

GML6402A : Géostatistique

Cours 9 : Simulation de faciès et statistique
d'ordre supérieur



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Décrire le fonctionnement de la méthode DeeSee;
- Comprendre l'importance des statistiques d'ordre supérieur en géosciences
- Être en mesure de simuler des champs présentant des statistiques d'ordre supérieur



Plan du cours

1. Simulation multipoints (DeeSee)
2. Statistique d'ordre supérieur
 - Asymétrie de rang
 - Asymétrie directionnelle
 - Moment centré d'ordre supérieur
3. Simulation de statistique d'ordre supérieur
4. Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieur



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Motivation : Fournir des modèles plus réalistes que d'autres techniques ne peuvent réaliser

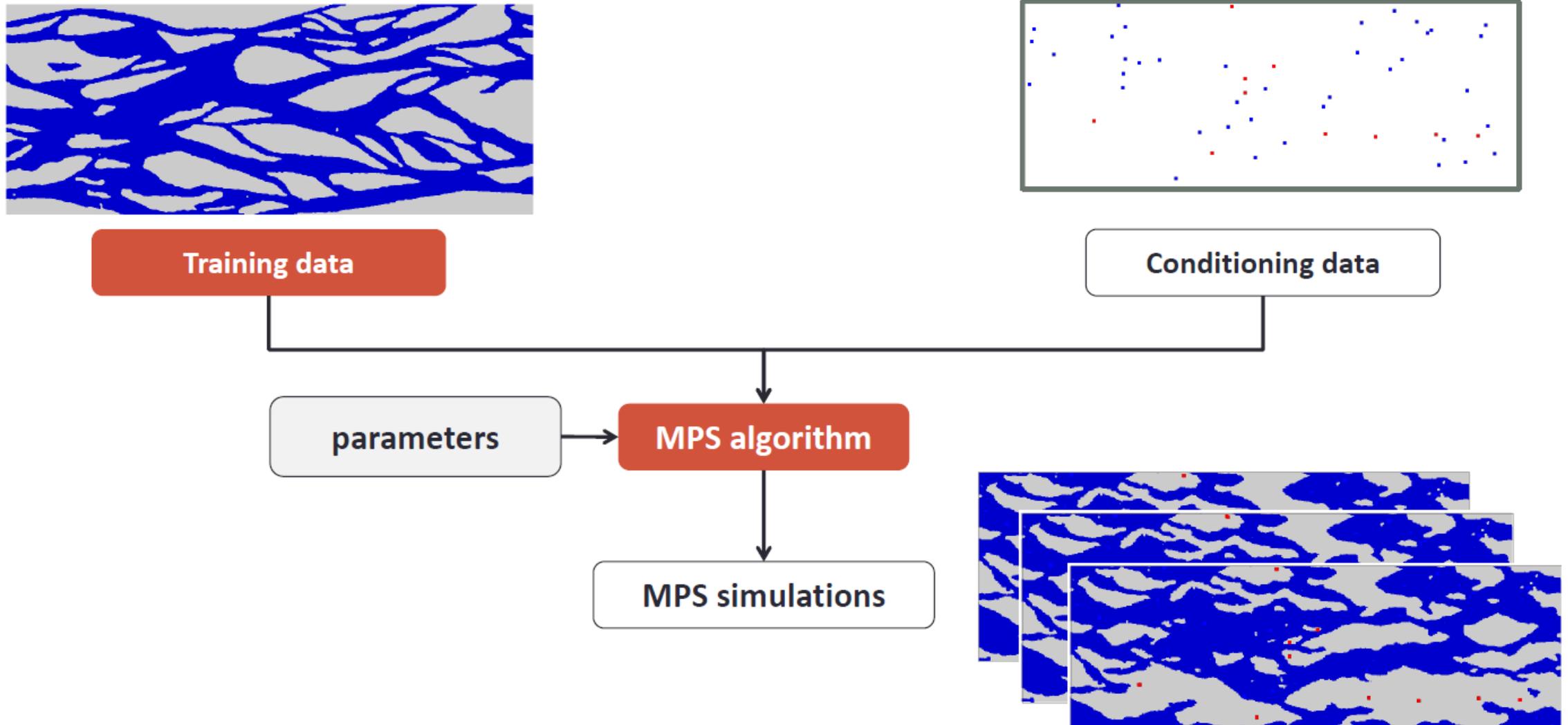
Trois idées clés pour le multipoints :

1. Les statistiques à deux points ne suffisent pas à décrire les modèles :
→ Statistiques à points multiples
2. Les données ponctuelles sur le terrain sont insuffisantes :
→ Ensemble de données d'entraînement / image d'entraînement
3. Modèle statistique analytique non exploitable :
→ Approche non paramétrique



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Workflow :



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Remarque :

- Pour estimer une probabilité, il faut des **répétitions** de motifs similaires
- Les motifs doivent être **bien répartis** dans l'image d'entraînement. Sinon, la probabilité peut être dénuée de sens
- L'image d'entraînement doit **être stationnaire** et afficher des répétitions de motifs



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Remarque :

- Pour estimer une probabilité, il faut des **répétitions** de motifs similaires
- Les motifs doivent être **bien répartis** dans l'image d'entraînement. Sinon, la probabilité peut être dénuée de sens
- L'image d'entraînement doit **être stationnaire** et afficher des répétitions de motifs



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Théorie :

Distance :

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad a_i = \begin{cases} 0, & \text{si } Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}_i) = Z(\mathbf{y} + \mathbf{h}_i) \\ 1, & \text{si } Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}_i) \neq Z(\mathbf{y} + \mathbf{h}_i) \end{cases}$$

L'idée du DS consiste à scanner les données d'entraînement :

1. On trouve le premier évènement tel que :

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) < t$$

2. Une fraction d de la TI a été scanné, et on garde le meilleur évènement rencontré.

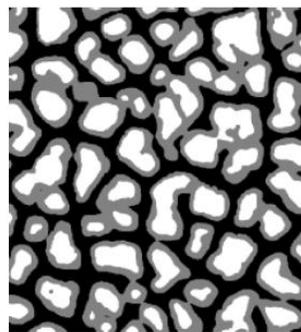
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Paramètres :

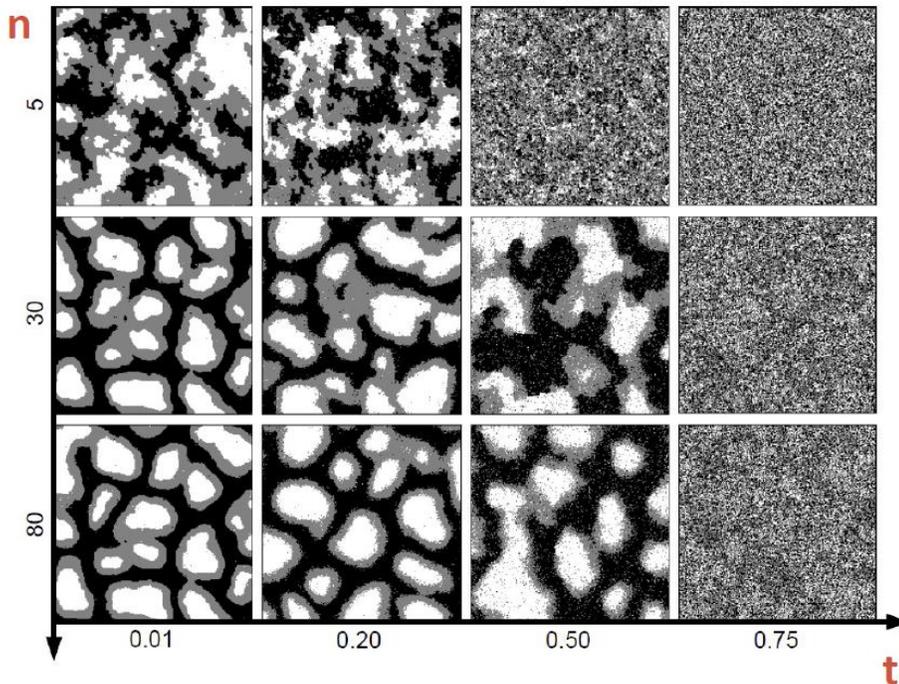
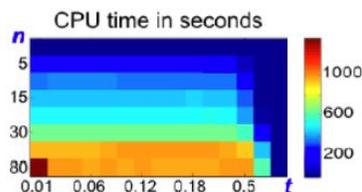
Taille du voisinage (n): dépend de la dimension de l'espace, 10 à 100

Seuil d'acceptation pour la distance (t): une valeur comprise entre 0 et 1

Fraction de balayage maximale de la TI (f): Entre 0,1 et 0,5



Training image



$$f = 0.3$$

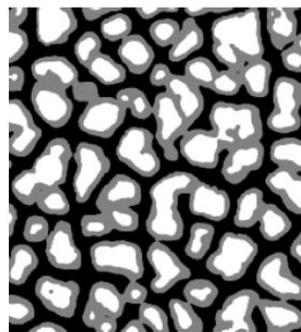
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Paramètres :

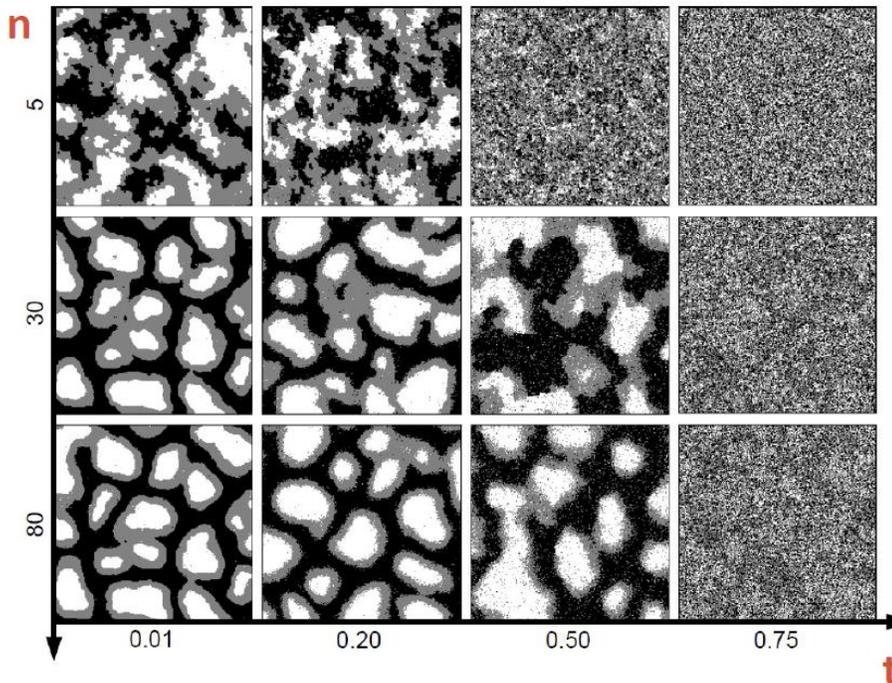
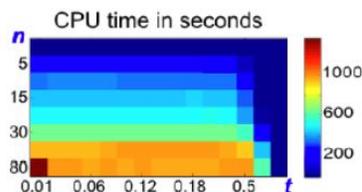
Taille du voisinage (n): dépend de la dimension de l'espace, 10 à 100

Seuil d'acceptation pour la distance (t): une valeur comprise entre 0 et 1

Fraction de balayage maximale de la TI (f): Entre 0,1 et 0,5



Training image



$$f = 0.3$$

1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Pour simuler des structures avec

- Orientations;
- Taille des structures qui diffèrent de ce qui est dans le TI;
- Proportions de faciès.

Peut être appliqué

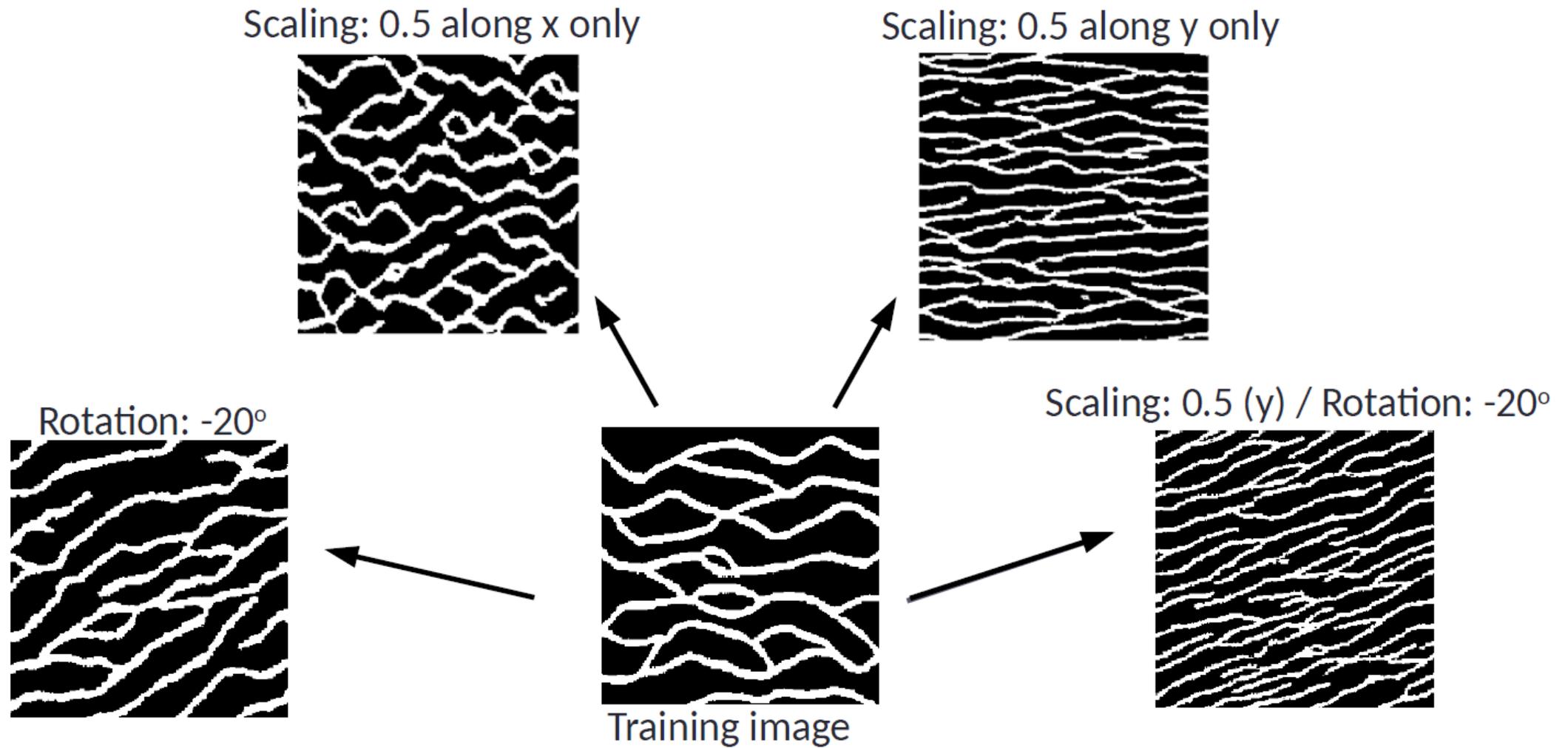
- **Globalement** → même transformation (rotation / mise à l'échelle) / proportion ciblesur toute la grille de simulation
- **Localement** → nécessite une carte des angles / rapports d'échelle / proportions



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

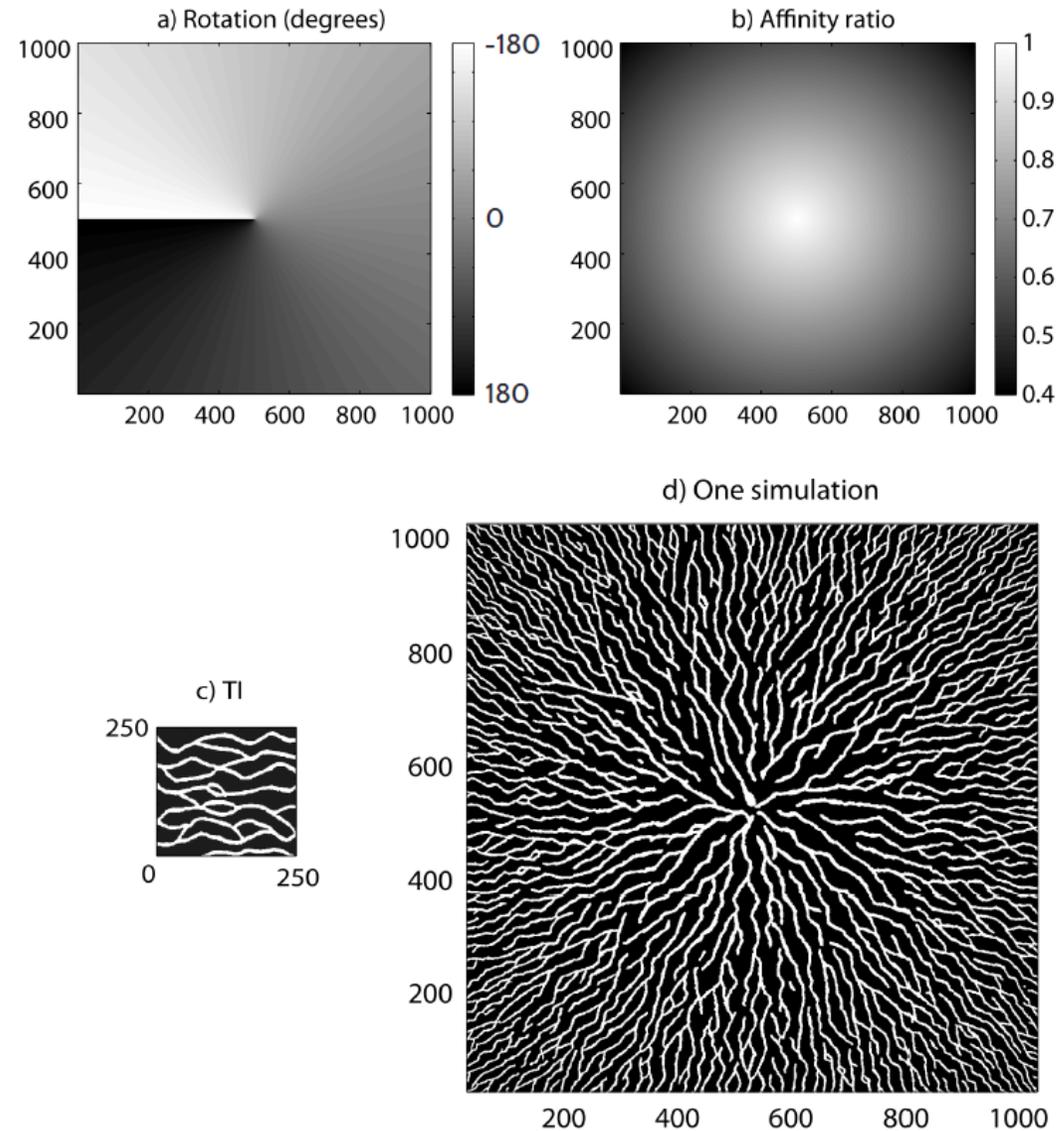
Globalement :



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Localement :



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Fonctionnement

**La TI n'est jamais
modifiée**

Rotation:

Appliquer une certaine rotation à la TI

→ Le motif est tourné en utilisant la rotation inverse avant de scanner la TI

Mise à l'échelle :

Appliquer une certaine dilatation à la TI

→ Le motif est dilaté par le rapport à l'inverse avant de scanner la TI

Rotation et mise à l'échelle:

