

GML6402A : Géostatistique

Cours 7 : Simulations géostatistiques (suite)



**POLYTECHNIQUE
MONTREAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Être en mesure de programmer :
 1. FFTMA
 2. Bandes tournantes spatiales
 3. Bandes tournantes spectrales
 4. Expansion de Karhunen – Loève
- Expliquer les principales propriétés des simulations
- Utiliser et interpréter les résultats d'une simulation pour l'estimation des ressources
- Réaliser un post-conditionnement par krigeage

Plan du cours

1. FFTMA
2. Bandes tournantes spatiales
3. Bandes tournantes spectrales
4. Expansion de Karhunen – Loève
5. Post-conditionnement par krigeage



1. FFTMA

Théorie : fast Fourier transform moving average

L'idée de base de la méthode est que $Z(x)$ peut s'écrire comme une moyenne spatiale de variables aléatoires indépendantes. La fonction de pondération utilisée dans la moyenne spatiale détermine la covariance obtenue.

Principe : Tirer avantage du théorème de convolution

$$Z = Y * g \rightarrow Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)g(x - t)dt$$

Par le théorème de convolution :

$$Z(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Z(x)) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(Y * g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(Y) \times \mathcal{F}(g))$$

où g est la fonction de pondération, Y est un bruit blanc habituellement gaussien et \mathcal{F} désigne la transformer de Fourier.

1. FFTMA

Théorie : fast Fourier transform moving average

Pour compléter l'algorithme, il ne reste qu'à déterminer la fonction « g » permettant de reproduire la covariance désirée.

Dans certains cas, on peut obtenir analytiquement en utilisant le fait que la covariance $C(h)$ peut elle même s'écrire comme un produit de convolution :

$$C(h) = g * \check{g} = \int g(t)g(t - h)dt$$

Où $\check{g} = g(-x)$

Toutefois en pratique, il est beaucoup plus simple (et général) d'obtenir $\mathcal{F}(C)$ numériquement par FFT de la matrice de covariance et de poser :

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(C)^{0.5}$$

1. FFTMA

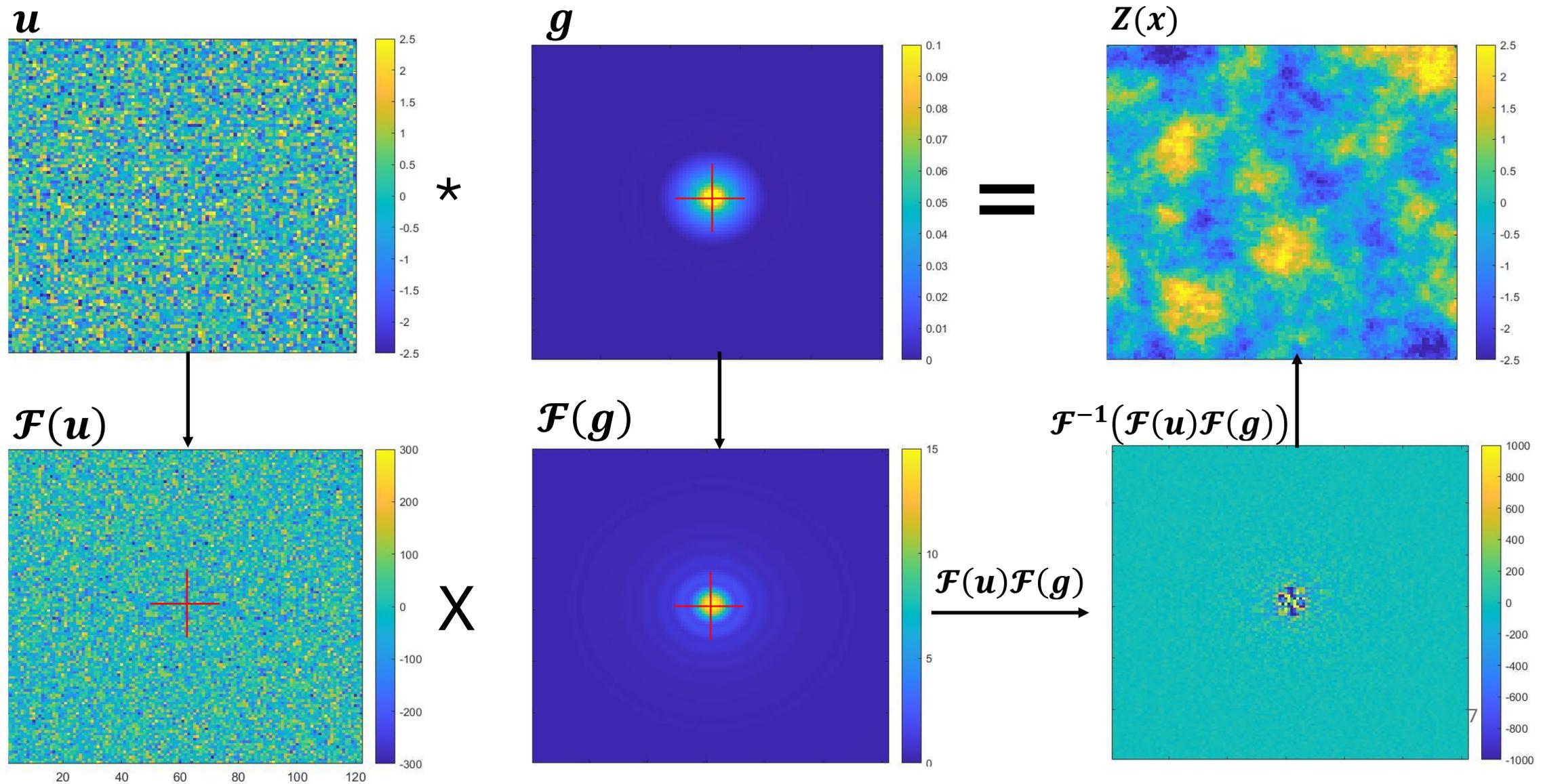
Théorie : fast Fourier transform moving average

