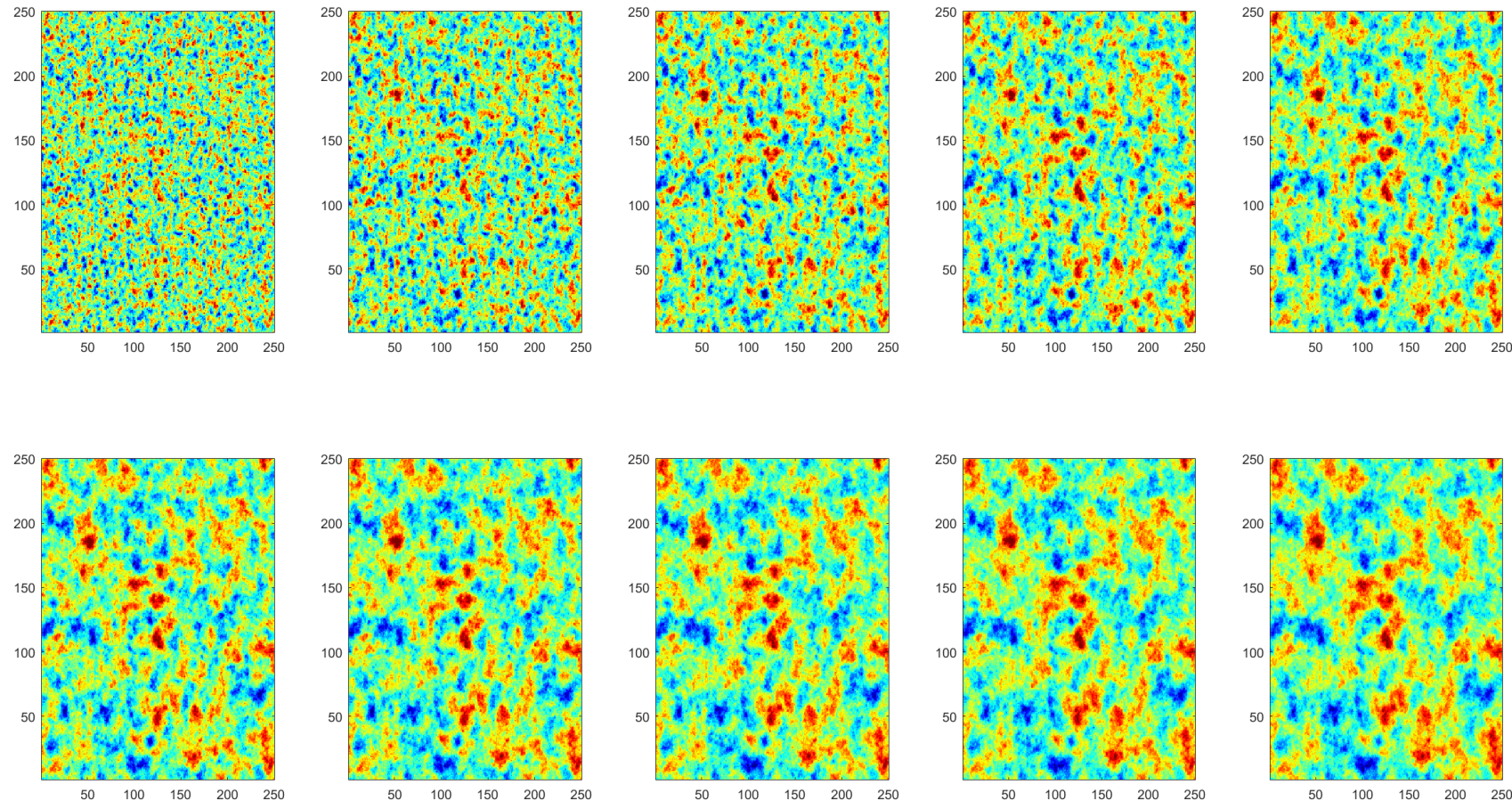
$$\gamma_{fg}(\mathbf{h}) = \frac{\mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}^*(I_f I_g)\mathcal{F}(fg) - \mathcal{F}^*(f I_g)\mathcal{F}(I_f g) - \mathcal{F}^*(I_f g)\mathcal{F}(f I_g) + \mathcal{F}^*(fg)\mathcal{F}(I_f I_g) \right)}{2 \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}^*(I_f I_g)\mathcal{F}(I_f I_g) \right)}$$



# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Par famille:

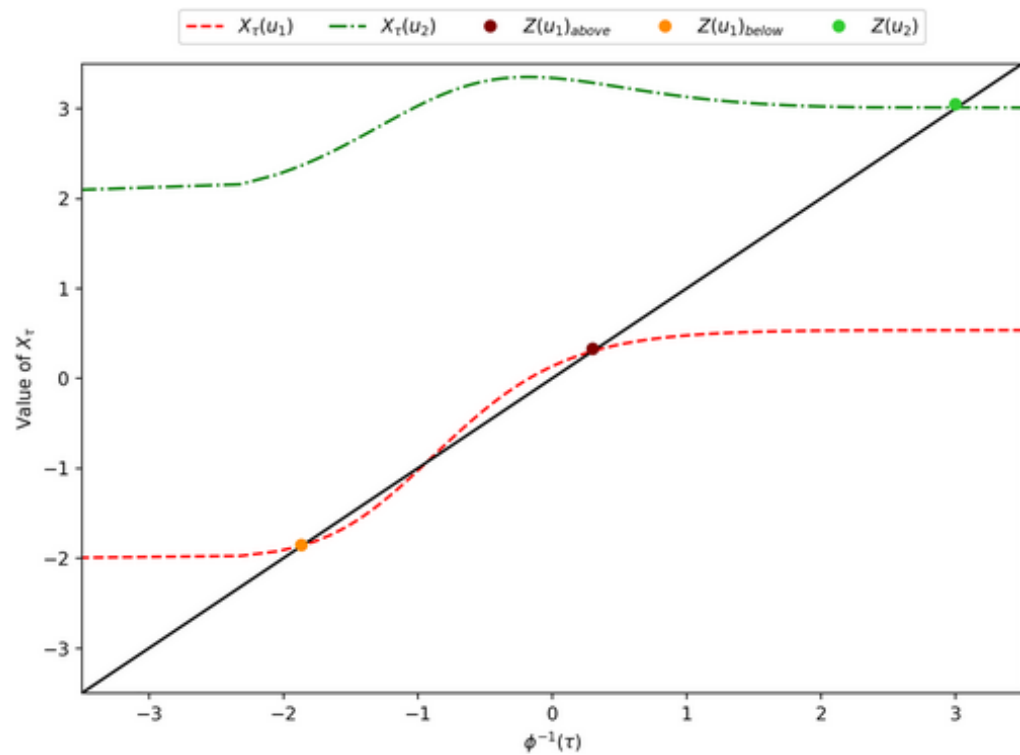
Définir une famille de simulation ayant le même germe aléatoire (p.ex., par FFTMA avec  $U$  fixe, mais avec une fonction de covariance variable)