Appliquer une dilatation, **puis** une rotation à la TI

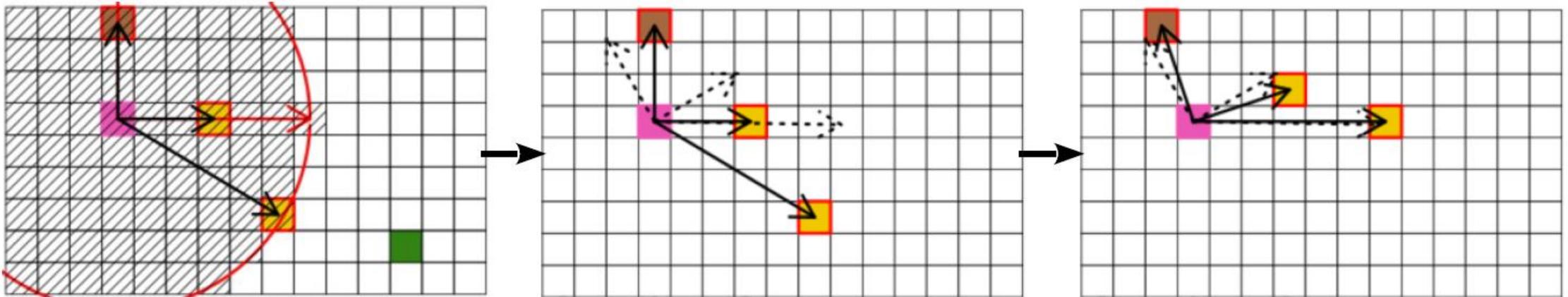
→ Le motif est transformé en utilisant la transformation géométrique inverse

1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Objectif : obtenir des structures tournées de 30° dans le sens des aiguilles d'une montre : azimuth = 30°

Simulation d'une cellule, le pixel rose :



Identifier le motif dans la grille de simulation



Appliquer une rotation de 30° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre



Obtenir le nouveau motif (en *arrondissant* les décalages)



Scanner la TI avec le nouveau motif

1. Simulation multipoints (DeeSee)

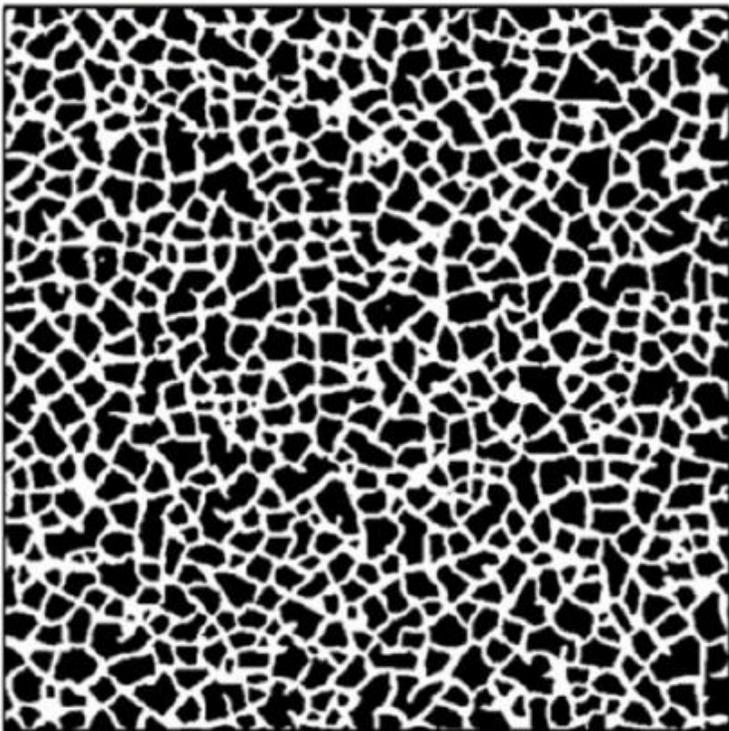
Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Il est possible de spécifier des intervalles de valeurs possibles pour les rapports d'échelle et d'angles

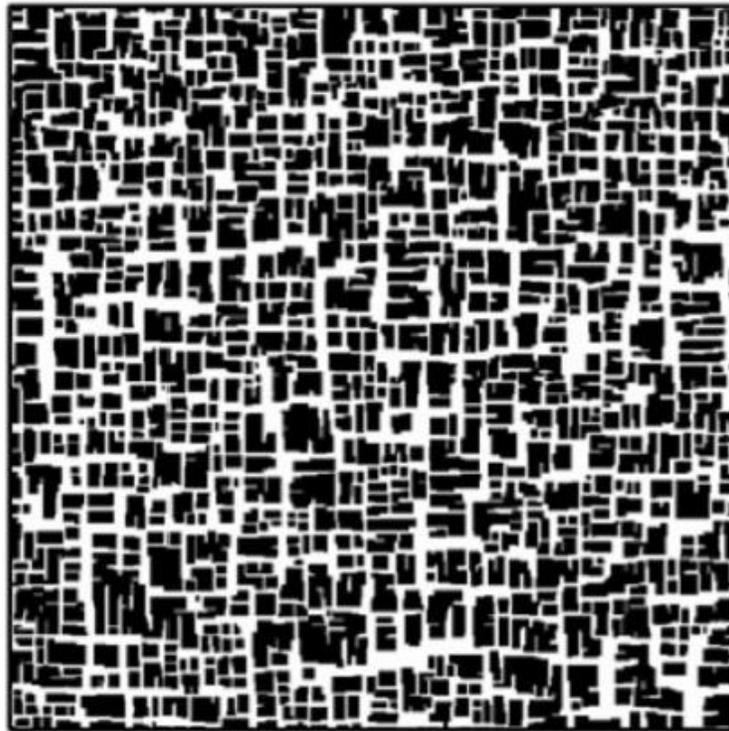
R : rotation

S: facteur d'échelle

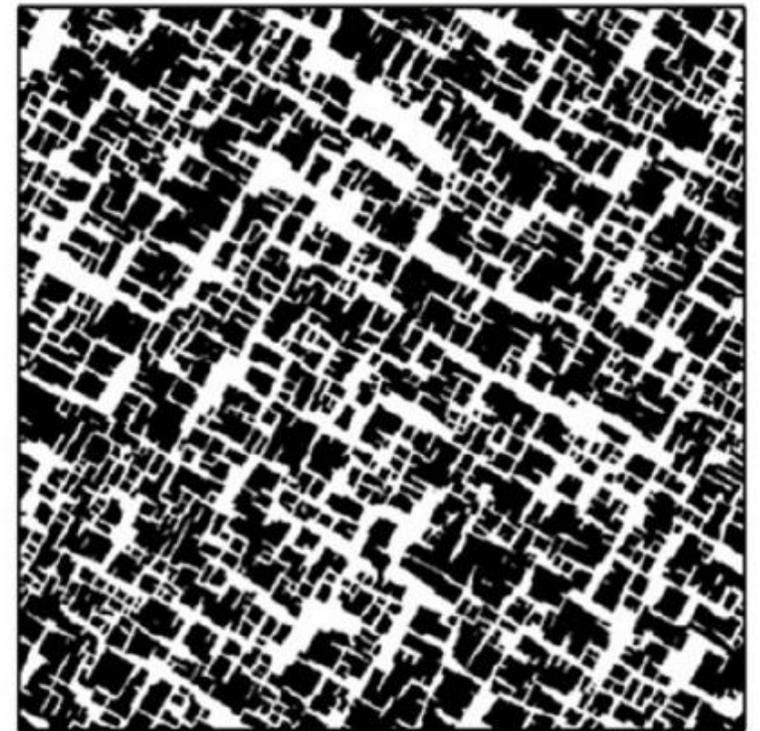
R in $[-180,180]$ / S in $[2/3,3/2]$



R = 0 / S in $[1/3,3]$

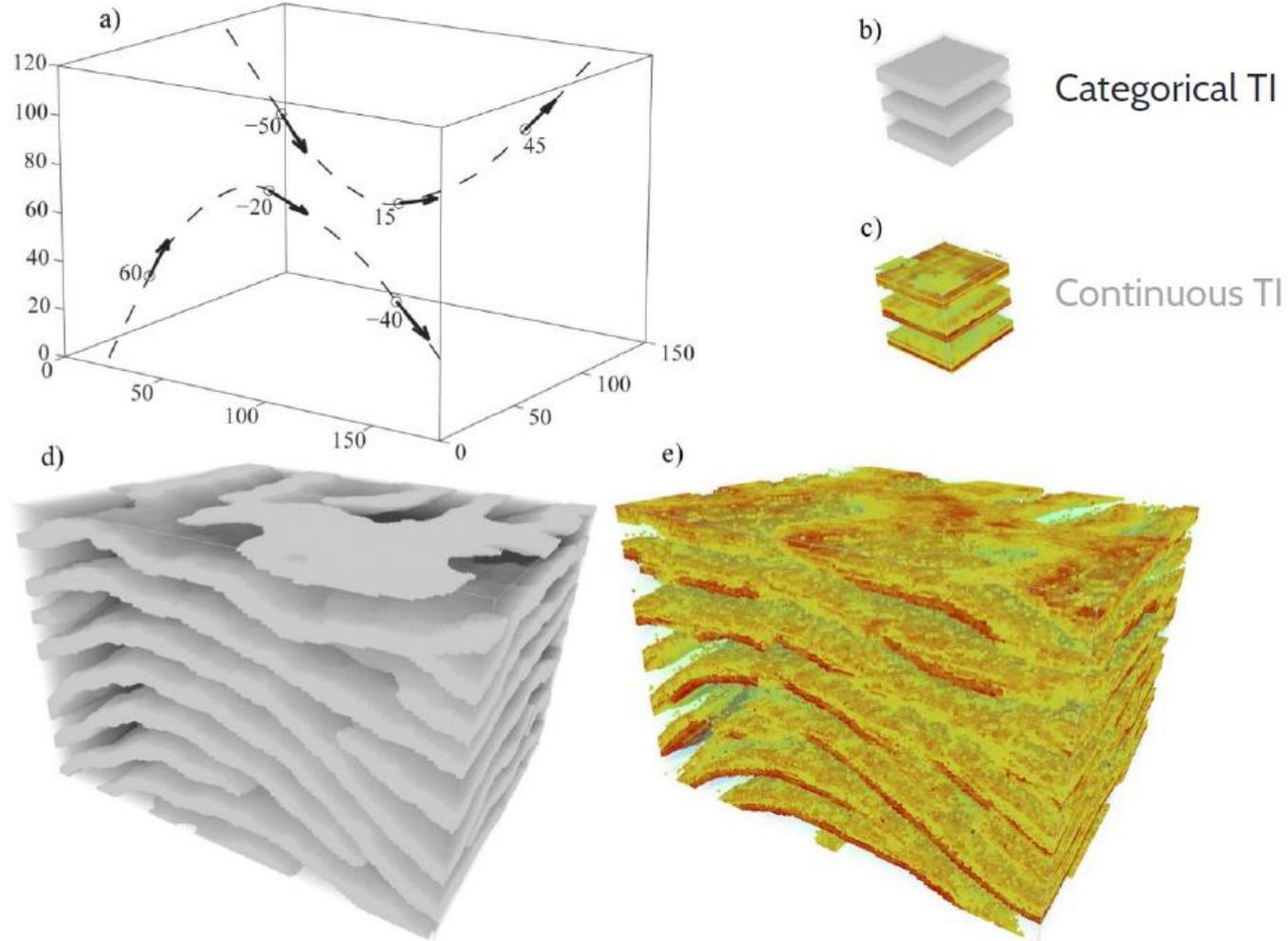


R=30 / S in $[1/4,4]$



1. Simulation multipoints (DeeSee)

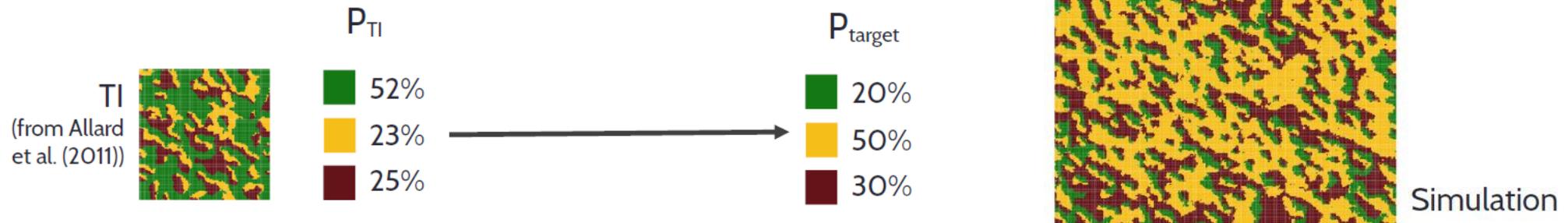
Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :

Objectif : On veut modifier les proportions des faciès de la TI



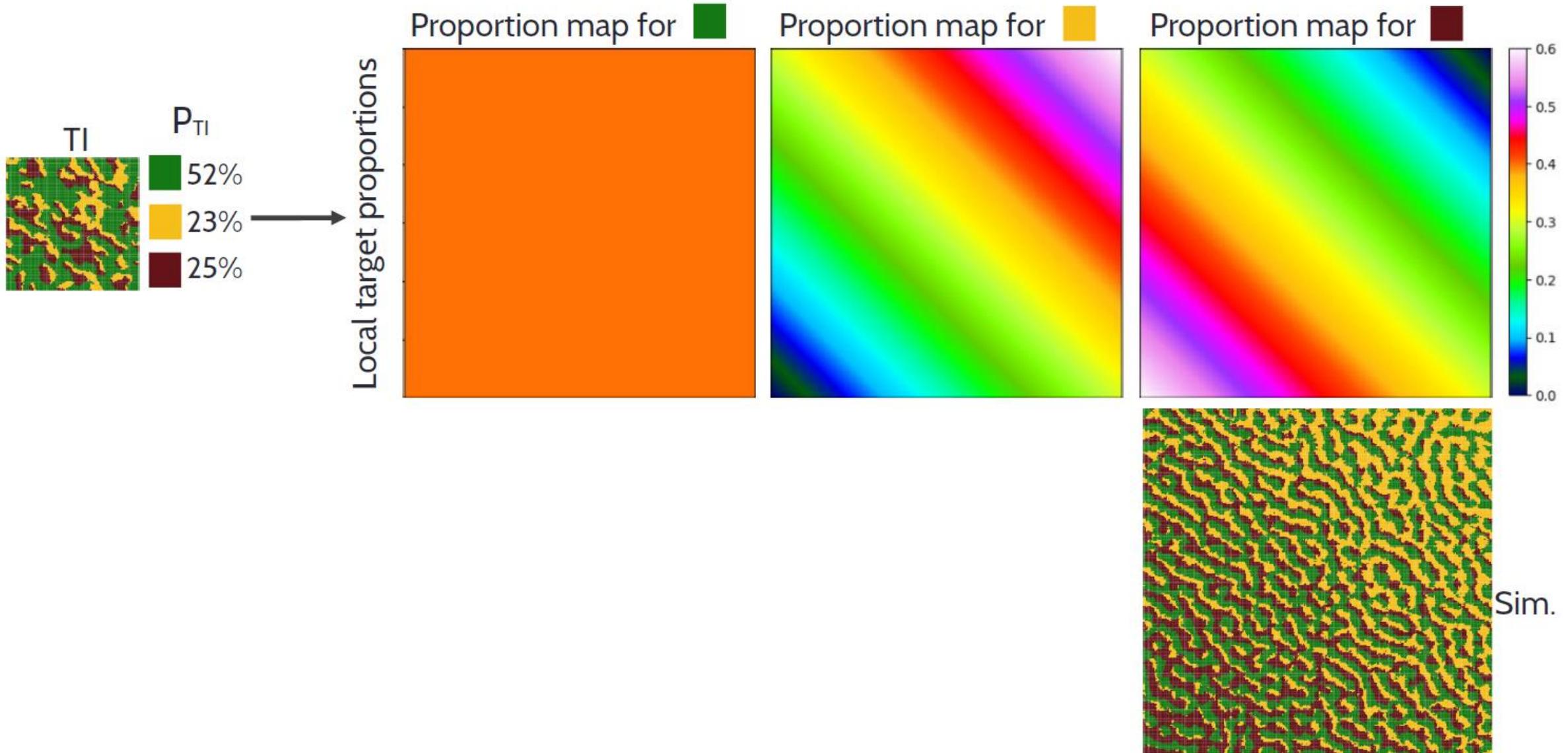
Idée : Ajouter un critère avant d'accepter une cellule TI scannée pendant la simulation

On a donc deux critères :

$$d(TI_{motif}, Sim_{motif}) < t_{motif} \text{ et } d(P_{cible}, P_{actuel}) < t_{prop}$$

1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contrôle des orientations, de l'échelle et des proportions :



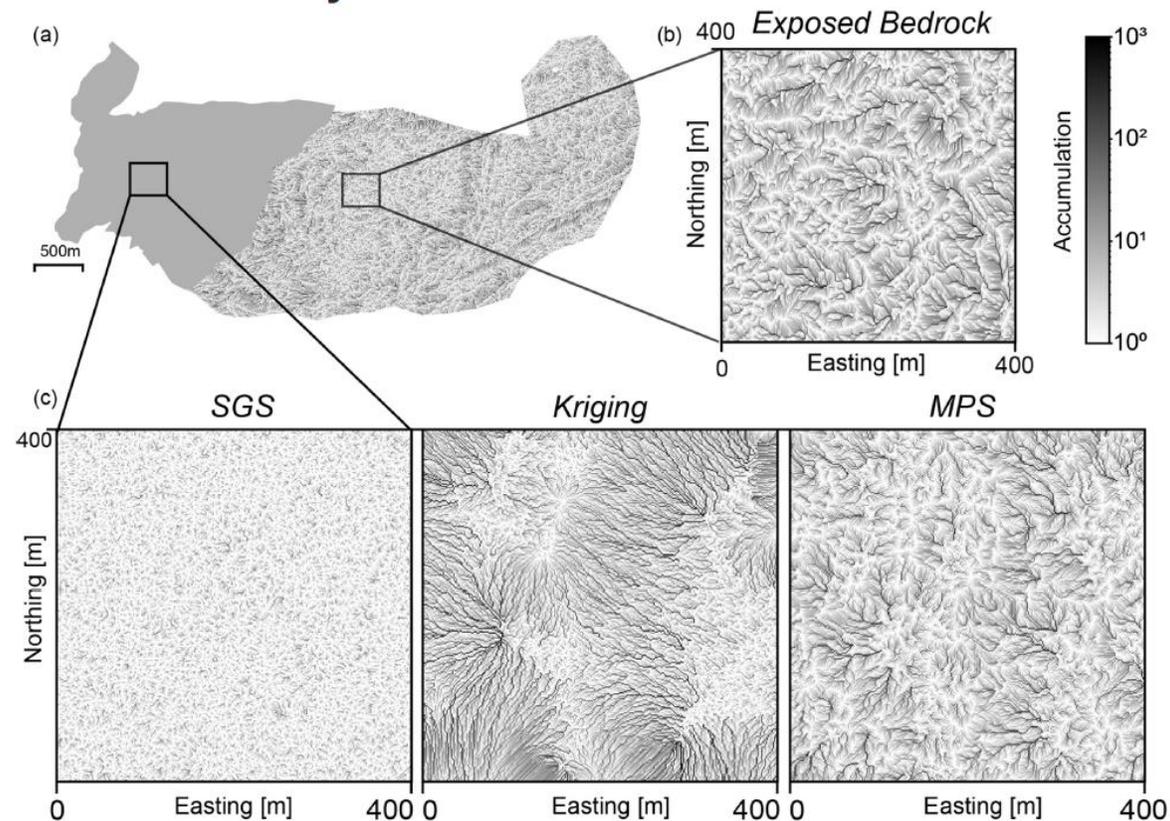
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Données continues :

Idée: On modifie la notion de distance pour tenir compte de la nature continue

$$d(d_n(x), d_n(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Z(x + h_i) - Z(y + h_i)|$$

Flow accumulations are very different



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multivariables :

Idée: On étant la motion de distance pour tenir compte de plusieurs TI

Choisir le nombre n_k de voisins par variable k

Une distance par variable

1. On trouve le premier évènement tel que :

$$d\left(\mathbf{d}_{n_1}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_1}(\mathbf{y})\right) < t_1$$

$$d\left(\mathbf{d}_{n_2}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_2}(\mathbf{y})\right) < t_2$$

....