L'algorithme est donc le suivant :

- i. Définir la grille à simuler. Les données doivent être sur une grille régulière à cause de l'utilisation de la FFT. La grille doit être de taille $(N_x + a)(N_y + a)$ pour le cas 2D (taille $N_x \times N_y$) et avec portée isotrope a . Cet accroissement du domaine est important pour tenir compte de la périodicité de la FFT.
- ii. Calculer la covariance entre le point d'indice (1,1) et tous les autres points. La matrice est de taille $(N_x + a)(N_y + a)$.
- iii. Calculer la FFT de la matrice de covariance. Comme $C(h)$ est symétrique et réelle, la FFT est réelle. On pose $G = \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(C)^{0.5}$.
- iv. Simuler Y , bruit blanc gaussien de variance unitaire aux points de la grille.
- v. Prendre la FFT de Y . La FFT est alors complexe.
- vi. Effectuer le produit $G \mathcal{F}(Y)$ et prendre la FFT inverse de ce produit. Ne conserver que la partie réelle et ne conserver que les $(N_x) (N_y)$ premiers points simulés

1. FFTMA

Méthode FFTMA : modélisation d'un variogramme sphérique 2D isotrope ($a = 20, C = 1$)



1. FFTMA

Méthode FFTMA : Illustration en 1D → modèle sphérique ($a = 2, C = 1$)

Simulation de quatre points. On doit donc simuler un champ de taille $4+a=6$.

Étape	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4	Point 5	Point 6
$C(h)$	1	0.3125	0	0	0	0.3215
$FFT(C(h))$	1.6250	1.3125	0.6875	0.3750	0.6875	1.3125
$FFT(g)$	1.2748	1.1456	0.8292	0.6124	0.8292	1.1456
Y	-0.4326	-1.6656	0.1253	0.2877	-1.1465	1.1909
$FFT(Y)$	-1.6407	-0.4470 + 1.3724i	0.6030 + 3.5752i	-1.2667	0.6030 - 3.5752i	-0.4470 - 1.3724i
$FFT(g) \times FFT(y)$	-2.0915	-0.5121 + 1.5723i	0.5000 + 2.9644i	-0.7757	0.5000 - 2.9644i	-0.5121 - 1.5723i
$IFFT \rightarrow Z(x)$	-0.4819	-1.6976	-0.0740	0.1181	-0.8777	0.9216

$Z(x)$: on retient quatre valeurs consécutives (au choix)

1. FFTMA

Méthode FFTMA : Avantages et inconvénients

Avantages

- Méthode très efficace en temps de calcul.
- Assez facile à programmer
- N'importe quelle covariance (anisotropies, imbriquées, etc.)
- Peut être modifiée localement
- Peut fixer l'aléa et faire varier le modèle