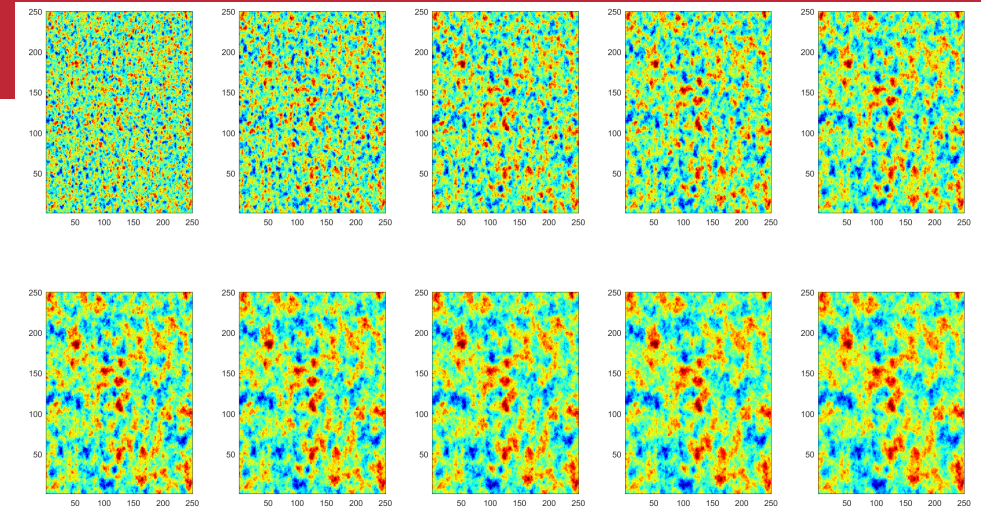
# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Par famille:

Définir une famille de simulation ayant le même germe aléatoire (p.ex., par FFTMA