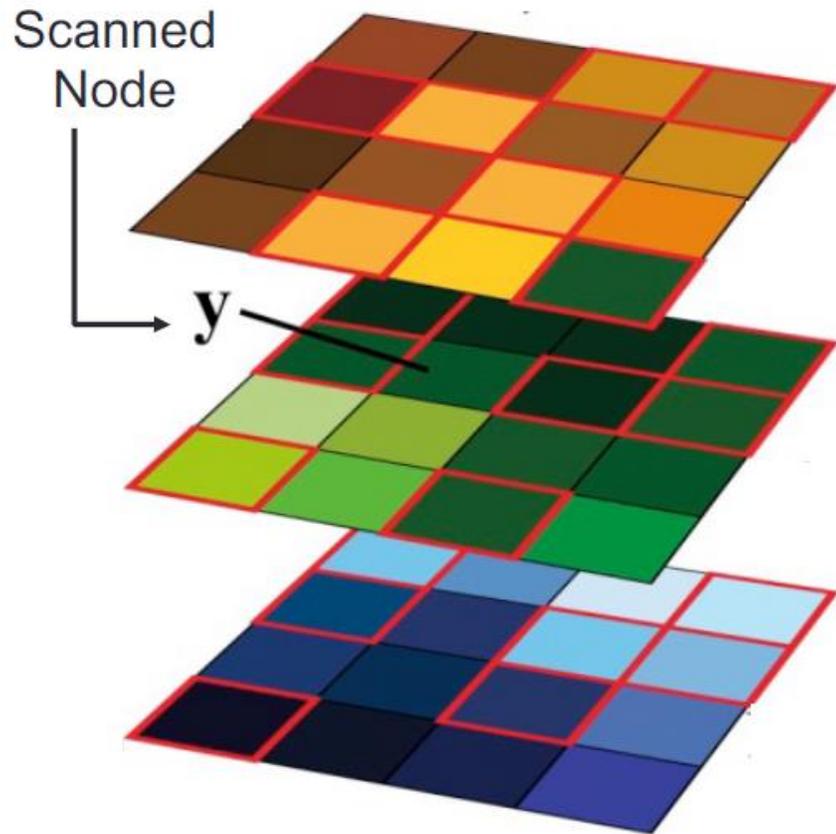
$$d\left(\mathbf{d}_{n_k}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_{n_k}(\mathbf{y})\right) < t_k$$

2. Une fraction f de la TI a été scanné, et on garde le meilleur évènement rencontré.

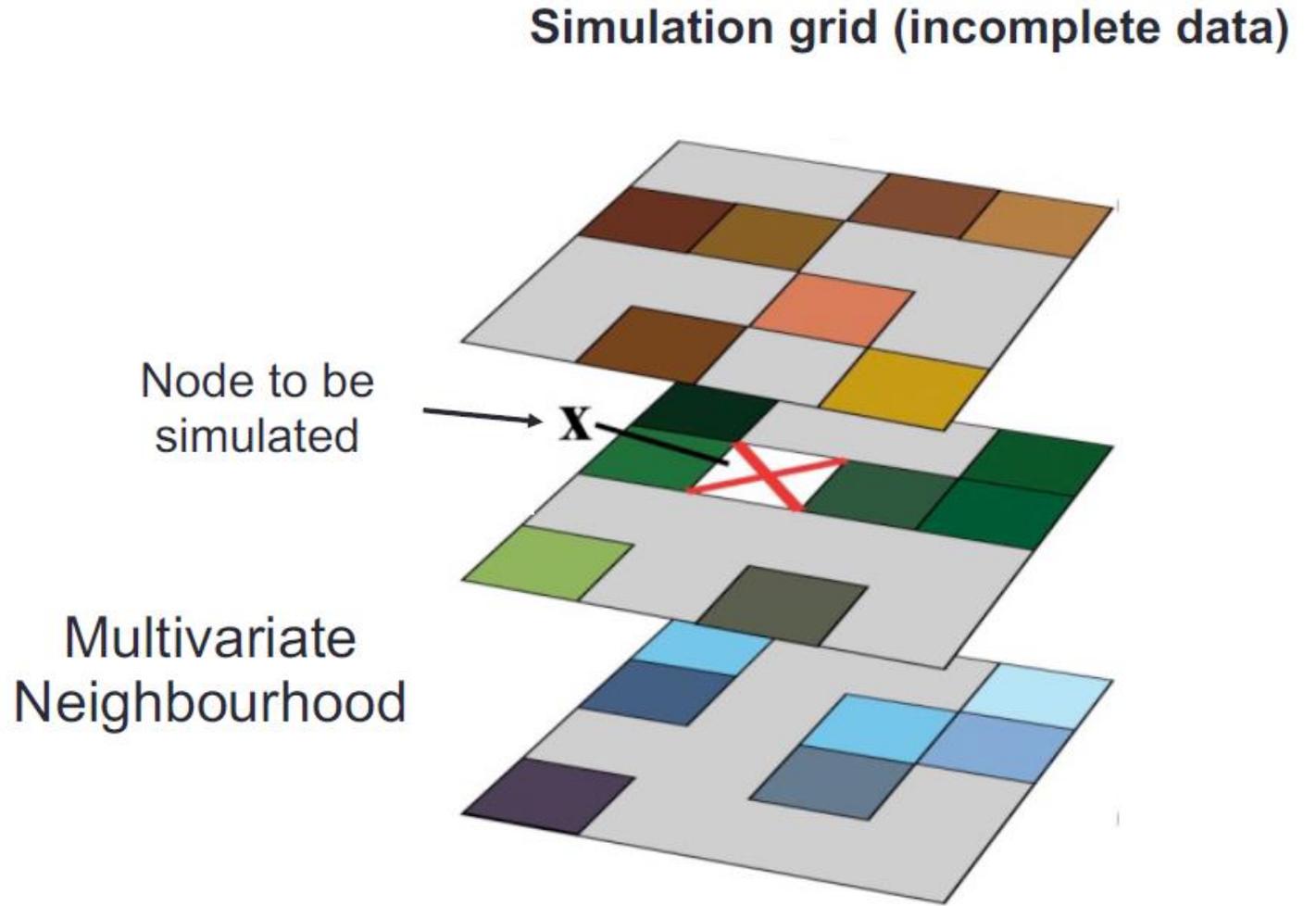
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multivariables :

Multivariate training data set



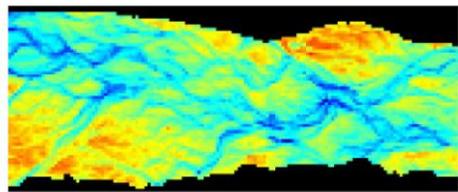
Simulation grid (incomplete data)



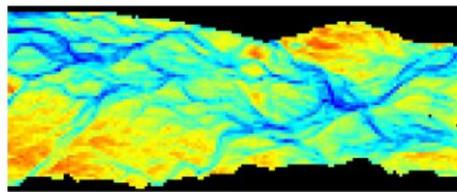
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multivariables :

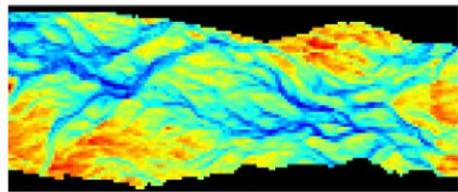
LIDAR Data from analog site = Training data set



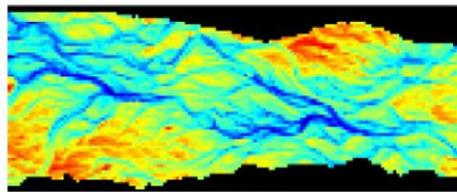
1999 February



1999 March

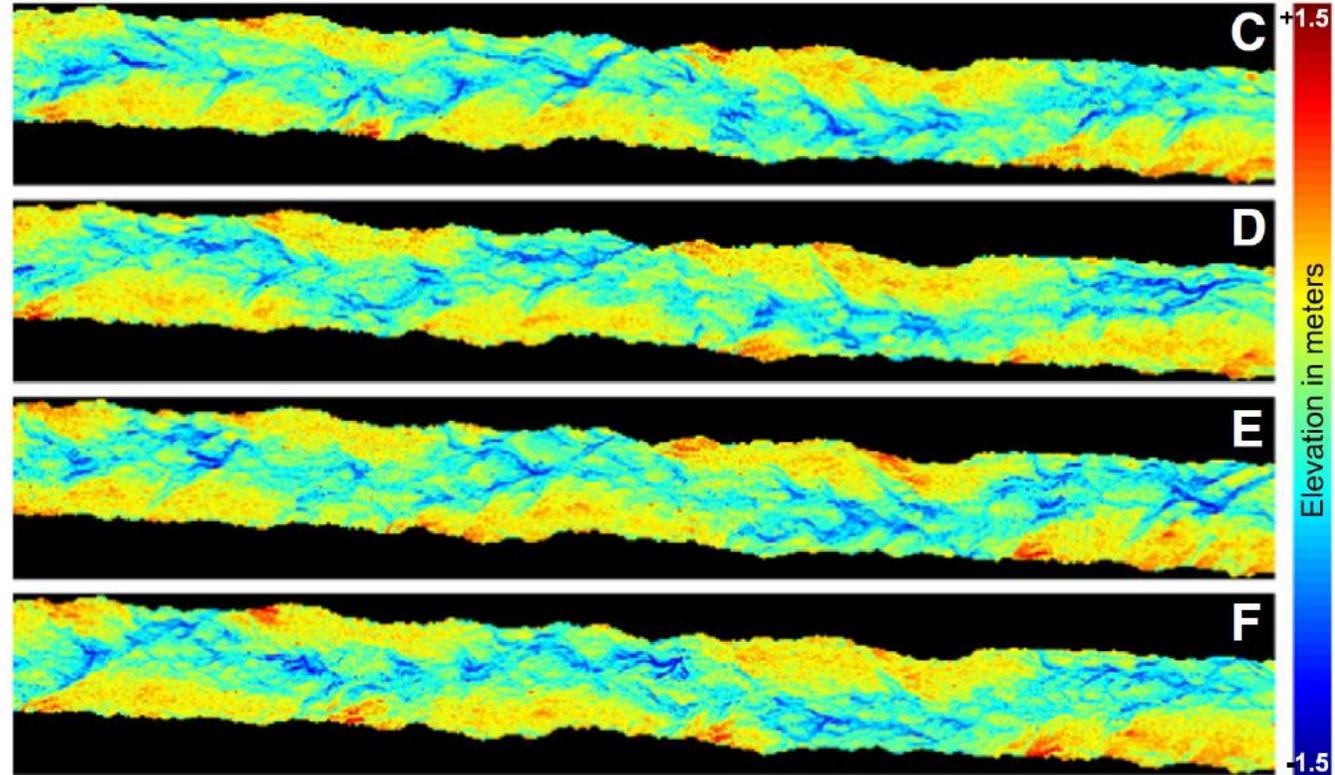


2000 February



2000 May

+1.5m
Elevation in meters
-1.5m



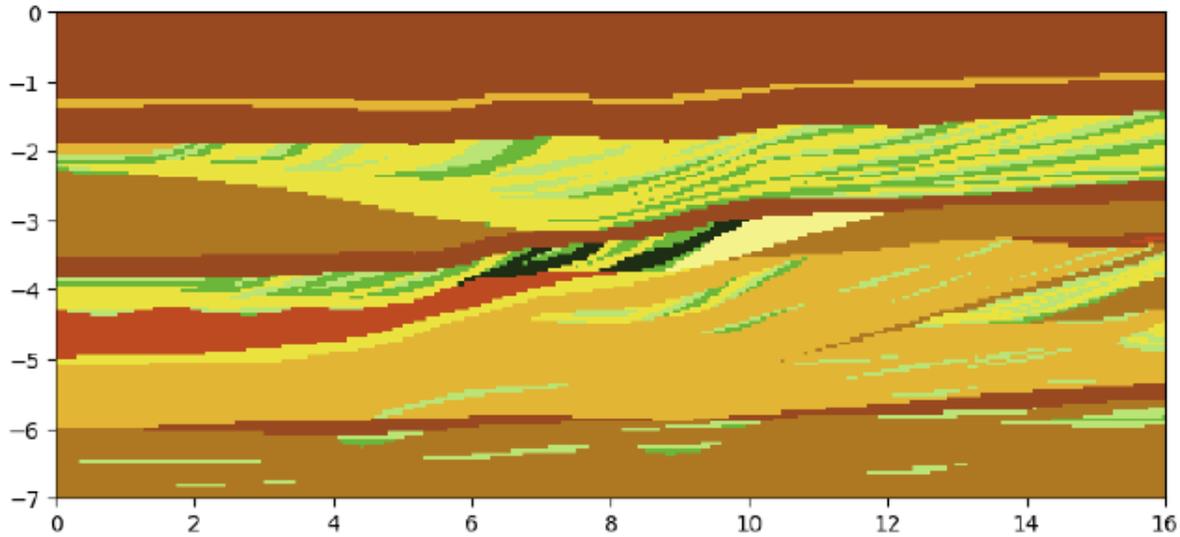
+1.5
Elevation in meters
-1.5

1. Simulation multipoints (DeeSee)

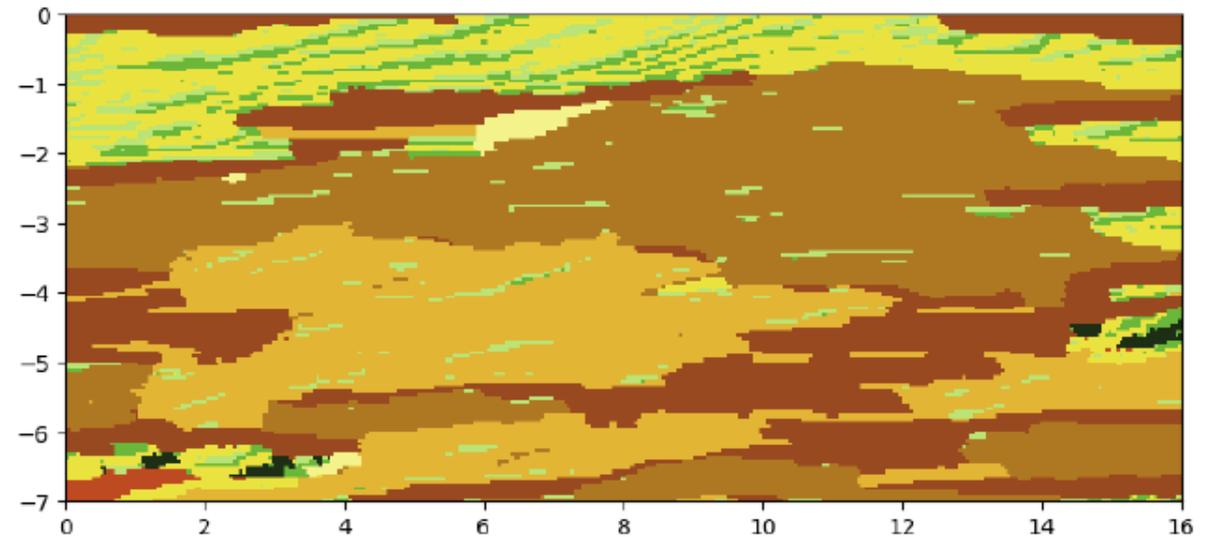
Avec tendances :

DS ne peut gérer la non-stationnarité

Tl



Simulation

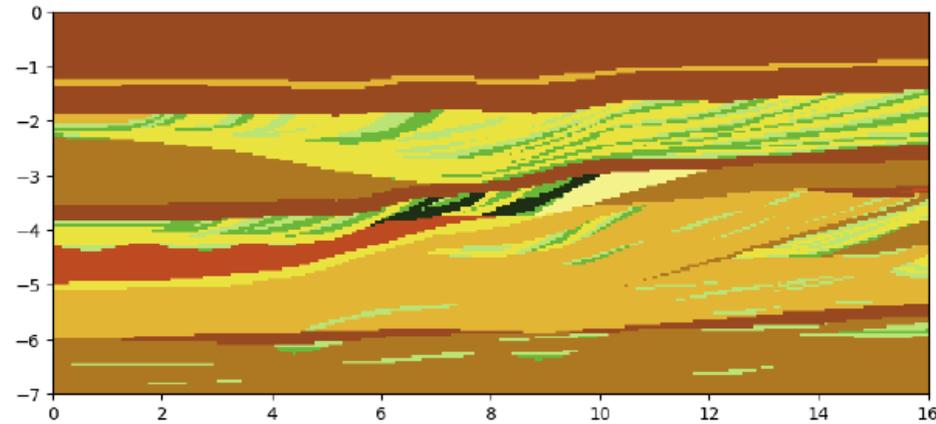


1. Simulation multipoints (DeeSee)

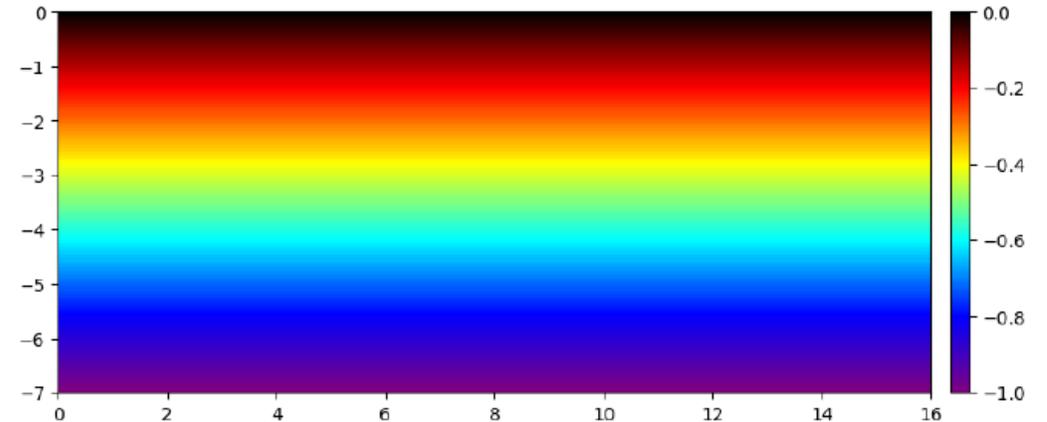
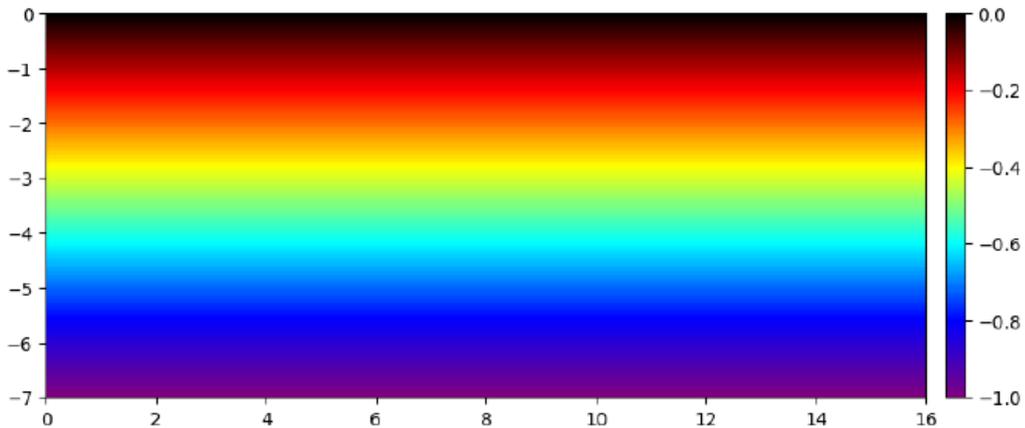
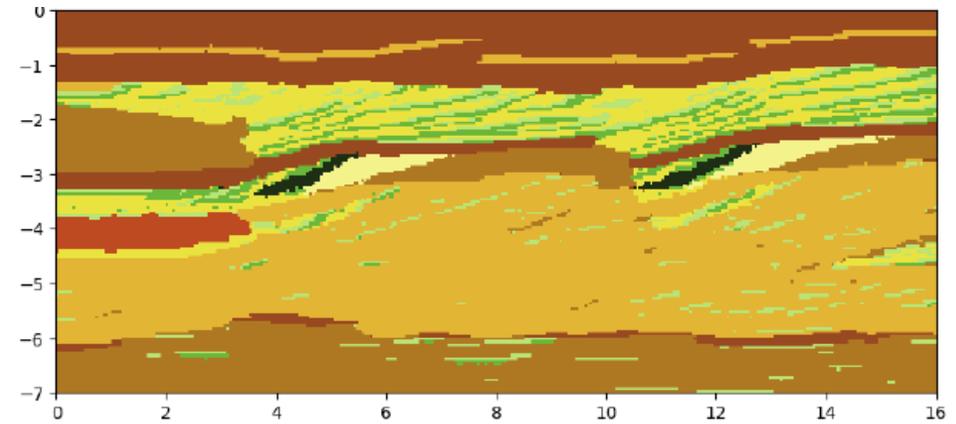
Avec tendances :