Inconvénients

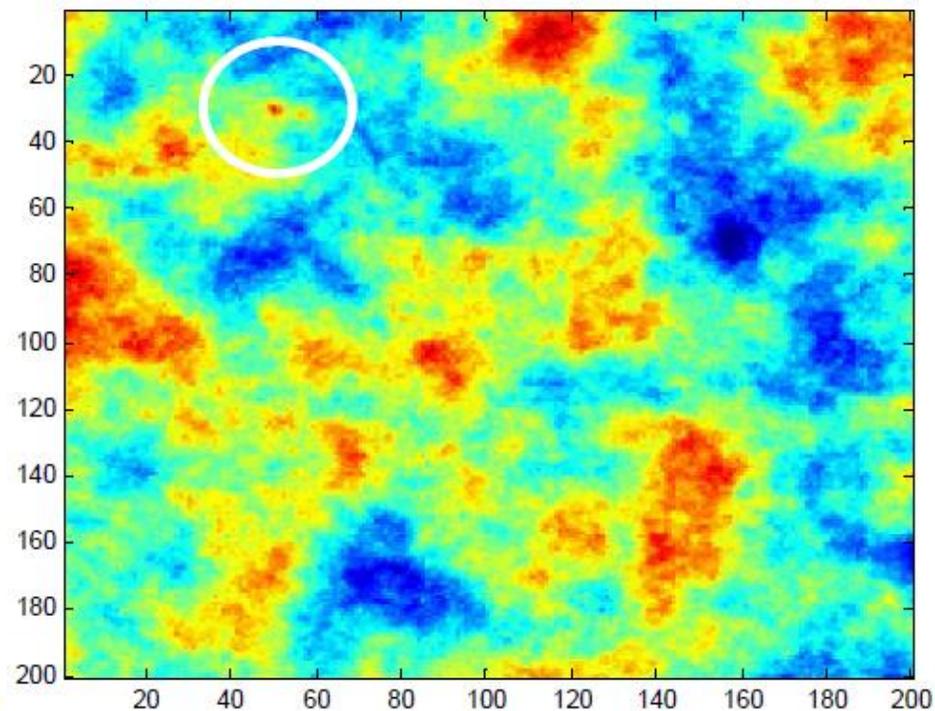
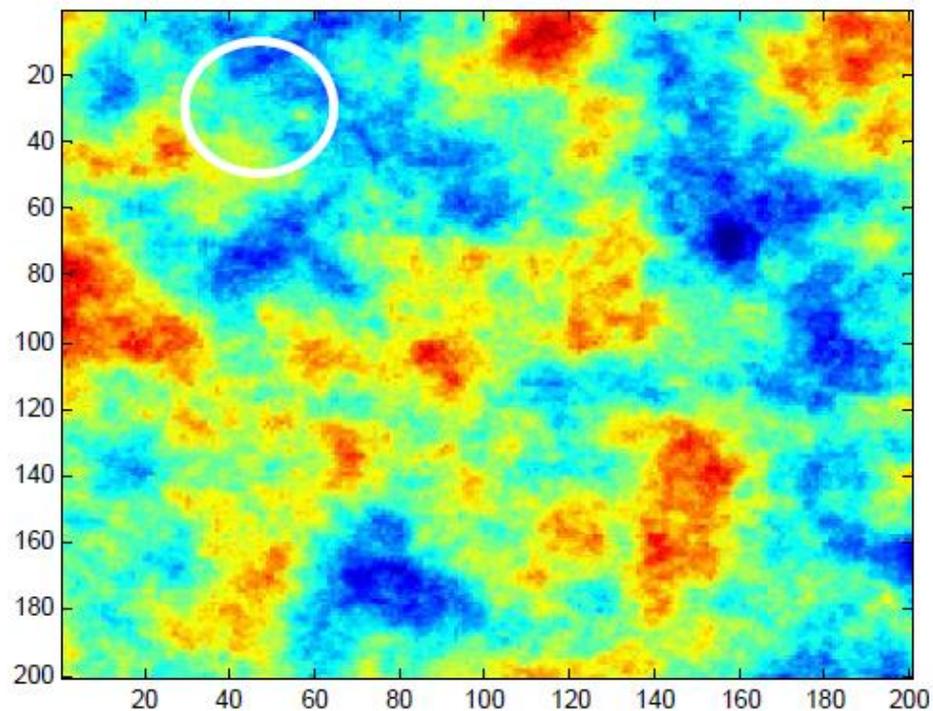
- Grille régulière seulement
- Post-conditionnement requis
- On ne peut simuler de très grandes portées sur une maille fine. (Problème d'espace mémoire)