avec  $U$  fixe, mais avec une fonction de covariance variable)

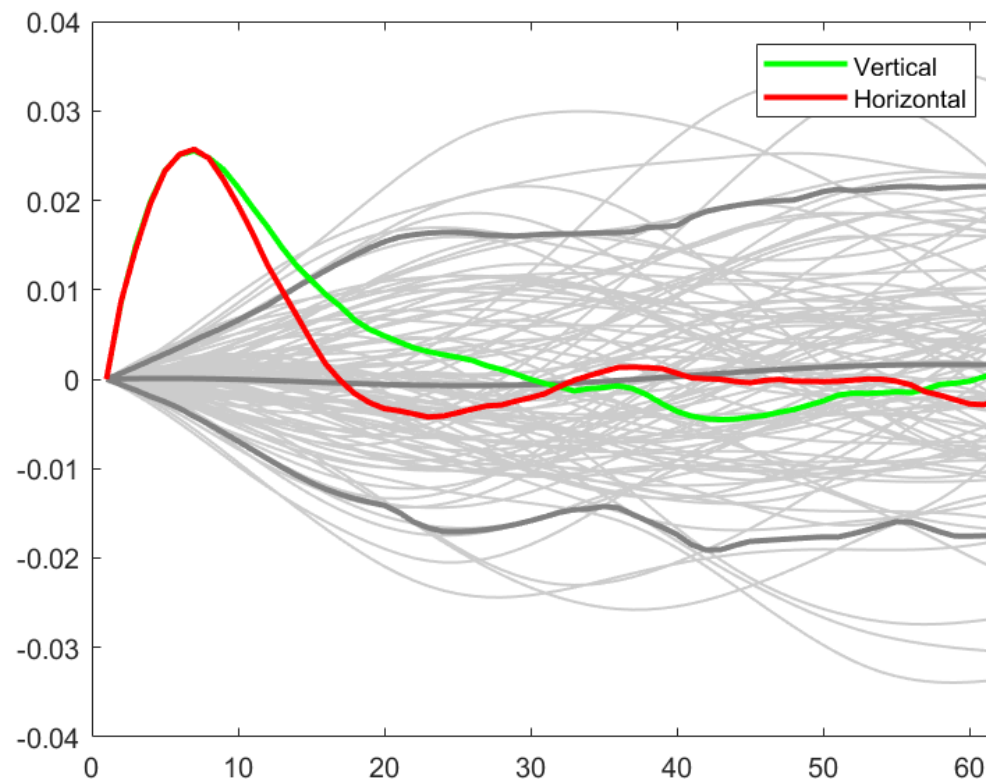
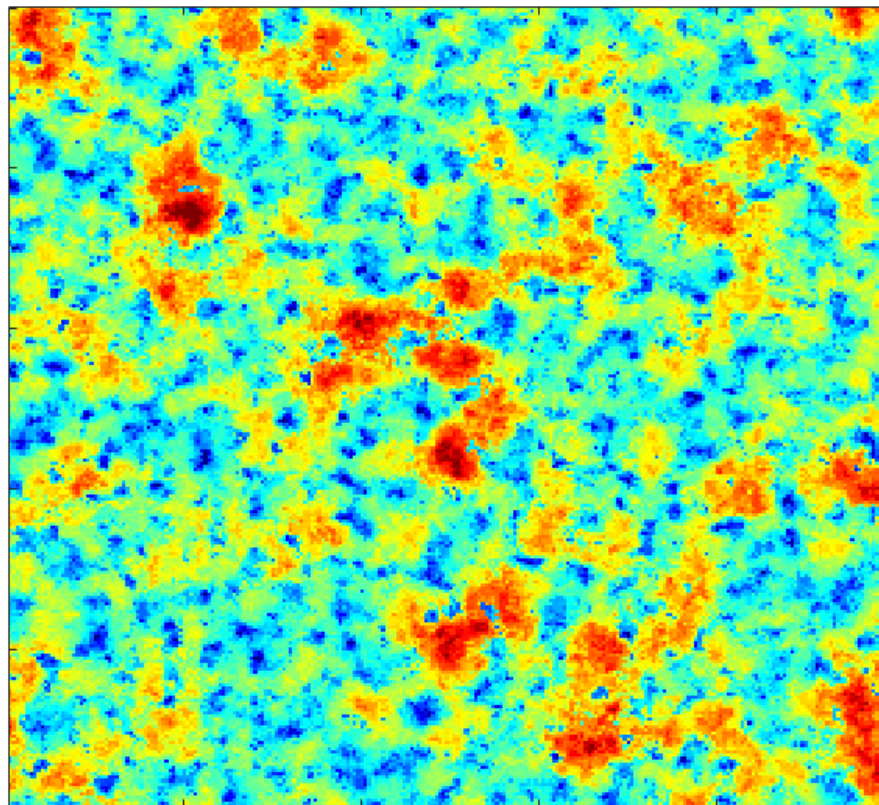
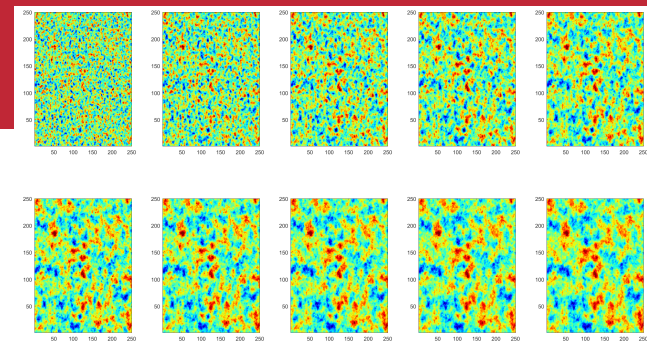