Solution: Ajouter une variable auxiliaire qui décrit la tendance

TI



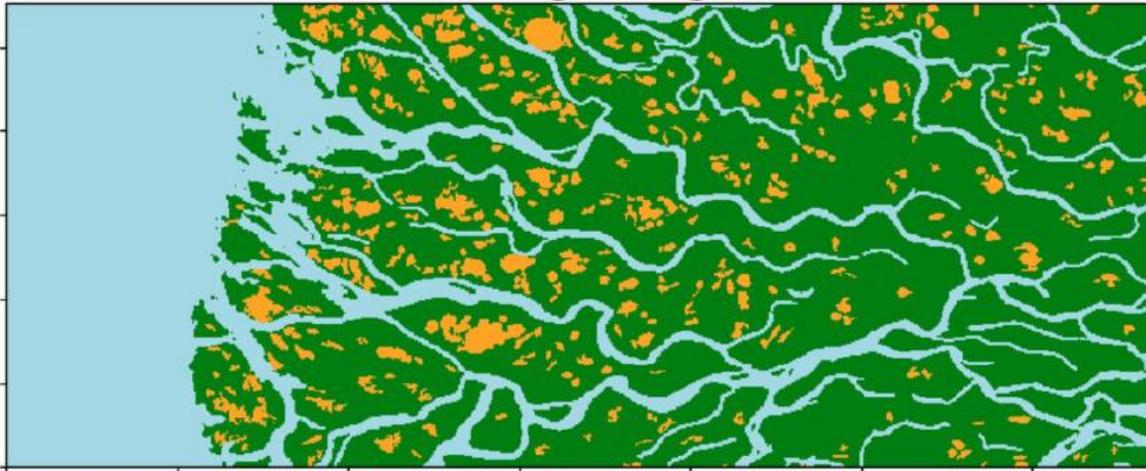
Simulation



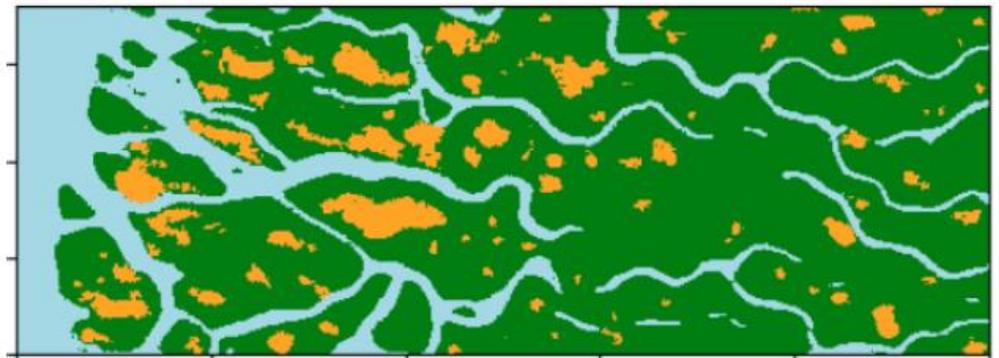
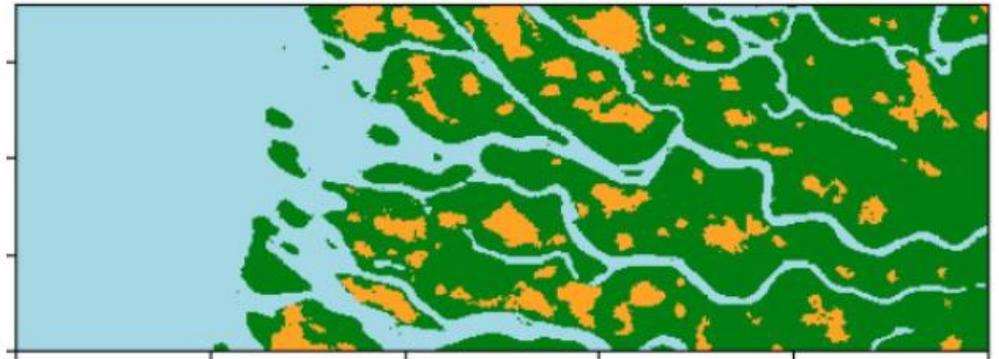
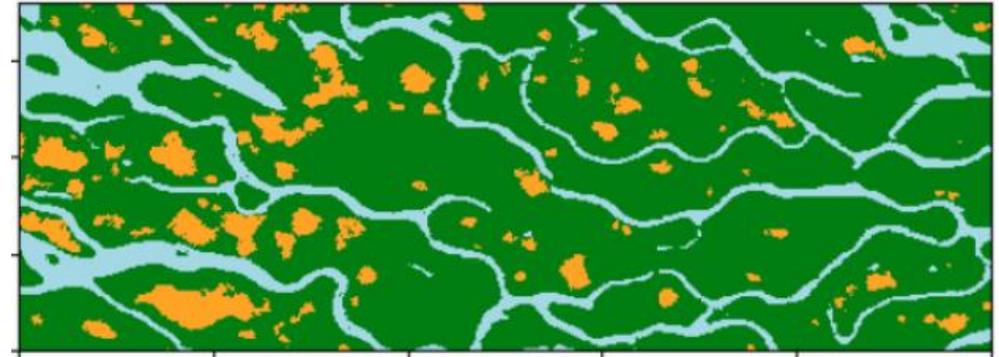
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Avec tendances :

Training image

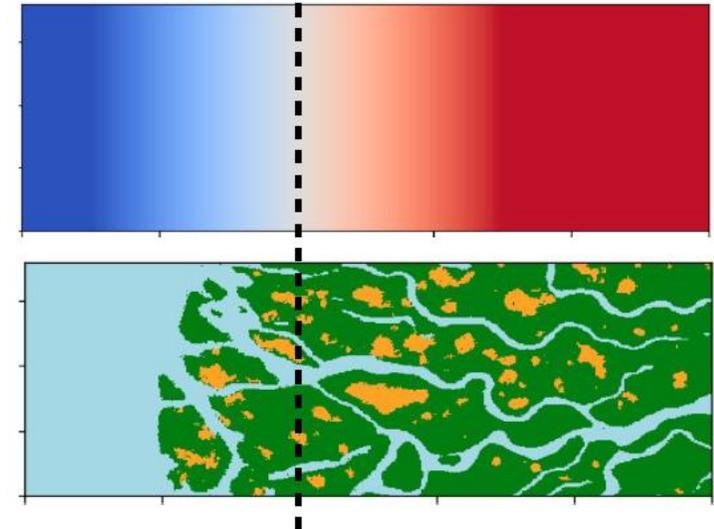
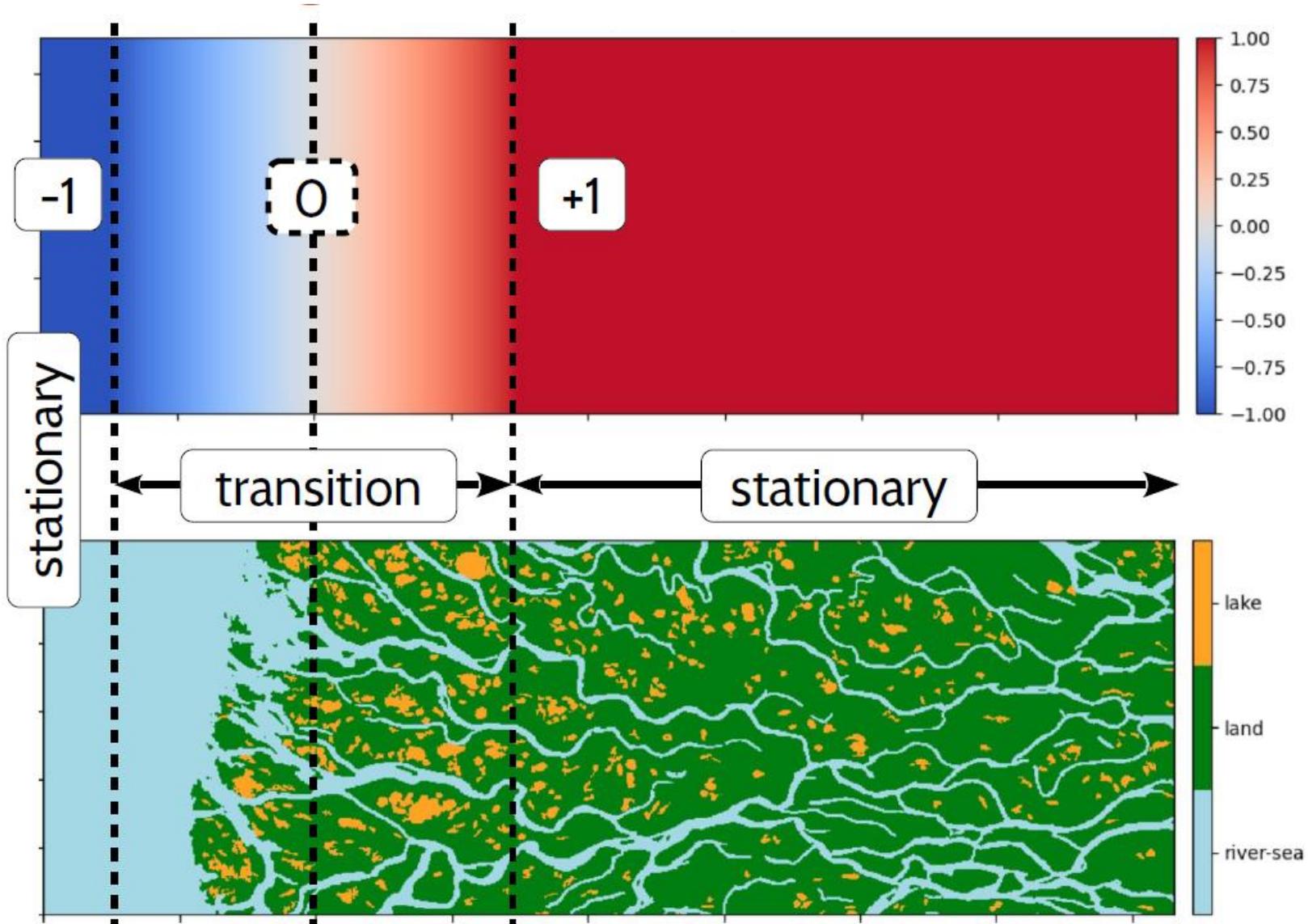


3 simulations



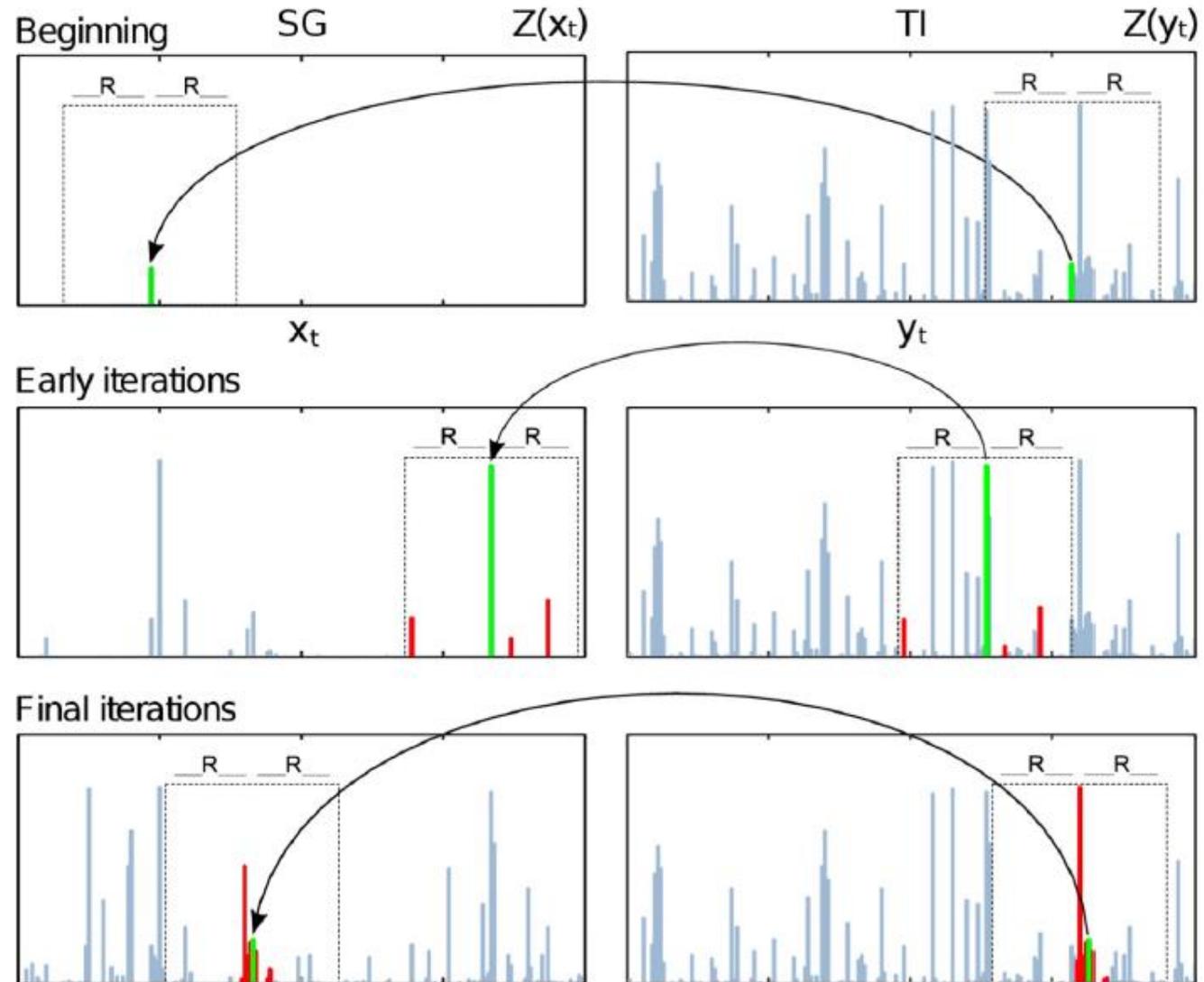
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Avec tendances :



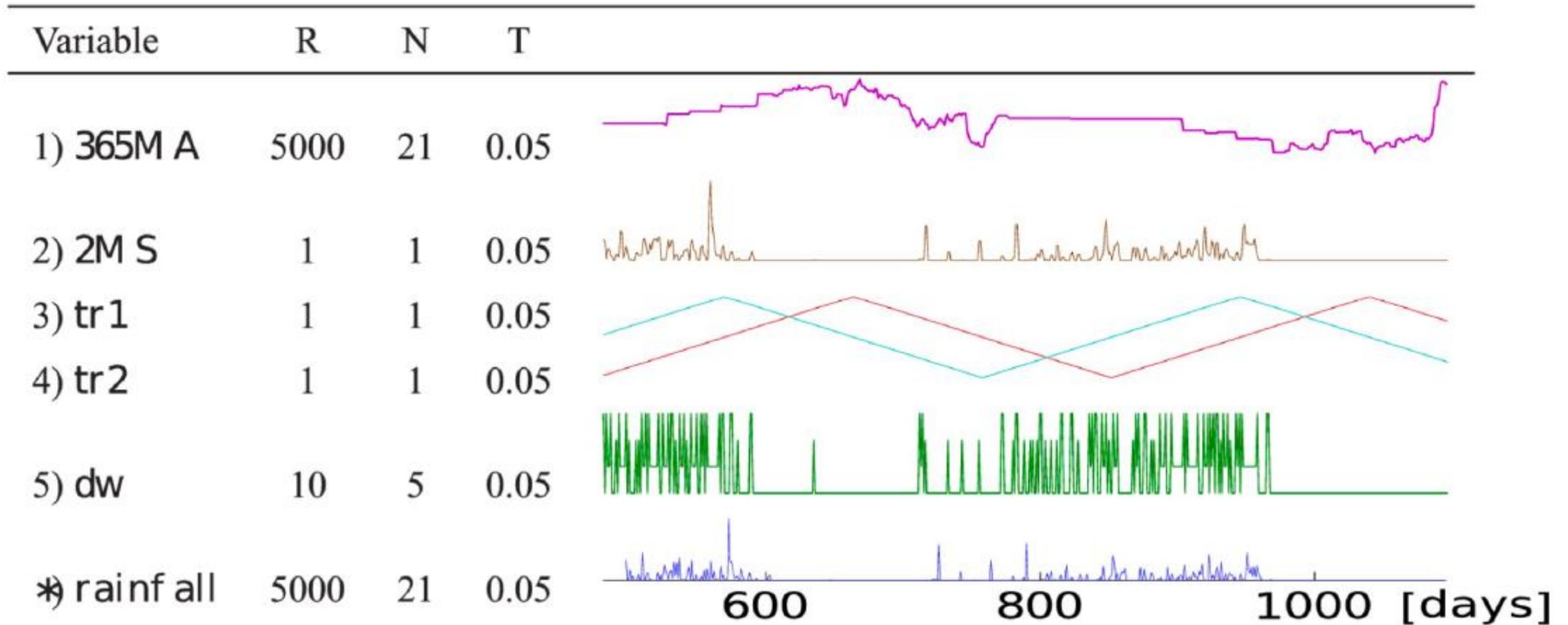
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Séries temporelles : chemin aléatoire