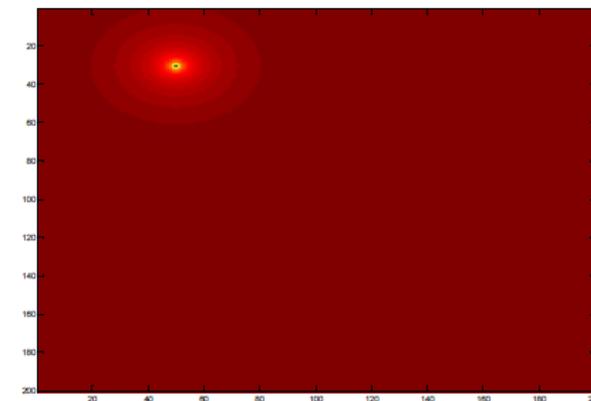
1. FFTMA

Méthode FFTMA : perturbations locales

On peut changer localement le terme aléatoire pour s'approcher d'un objectif
(p. ex. déformation graduelle, FFTMA-SA)



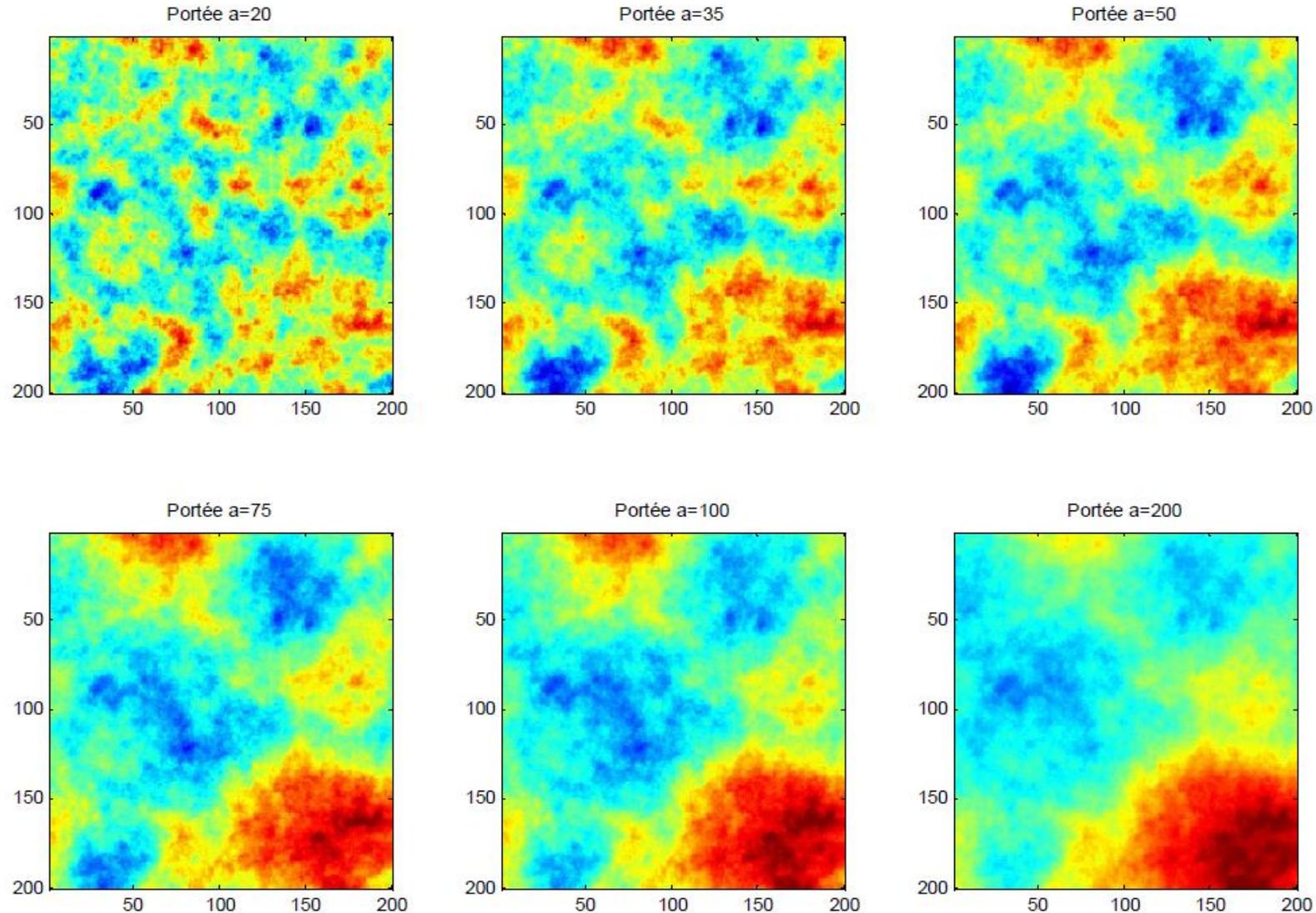
Différence entre les 2 cartes



1. FFTMA

Méthode FFTMA : famille de structure

On peut fixer l'aléa et faire varier la structure seulement



2. Bandes tournantes spatiales

Théorie :