$$Z(u) = \begin{cases} X_{\tau_i}(u) & \text{if } \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) < X_{\tau_i}(u) \leq \Phi^{-1}(\tau_i) \\ & \text{and } X_{\tau_j}(u) > \Phi^{-1}(\tau_j) \quad \forall j < i \\ \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) & \text{if } X_{\tau_i}(u) \leq \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) \\ & \text{and } X_{\tau_j}(u) > \Phi^{-1}(\tau_j) \quad \forall j < i \end{cases}$$



# 2. Statistique d'ordre supérieur

Par famille:



## 2. Statistique d'ordre supérieur

**Moment statistique centré d'ordre supérieur :**

$$M_{c,1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(x_i)$$

$$M_{c,2}(h_1) = \frac{1}{N(h_1)} \sum_{i=1}^{N(h_1)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)$$

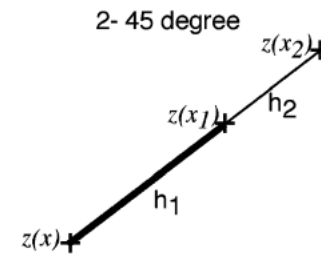
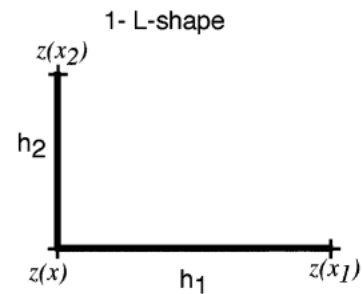
$$M_{c,3}(h_1, h_2) = \frac{1}{N(h_1, h_2)} \sum_{i=1}^{N(h_1, h_2)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)Z(x_i + h_2)$$



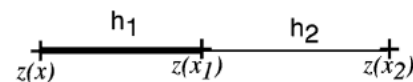
# 2. Statistique d'ordre supérieur

Moment statistique centré d'ordre supérieur :

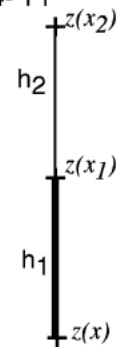
$$M_{c,3}(h_1, h_2) = \frac{1}{N(h_1, h_2)} \sum_{i=1}^{N(h_1, h_2)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)Z(x_i + h_2)$$



3- XX



4- YY



# 2. Statistique d'ordre supérieur

## Moment statistique centré d'ordre supérieur :

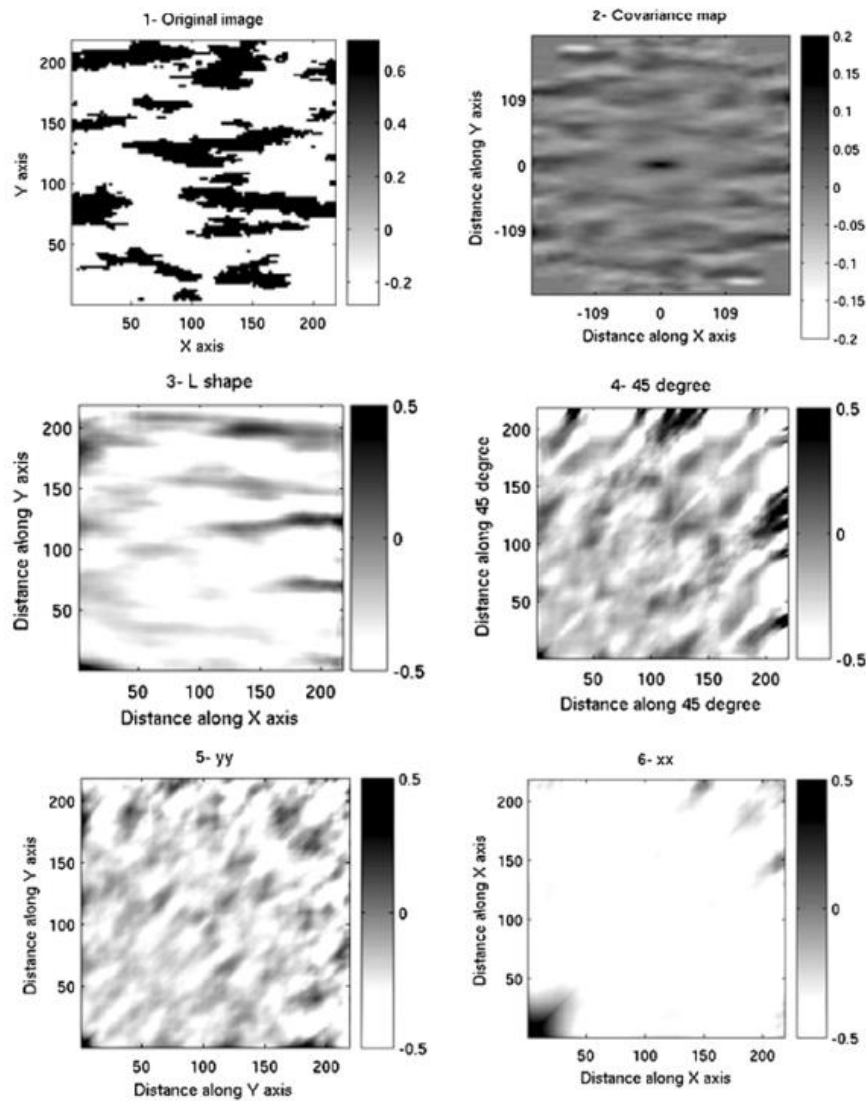


Fig. 8 Example 1, from top left to bottom right: (1) original image, (2) covariance map, and (3) to (6) cumulant maps using templates shown in Fig. 3