1. Simulation multipoints (DeeSee)

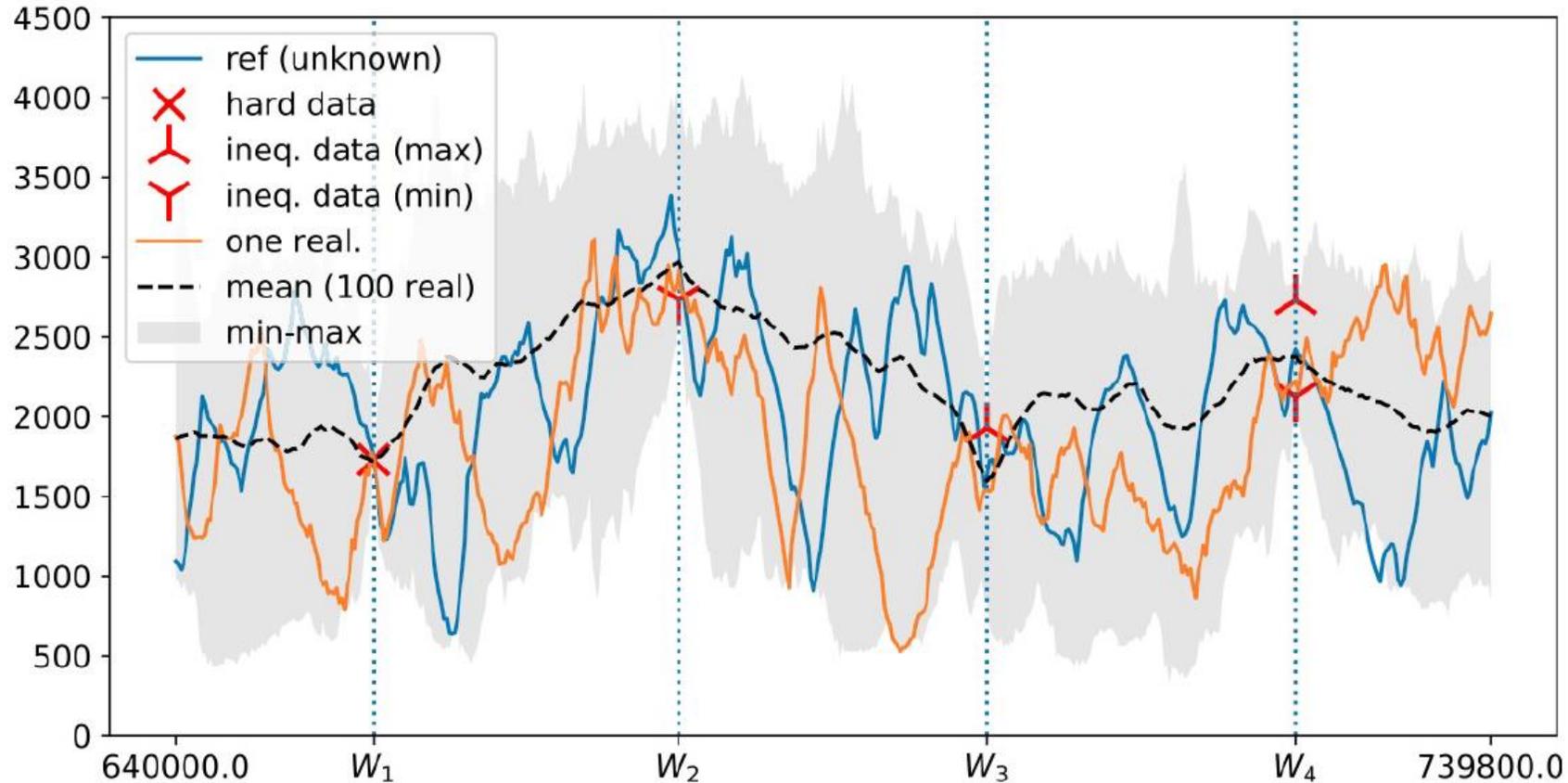
Séries temporelles : Variables auxilliaires



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Contraintes d'inégalités:

$$d(\mathbf{d}_n(\mathbf{x}), \mathbf{d}_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad f(x) = \begin{cases} |Z(x_i) - Z(y_i)|, & \text{si la valeur est connue en } x_i \\ \max(z_{\min}(x_i) - Z(y_i), 0), & \text{si la borne inférieure est connue en } x_i \\ \max(Z(y_i) - z_{\max}(x_i), 0), & \text{si la borne supérieure est connue en } x_i \\ \max(\max(z_{\min}(x_i) - Z(y_i), 0), \max(Z(y_i) - z_{\max}(x_i), 0)) & \text{si les bornes supérieure et inférieure sont connues en } x_i \end{cases}$$



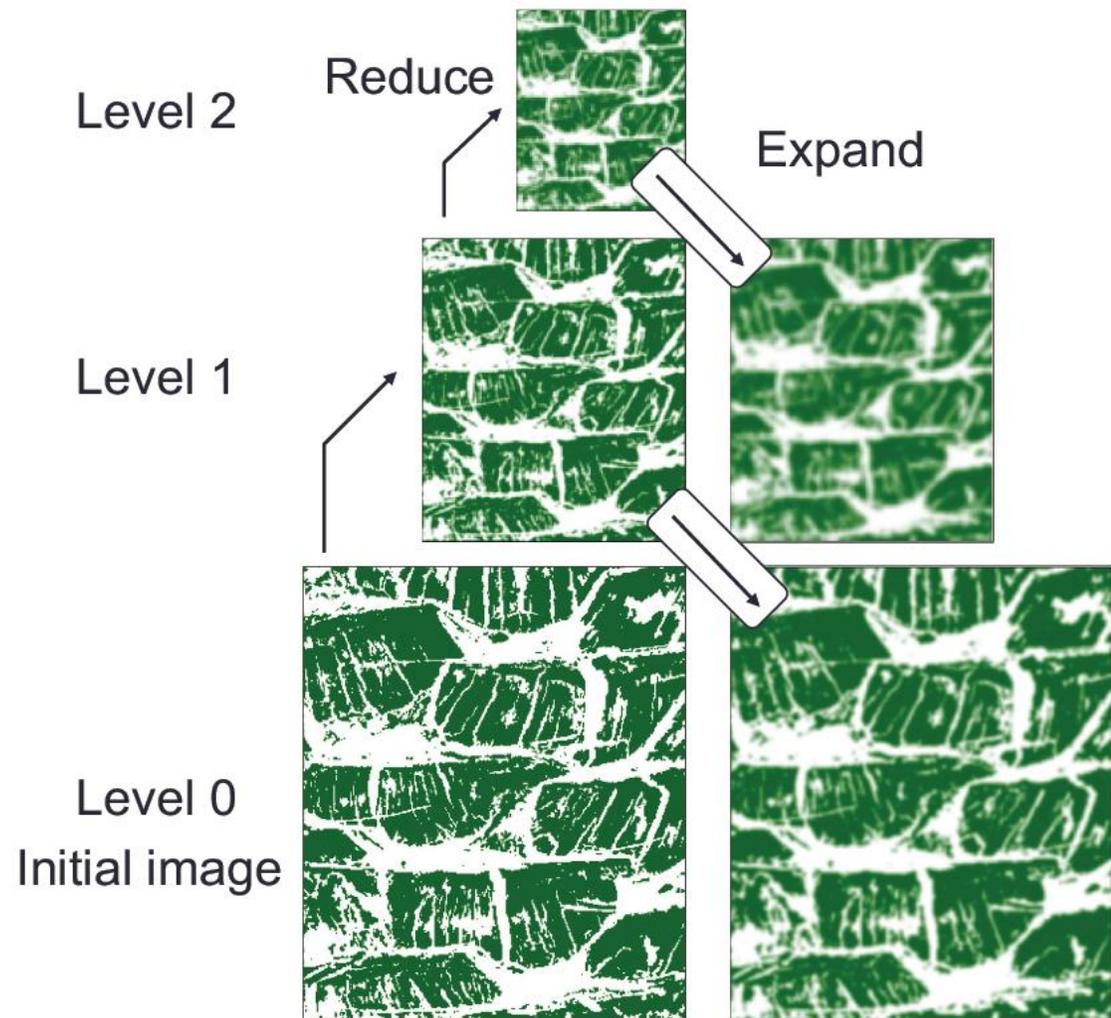
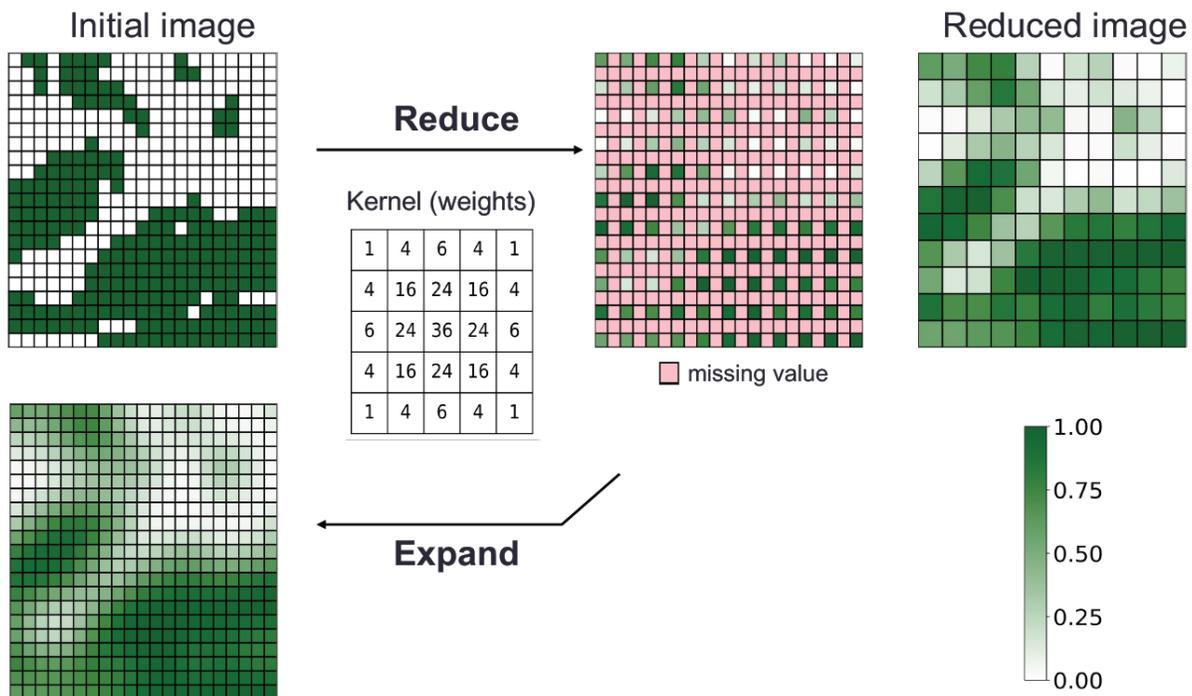
1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multirésolution / pyramides:

On est capable de:

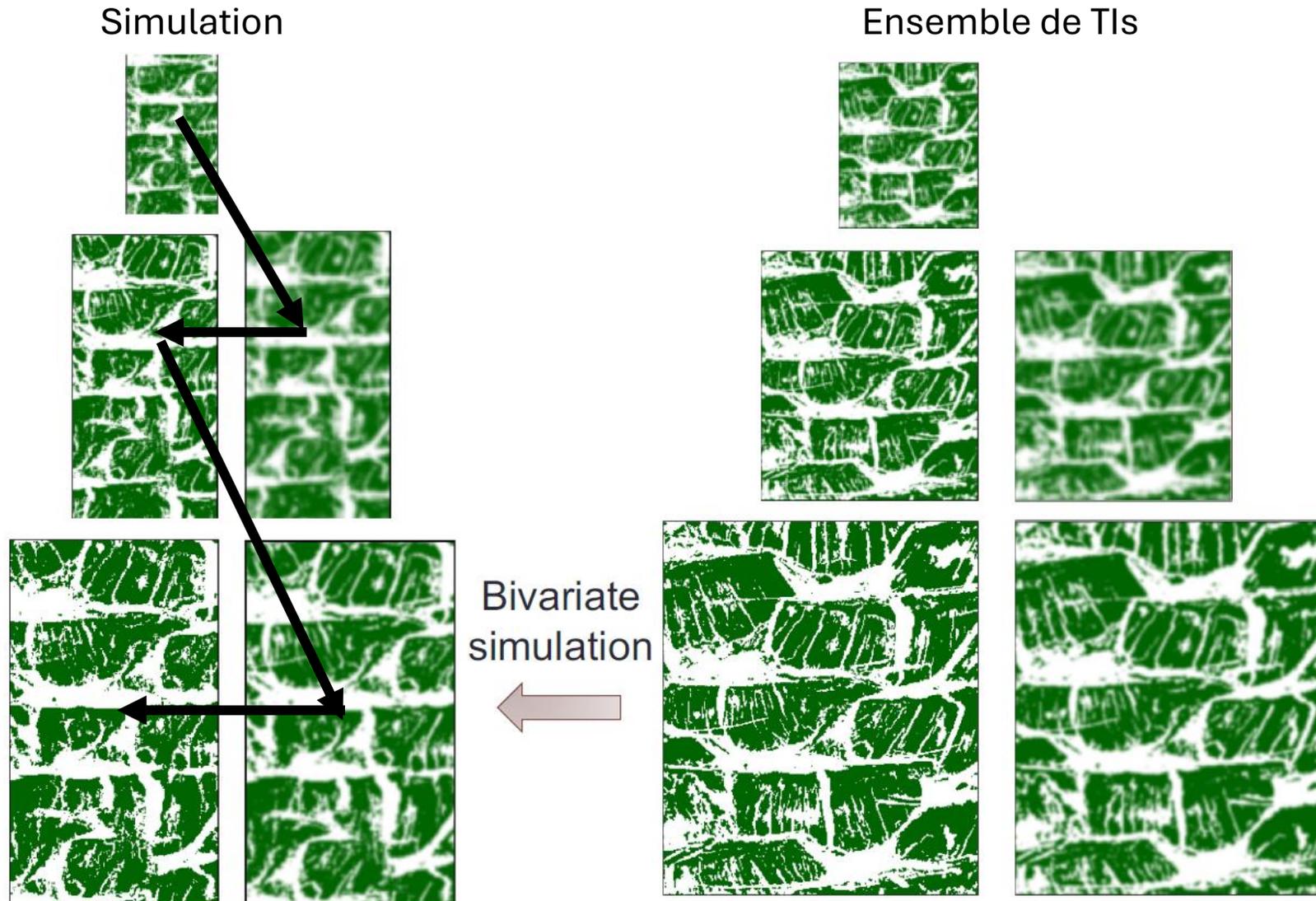
Réduire des images

Étendre des images



1. Simulation multipoints (DeeSee)

Multirésolution / pyramides:

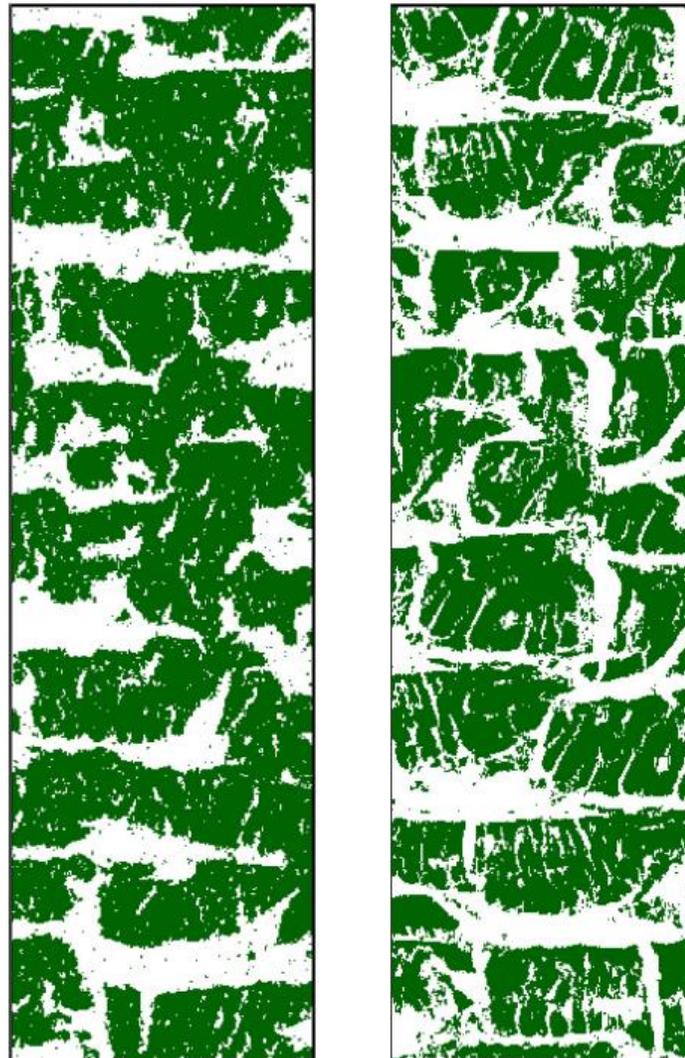


1. Simulation multipoints (DeeSee)

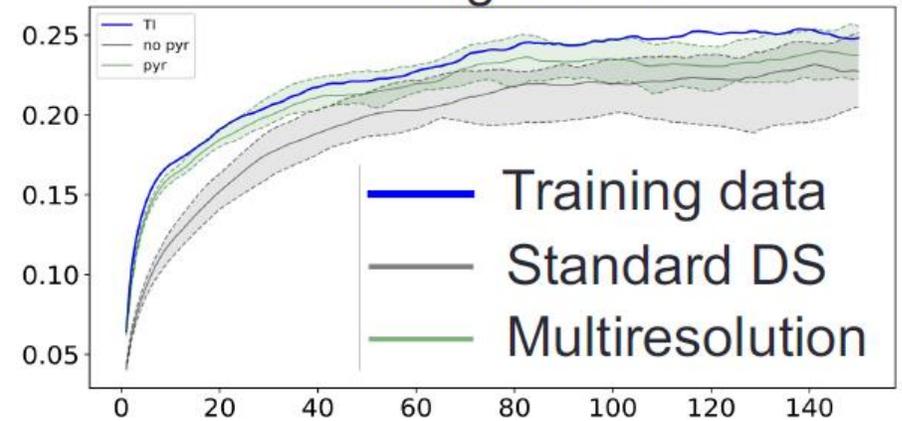
Multirésolution / pyramides:



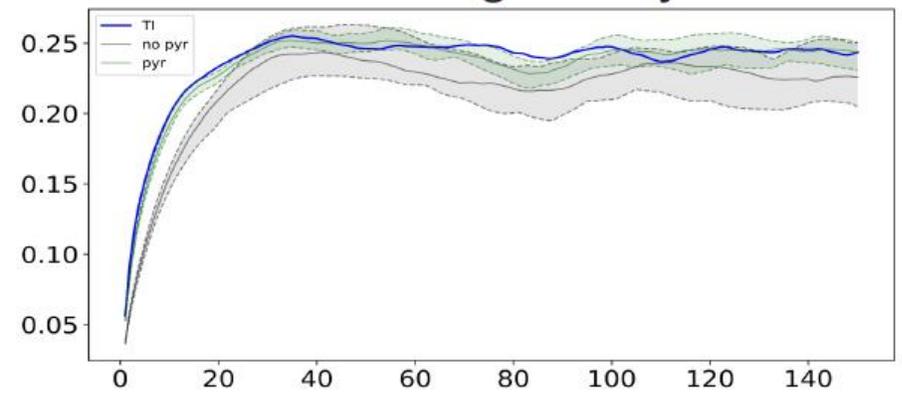
Standard DS Multiresolution



Variogram - x



Variogram - y



20 realizations

1. Simulation multipoints (DeeSee)

Conclusion :

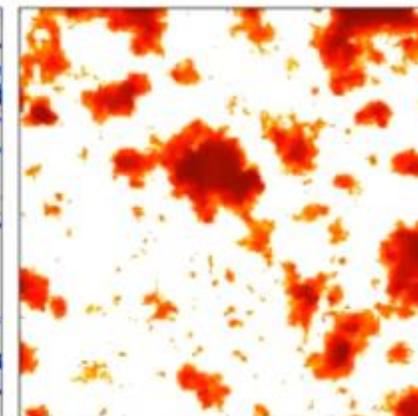
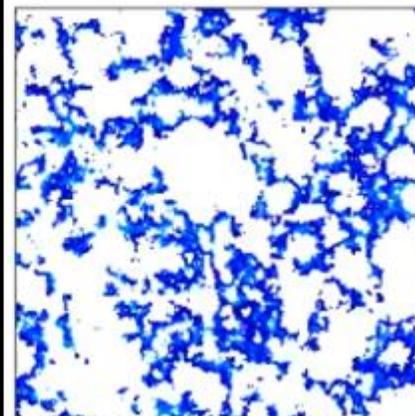
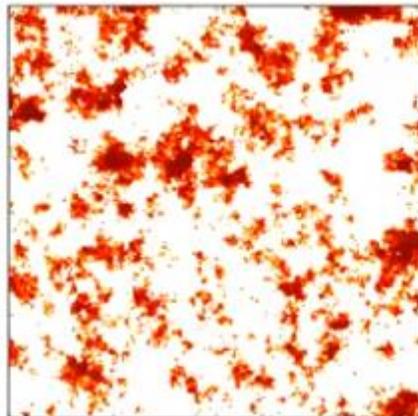
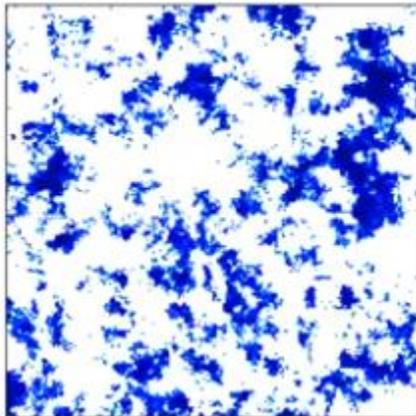
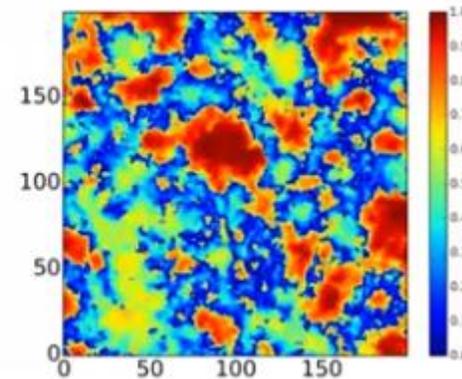
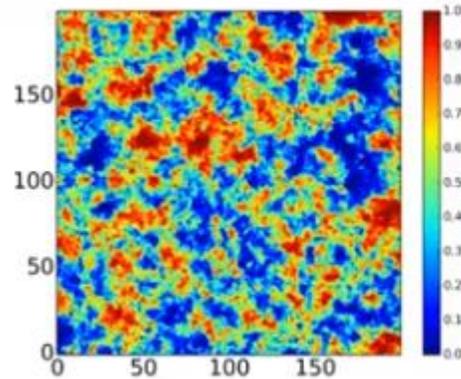
Application de DeeSee permet :
Variables catégorielles
Variables continues
Simulation multivariée conjointe
Proportion globale
Cartes de proportions locales
Valeurs moyennes sur les blocs
Conditionnement de connectivité
Tendances de rotation et de mise à l'échelle
TI non stationnaire
Tolérance sur rotation / mise à l'échelle
Conditionnement de bloc
Multirésolution / pyramides



2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

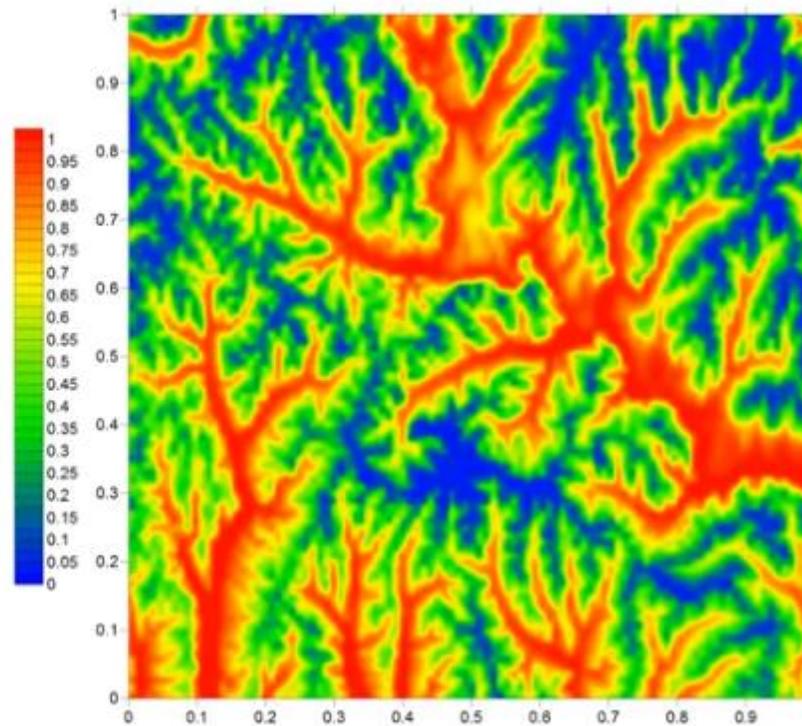
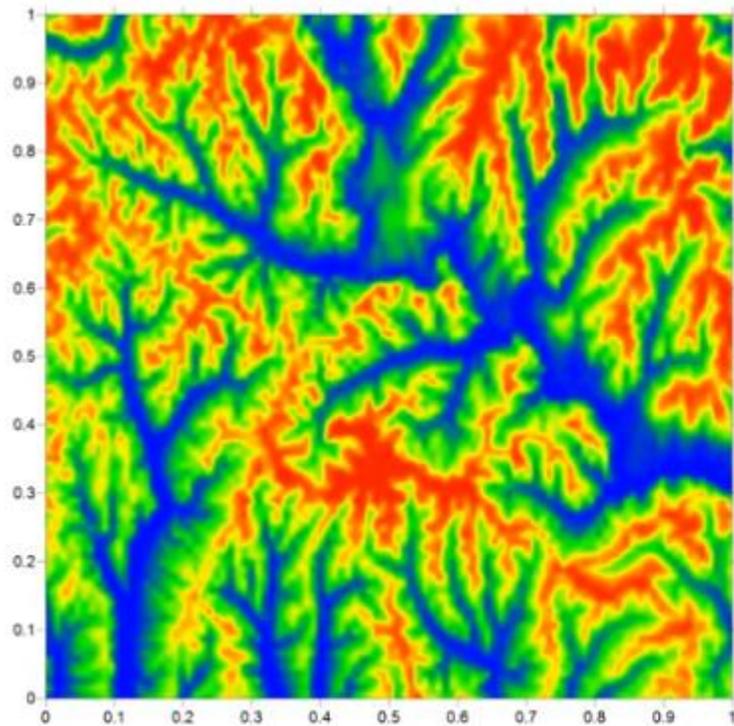
Que remarque-t-on visuellement entre les deux images ?



2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

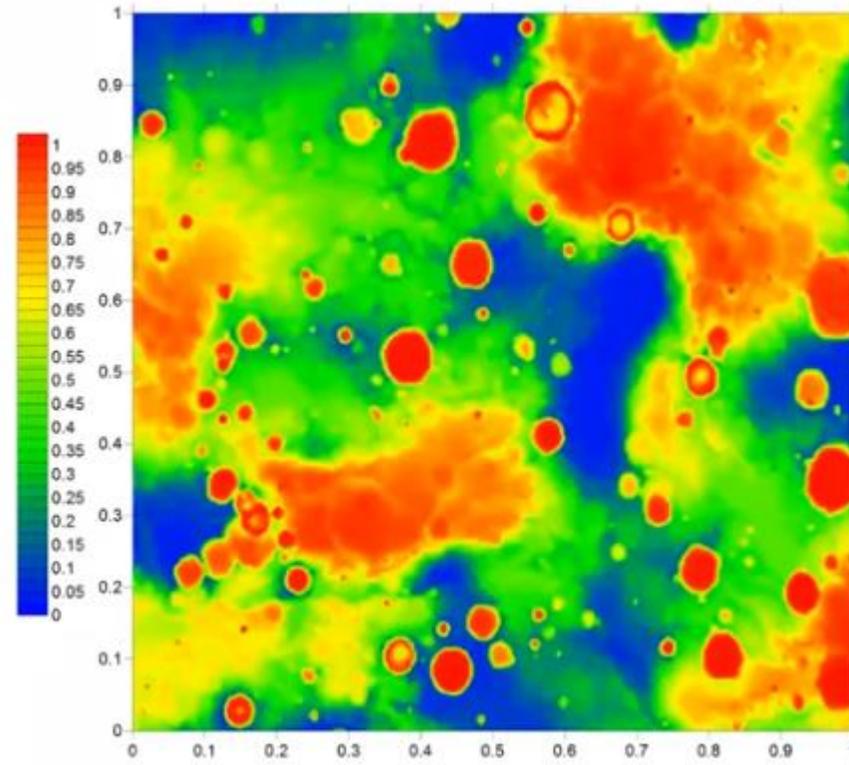
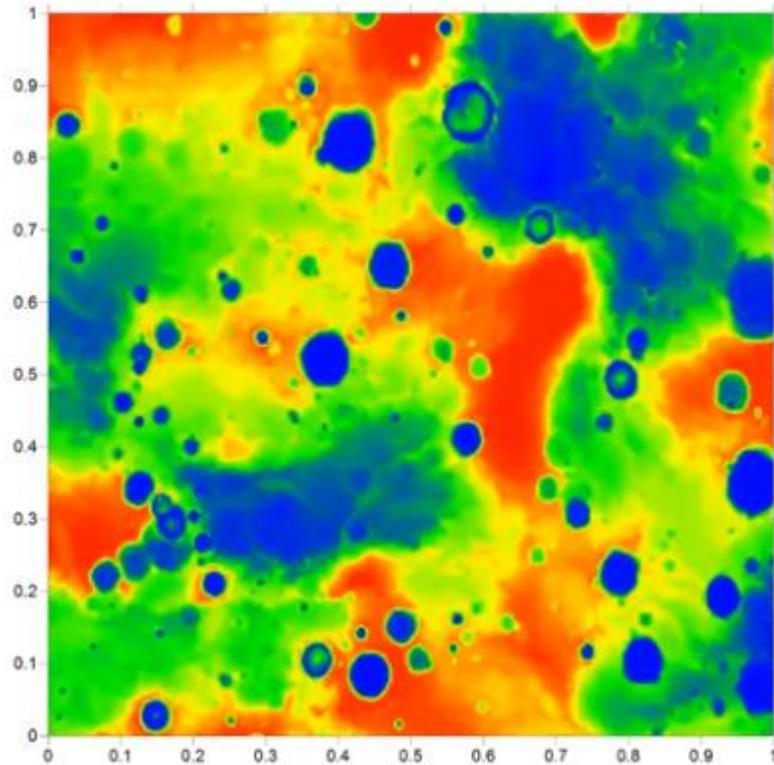
L'une des images est réelle, l'autre est inversée.
Laquelle est la véritable image ?



2. Statistique d'ordre supérieur

Importance :

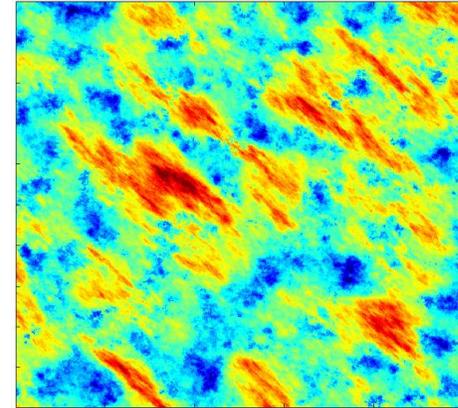
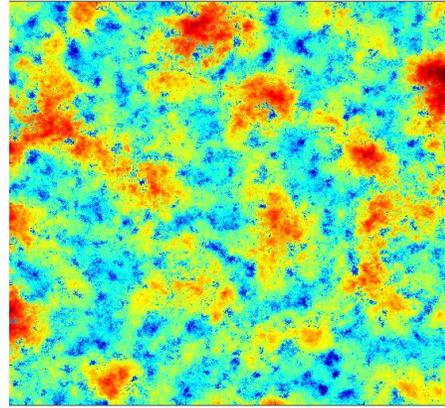
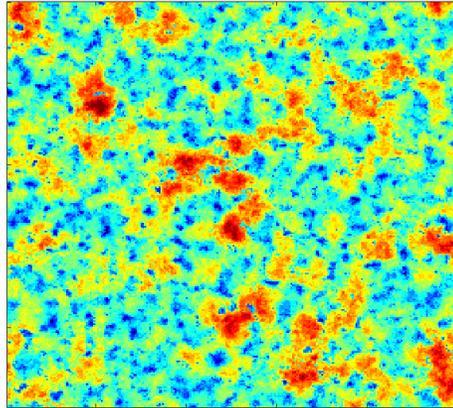
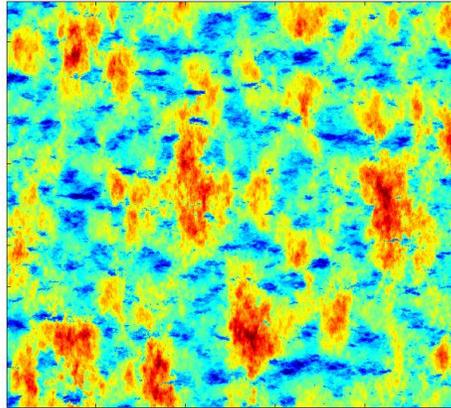
L'une des images est réelle, l'autre est inversée.
Laquelle est la véritable image ?



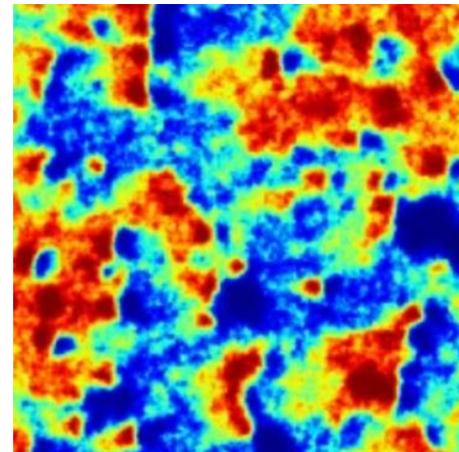
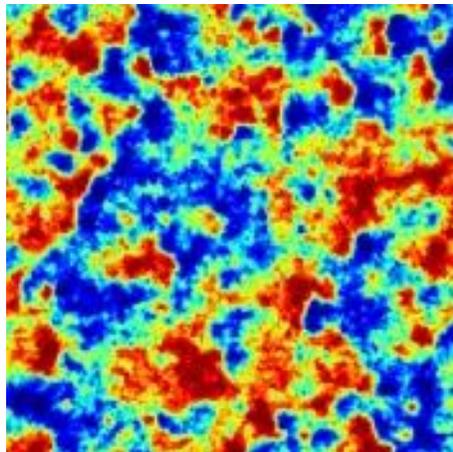
2. Statistique d'ordre supérieur

Asymétrie Spatiale :

- Différence entre les statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



- Différence entre les statistiques selon l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)



2. Statistique d'ordre supérieur

Équation :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)

$$A^*(h) = \mathbb{E}[(F_Z(x) + F_Z(x + h) - 1)^3]$$

- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)

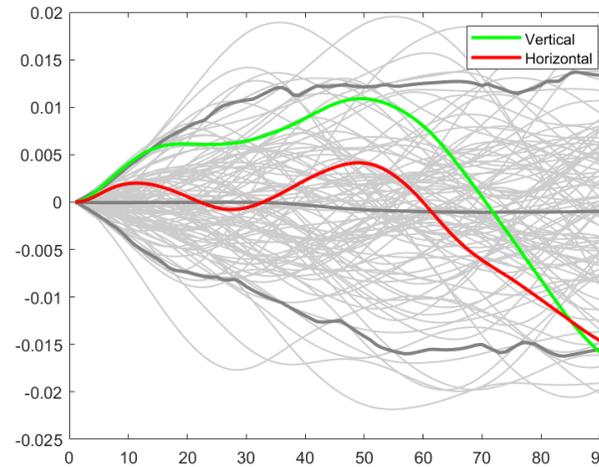
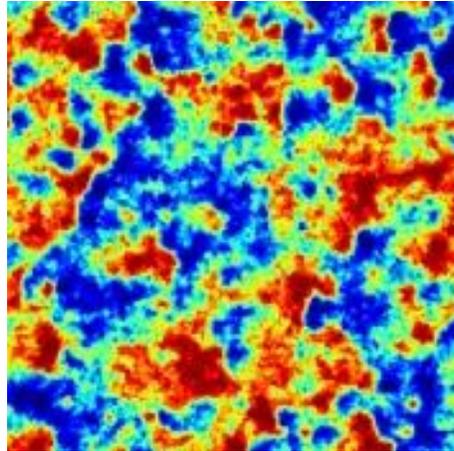
$$A_d(h) = \mathbb{E} \left[(F_Z(x) - F_Z(x + h))^3 \right]$$



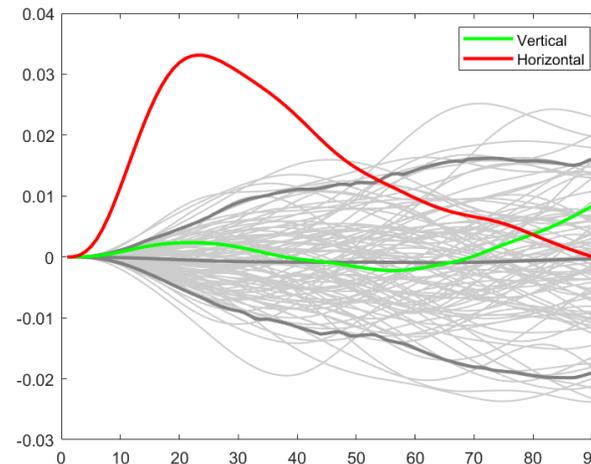
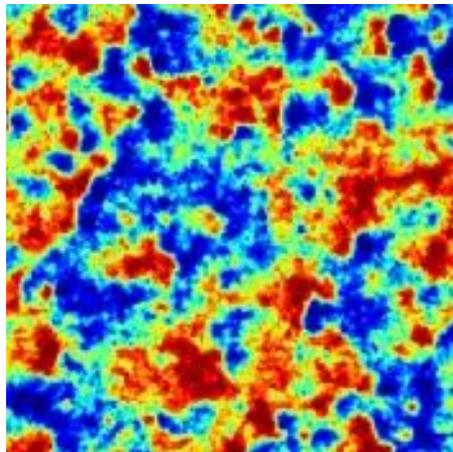
2. Statistique d'ordre supérieur

Équation :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



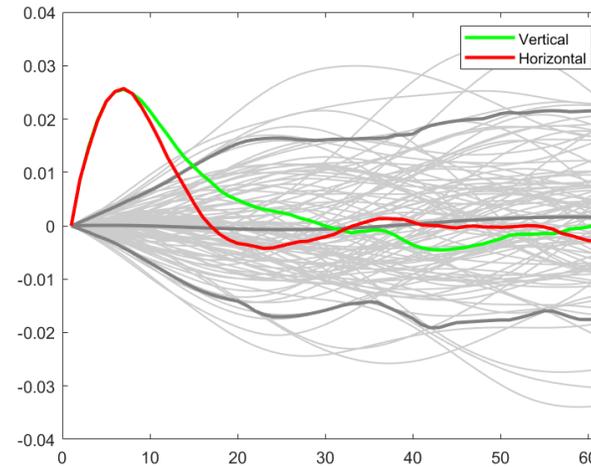
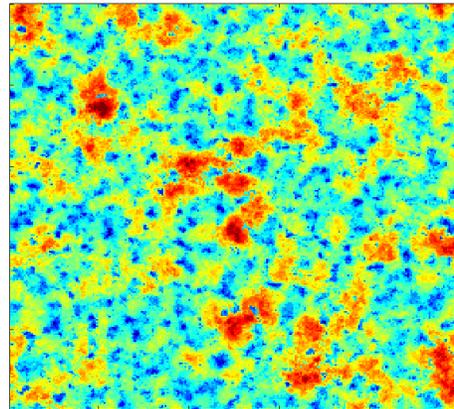
- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)



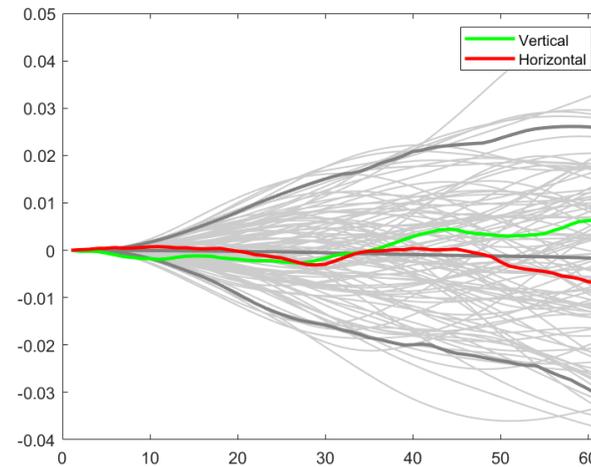
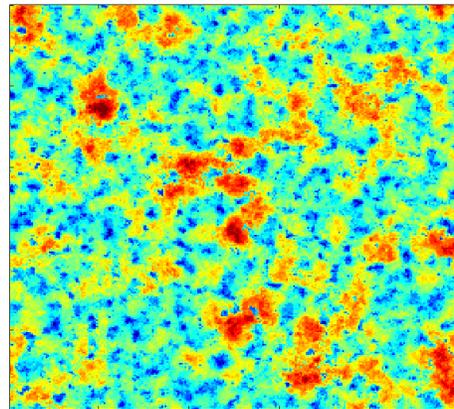
2. Statistique d'ordre supérieur

Visualisation des équations :

- Différences statistiques des valeurs hautes et faibles (**Asymétrie de rang**)



- Différences statistiques selon la direction et l'orientation (**Asymétrie directionnelle**)



2. Statistique d'ordre supérieur

Comment simuler les statistiques d'ordre supérieur ? :

Plusieurs stratégies :

- Par optimisation stochastique (Hörning et Bárdossy, 2018; Lauzon et Marcotte, 2019, 2020)
- Par SGS :
 - approche SGS basée sur des copules (Li, 2010)
 - approche SGS basée sur les moments spatiaux d'ordre supérieur (Minniakhmetov et Dimitrakopoulos, 2022)
- Par définition d'une famille de champ spatial non-gaussien (Bárdossy et Hörning, 2023)

Chaque méthode permet de gérer une statistique d'ordre supérieur sans être ne mesure de tout les simuler adéquatement.