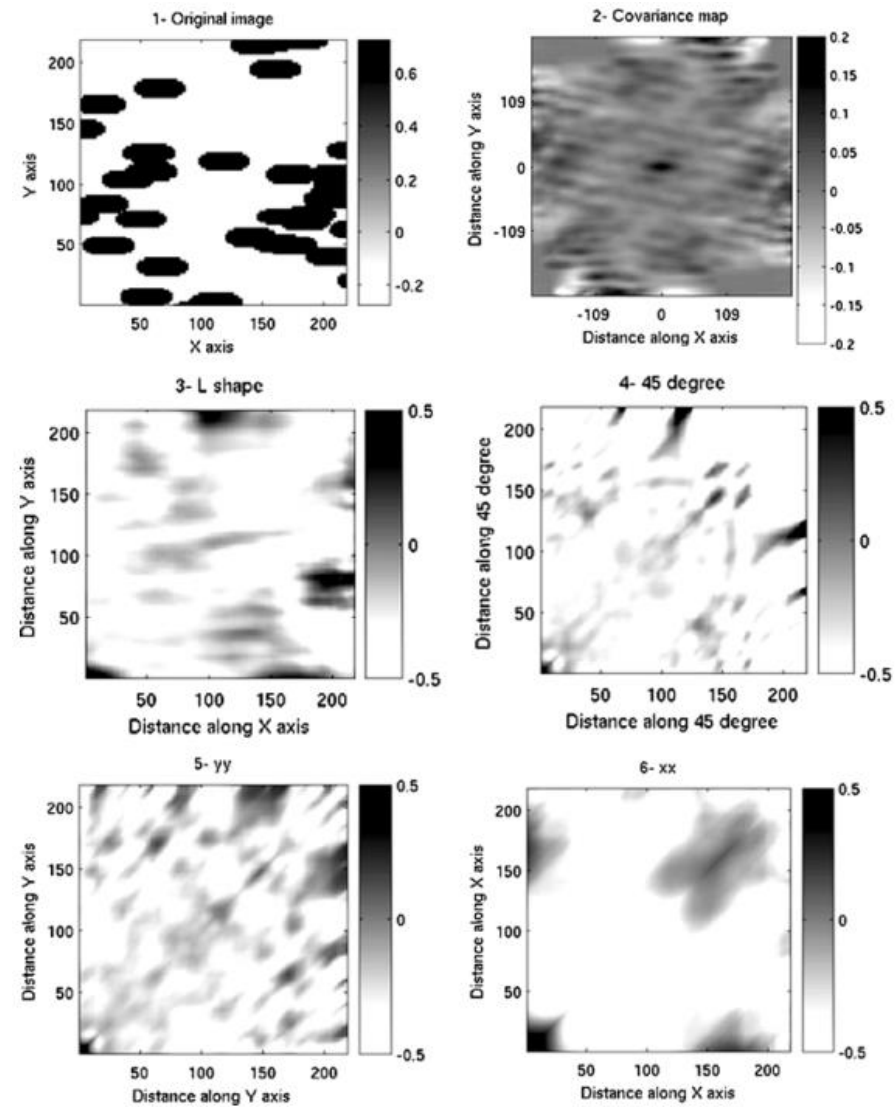


Fig. 9 Example 2, from top left to bottom right: (1) original image, (2) covariance map, and (3) to (6) cumulant maps using templates shown in Fig. 3