2. Statistique d'ordre supérieur

Par optimisation :

L'idée est de générer un champ aléatoire gaussien et de le perturber de manière itérative.

À chaque perturbation, nous calculons les statistiques d'ordre supérieur et les comparons avec celles déduites des données.

Nous conservons (ou non) la perturbation selon un critère (recuit, acceptation/rejet, probabilité, etc.).

À la fin, le champ gaussien aura été suffisamment perturbé pour converger vers un champ non-gaussien avec les caractéristiques désirées.

Algorithme existant:

Random Mixing (Bárdossy et Hörning, 2016)

Phase annealing (Hörning et Bárdossy, 2018)

FFTMA-SA (Lauzon et Marcotte, 2019)

S-STBM (Lauzon et Marcotte, 2020)



2. Statistique d'ordre supérieur

Par optimisation : Asymétrie directionnelle

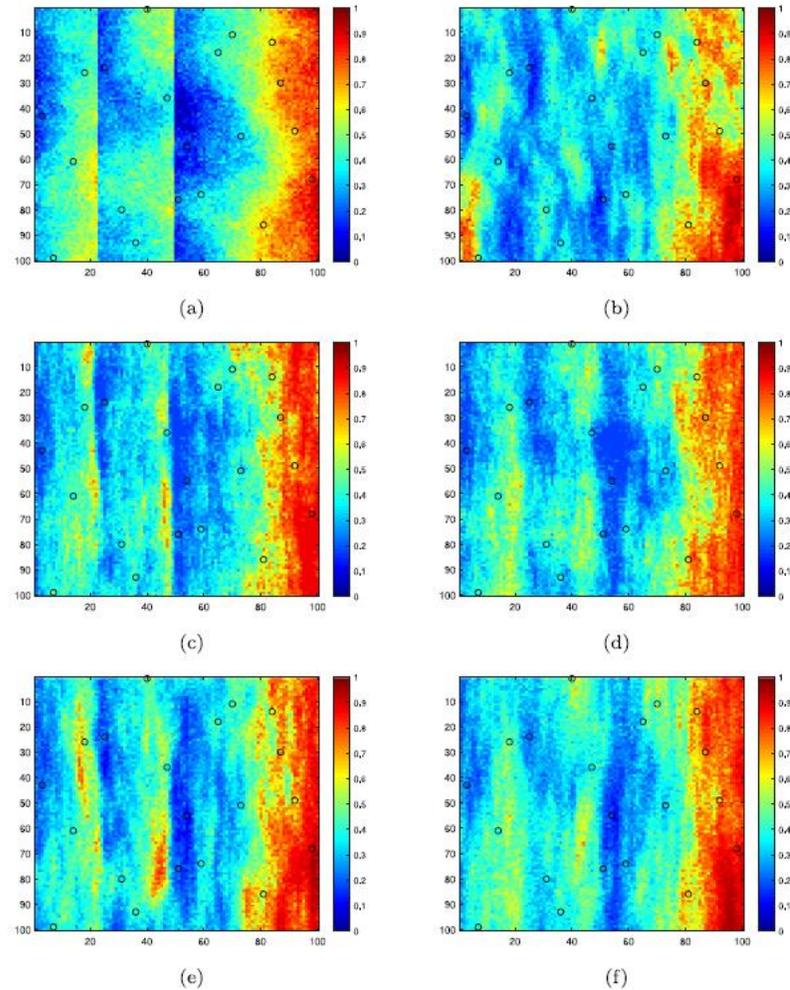


Fig. 5. (a) Reference field and location of conditioning data (black circles); (b) Uncalibrated STBM; (c) FFTMA-SA with OF directional asymmetry; (d) FFTMA-SA with OF third-order moments; (e) S-STBM with OF directional asymmetry; (f) S-STBM with OF third-order moments.

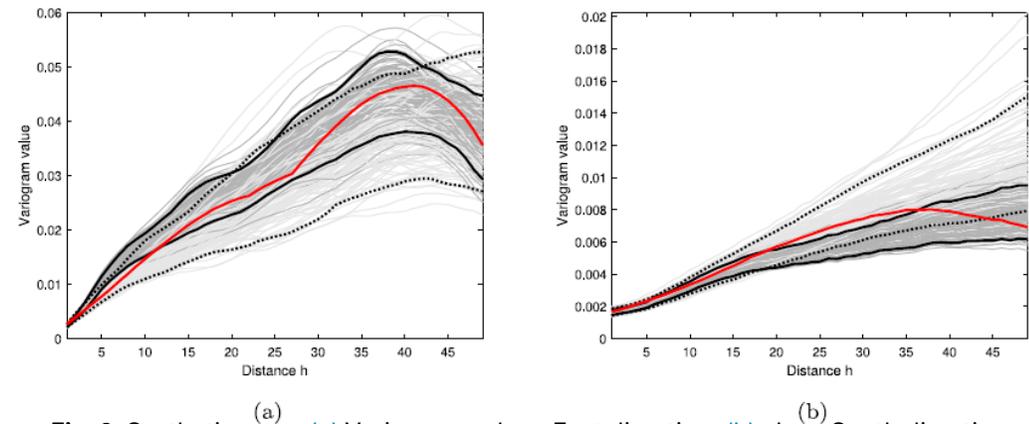


Fig. 6. Synthetic case. (a) Variograms along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).

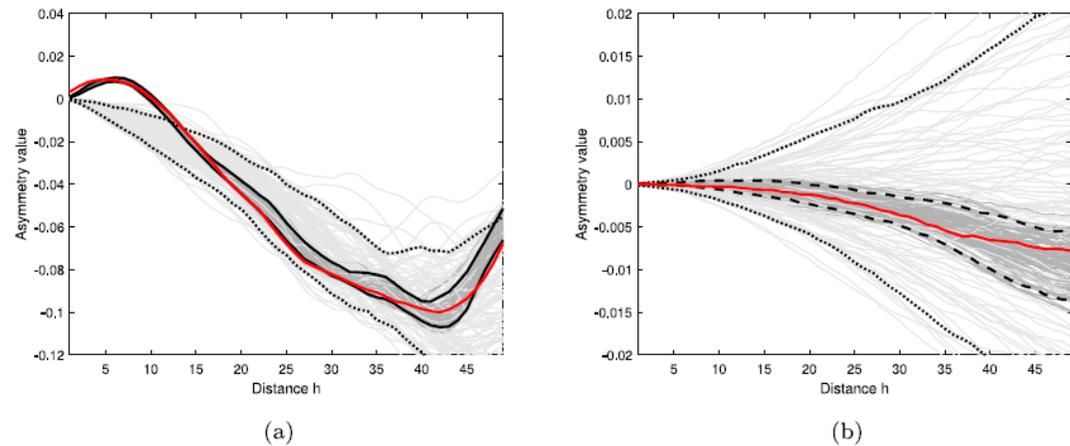


Fig. 7. Synthetic case. (a) Asymmetry function along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).

2. Statistique d'ordre supérieur

Par optimisation : Moment non-centré d'ordre 3

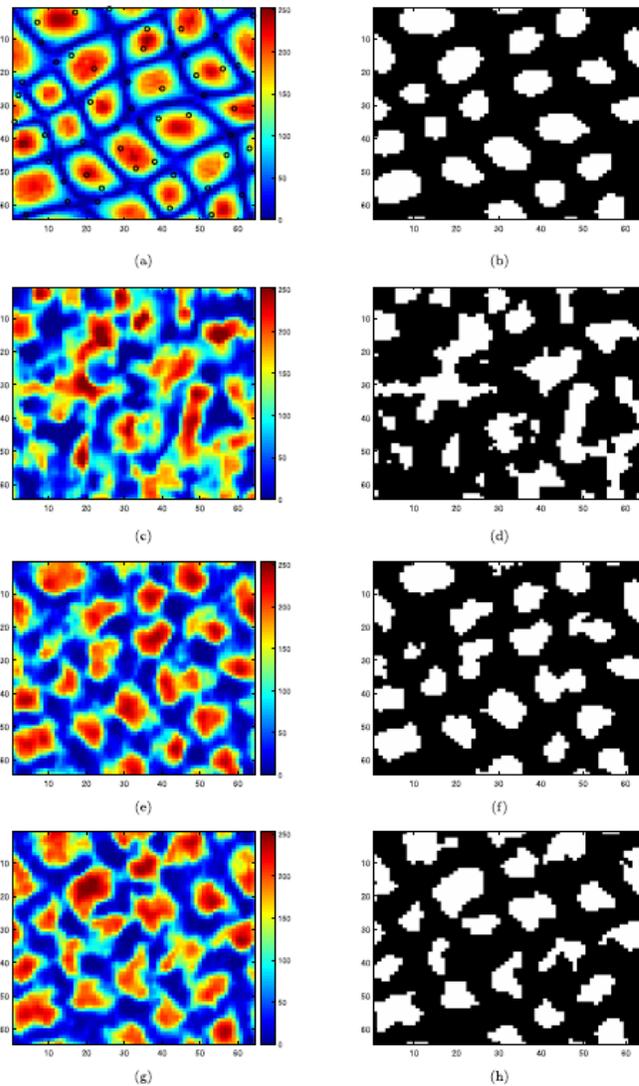


Fig. 8. Left column: Reference and realizations; Right column: thresholded at 70th percentile; First row: Reference field and 50 HD (black circle); Second row: Uncalibrated STBM with 50 HD; Third row: S-STBM with 50 HD; Fourth row: S-STBM with no HD. (20 000 OF calls, third-order spatial moments).

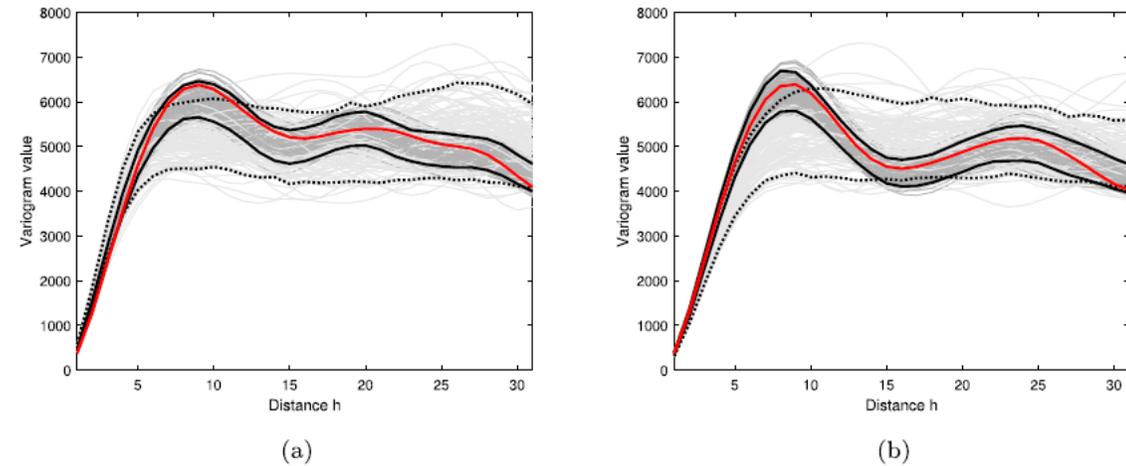


Fig. 9. “Giraffe” TI. (a) Variograms along East direction, (b) along South direction. Reference field (solid red), S-STBM realizations (dark gray), uncalibrated STBM (light gray); 90% confidence intervals shown (solid dark: calibrated and dashed lines: uncalibrated).

2. Statistique d'ordre supérieur

Par optimisation : Fonction objectif et calcul rapide par FFT

Par exemple,
$$OF(\mathbf{z}^{sim}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(A_d^{sim}(\mathbf{h}_i) - A_d^{données}(\mathbf{h}_i) \right)^2$$

Calculer A_d (ou autres statistiques d'ordre supérieur) sous forme expérimentales revient lourd mathématiquement, surtout lorsque le modèle géologique est 3D avec plusieurs points :

Marcotte (1996) a développé des équations permettant le calcul rapide du variogramme par FFT.

Les statistiques d'ordre supérieurs peuvent aussi être résolues par FFT (Lauzon and Hörning, 2024).

2. Statistique d'ordre supérieur

Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Rappel : Covariance croisée non-centrée :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$$

Théorème de convolution :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV \rightarrow \mathcal{F}[C(\mathbf{h})] = \mathcal{F}^*(f(\mathbf{u})) \times \mathcal{F}(g(\mathbf{u}))$$

On peut donc calculer une covariance croisée non-centré en prenant la transformer de Fourier de $f(x)$, en appliquant le conjugué complexe au résultat, et en multipliant élément par élément le résultat avec la transformer de Fourier de $g(x)$. Il suffit de prendre la transformer de Fourier inverse pour obtenir la covariance croisée non-centré.

2. Statistique d'ordre supérieur

Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

En présence de données non-observées, il suffit de définir une variable indicatrice contenant la présence (ou non) d'une donnée.

$$I_f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si la donnée existe} \\ 0, & \text{si la donnée n'existe pas} \end{cases}$$

Par la suite, l'équation de la covariance croisée non-centré devient :

$$C(\mathbf{h}) = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV = \int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$$

Ici, l'ajout de l'indicatrice ne sert à rien, car $I_f(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Cependant, pour le calcul du variogramme et d'autres statistiques, les indicatrices sont utiles.



2. Statistique d'ordre supérieur

Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Variogramme :

$$\gamma_{fg}(\mathbf{h}) = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})[f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})][g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})]dV$$

$$V = \int_V I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV = N(\mathbf{h})$$

On retrouver la forme $\int_V f(\mathbf{x})g(\mathbf{x} + \mathbf{h})dV$ pour appliquer le théorème de convolution



2. Statistique d'ordre supérieur

Calcul rapide des statistiques d'ordre supérieurs par FFT:

Donc pour $N(\mathbf{h})$, on pose $f^*(\mathbf{x}) = I_f(\mathbf{x})I_g(\mathbf{x})$ et $g^*(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = I_f(\mathbf{x} + \mathbf{h})I_g(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ et on obtient :

$$N(\mathbf{h}) = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}^*(f^*(x))\mathcal{F}(g^*(x)) \right)$$

Pour l'intégrale du variogramme, il faut développer la multiplication en une série d'addition, on obtient à la fin :

$$\gamma_{fg}(\mathbf{h}) = \frac{\mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}^*(I_f I_g)\mathcal{F}(fg) - \mathcal{F}^*(f I_g)\mathcal{F}(I_f g) - \mathcal{F}^*(I_f g)\mathcal{F}(f I_g) + \mathcal{F}^*(fg)\mathcal{F}(I_f I_g) \right)}{2 \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}^*(I_f I_g)\mathcal{F}(I_f I_g) \right)}$$



2. Statistique d'ordre supérieur

Par SGS : Algorithme pour le cas catégoriel

1. Définir un chemin aléatoire parcourant tous les nœuds non échantillonnés.

2. Pour chaque nœud dans le chemin :

a. Trouver les données les plus proches $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$. Les catégories à ces nœuds sont notées par $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$;

b. Pour chaque $x_j, j = 1, \dots, k$, calculer la statistique d'ordre supérieur;

c. Calculer la distribution conditionnelle à partir de la distribution conjointe;

d. Tirer une valeur aléatoire z_{i_0} à partir de cette distribution conditionnelle et l'assigner à la localisation non échantillonnée x_{i_0} ;

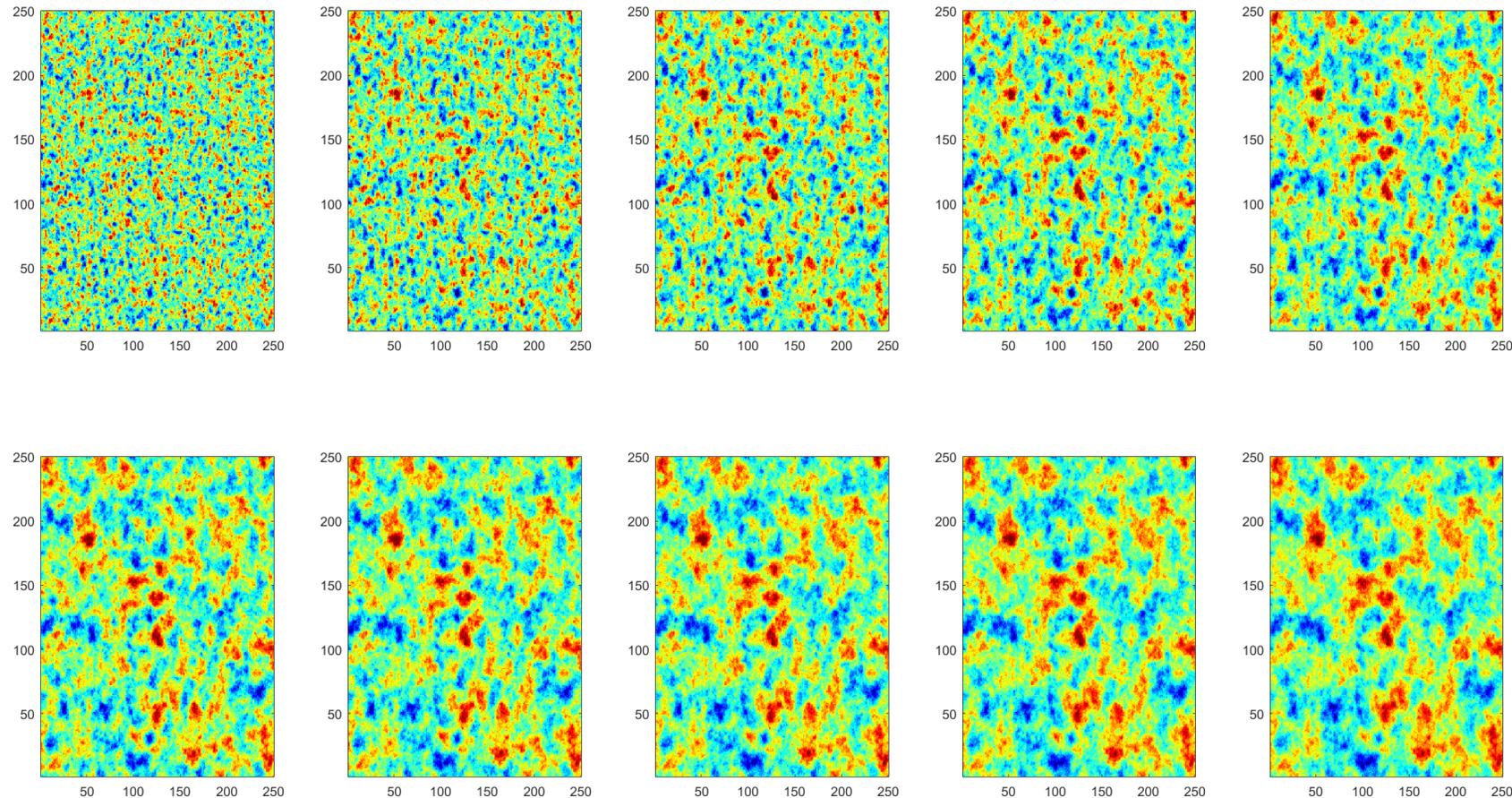
e. Ajouter z_{i_0} à l'ensemble des données dures échantillonnées et aux valeurs précédemment simulées;

f. Répéter les étapes 2a à 2e pour tous les points le long du chemin aléatoire défini à l'étape 1.

2. Statistique d'ordre supérieur

Par famille:

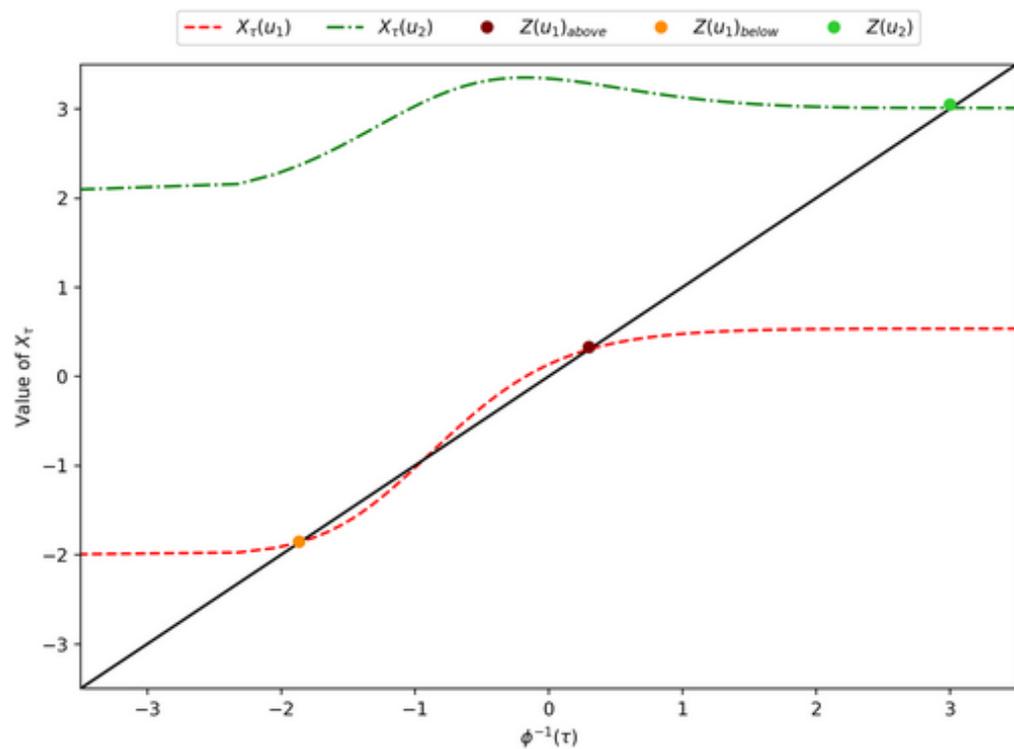
Définir une famille de simulation ayant le même germe aléatoire (p.ex., par FFTMA avec U fixe, mais avec une fonction de covariance variable)



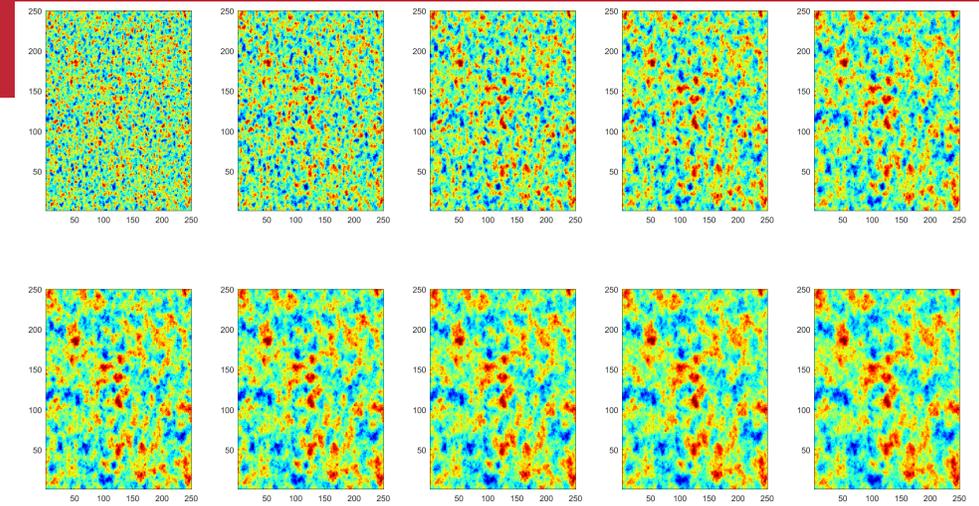
2. Statistique d'ordre supérieur

Par famille:

Définir une famille de simulation ayant le même germe aléatoire (p.ex., par FFTMA avec U fixe, mais avec une fonction de covariance variable)

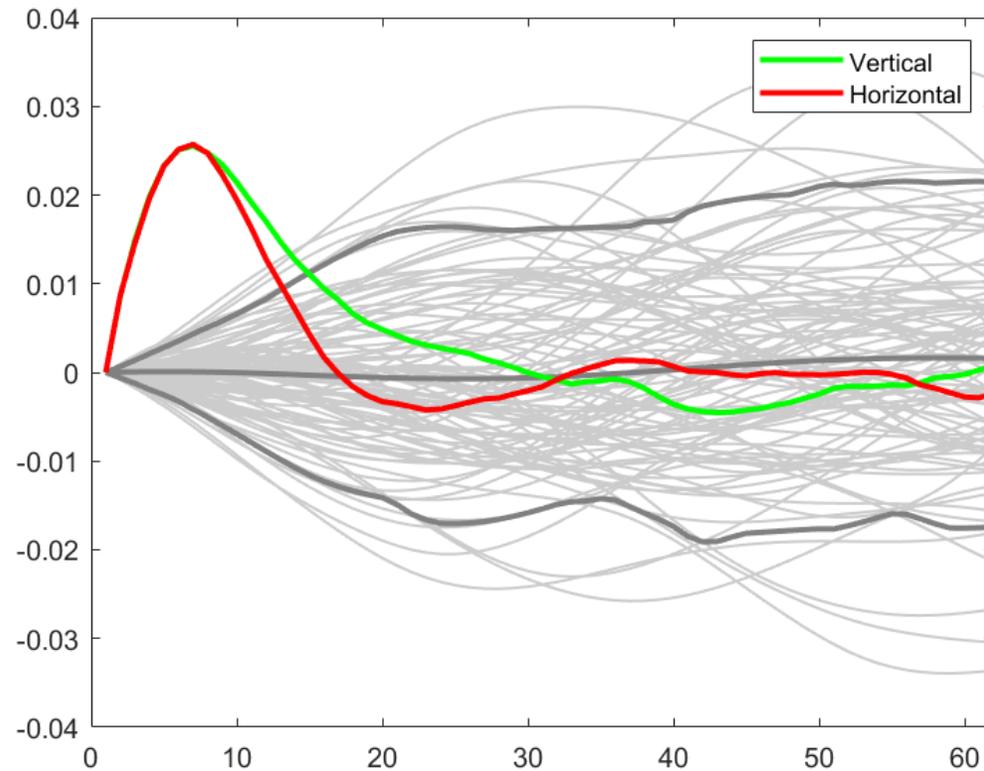
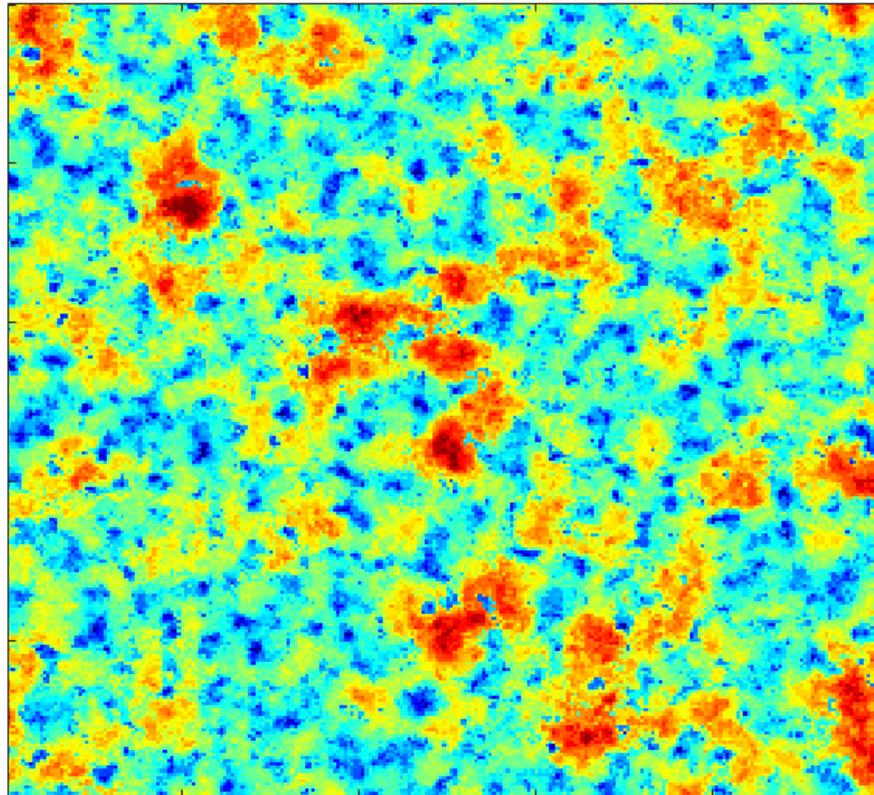
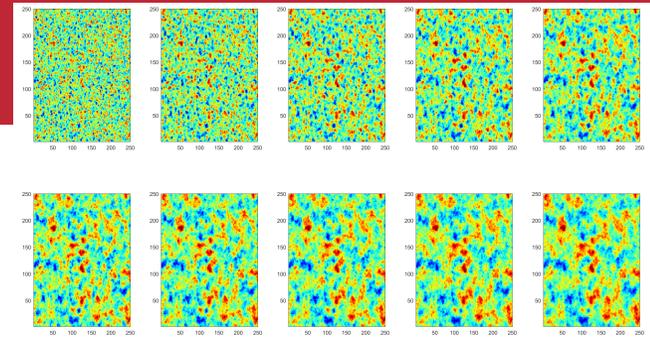


$$Z(u) = \begin{cases} X_{\tau_i}(u) & \text{if } \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) < X_{\tau_i}(u) \leq \Phi^{-1}(\tau_i) \\ & \text{and } X_{\tau_j}(u) > \Phi^{-1}(\tau_j) \quad \forall j < i \\ \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) & \text{if } X_{\tau_i}(u) \leq \Phi^{-1}(\tau_{i-1}) \\ & \text{and } X_{\tau_j}(u) > \Phi^{-1}(\tau_j) \quad \forall j < i \end{cases}$$



2. Statistique d'ordre supérieur

Par famille:



2. Statistique d'ordre supérieur

Moment statistique centré d'ordre supérieur :

$$M_{c,1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(x_i)$$

$$M_{c,2}(h_1) = \frac{1}{N(h_1)} \sum_{i=1}^{N(h_1)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)$$

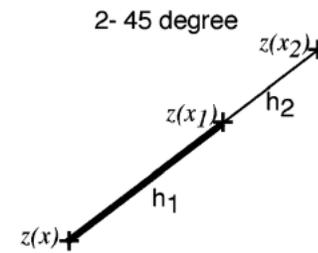
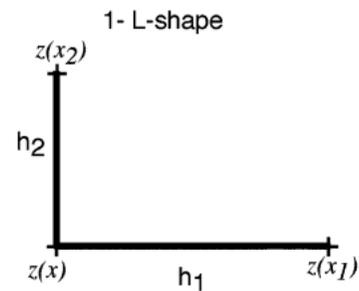
$$M_{c,3}(h_1, h_2) = \frac{1}{N(h_1, h_2)} \sum_{i=1}^{N(h_1, h_2)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)Z(x_i + h_2)$$



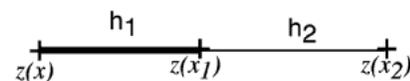
2. Statistique d'ordre supérieur

Moment statistique centré d'ordre supérieur :

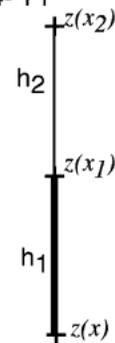
$$M_{c,3}(h_1, h_2) = \frac{1}{N(h_1, h_2)} \sum_{i=1}^{N(h_1, h_2)} Z(x_i)Z(x_i + h_1)Z(x_i + h_2)$$



3- XX



4- YY



2. Statistique d'ordre supérieur

Moment statistique centré d'ordre supérieur :

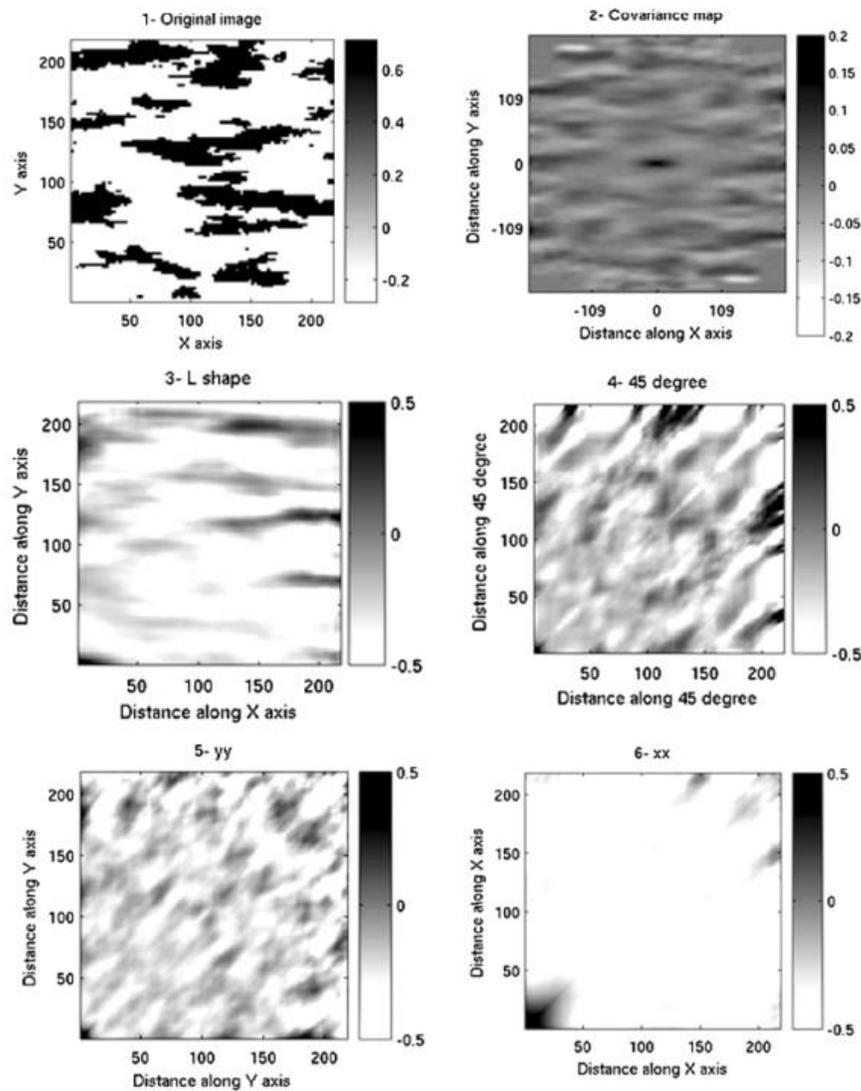


Fig. 8 Example 1, from top left to bottom right: (1) original image, (2) covariance map, and (3) to (6) cumulant maps using templates shown in Fig. 3

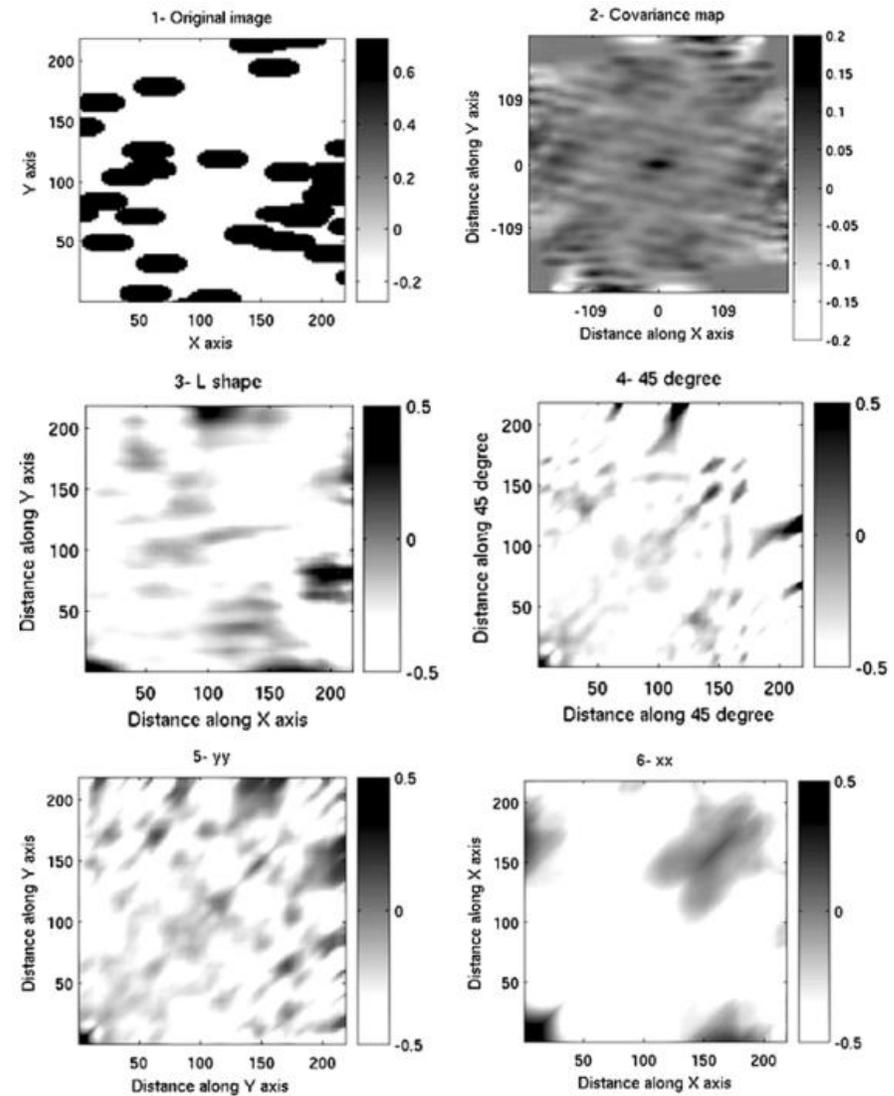


Fig. 9 Example 2, from top left to bottom right: (1) original image, (2) covariance map, and (3) to (6) cumulant maps using templates shown in Fig. 3