Cette méthode s'appuie sur 2 idées maîtresses :

- Il est simple de calculer la covariance entre des combinaisons de variables aléatoires dont on connaît la fonction de covariance.
- On cherche à représenter une v.a. en 3D par une combinaison linéaire de v.a. simulées sur des lignes (1D) où chaque ligne est simulée indépendamment des autres.



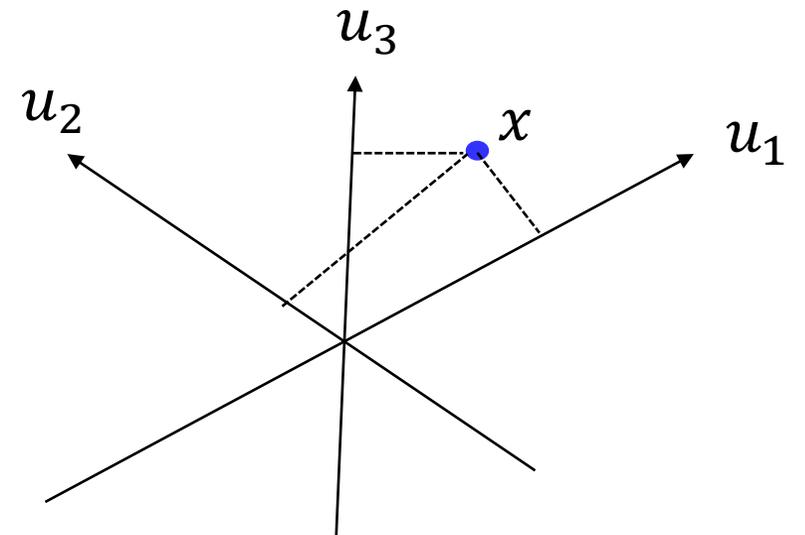
2. Bandes tournantes spatiales

Théorie :

Soit :

- $Z(x)$, la v.a. à simuler au point x .
- Un grand nombre de lignes u_i ($M > 100$) balayant la sphère unité et passant par le centre de la sphère;
- La même covariance $C_y(h)$ sur chaque ligne u_i ;
- Une réalisation $Y_i(t)$ ayant $C_y(h)$ sur chaque ligne u_i ;

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M Y_i(\langle x, u_i \rangle)$$



2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : modélisation de la covariance de ligne

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M Y_i(\langle x, u_i \rangle)$$

Supposons que l'on forme $Z(x + h)$ par le même procédé. On aura alors :

$$\text{Cov}(Z(x), Z(x + h)) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{Cov}(Y_i(\langle x, u_i \rangle), Y_j(\langle x + h, u_j \rangle))$$

Chaque ligne est simulée indépendamment, ceci permet d'écrire :

$$\text{Cov}(Z(x), Z(x + h)) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Cov}(Y_i(\langle x, u_i \rangle), Y_i(\langle x + h, u_i \rangle))$$

On notera que sur une ligne donnée u_i , la distance entre les deux projections des vecteurs x et $x + h$ est simplement $\langle h, u_i \rangle$

2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : modélisation de la covariance de ligne

On cherche à exprimer la covariance que l'on doit simuler sur chaque ligne en fonction de la covariance désirée en 3D (ou 2D).

La fonction de covariance de $Z(x)$ est stationnaire. On impose que les fonctions de covariances sur chaque ligne soient identiques entre elles et toutes stationnaires. Si on laisse tendre M vers l'infini et que les lignes sont placées de façon à discrétiser uniformément une demi-sphère de rayon unité dont le pôle nord est coïncidant avec le vecteur « h », on aura alors, en coordonnées polaires :

$$C_Z(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} C_Y(h \cos \varphi) \sin(\varphi) d\varphi d\theta$$

En effectuant un changement de variable : $t = h \cos(\varphi)$ et $dt = -h \sin(\varphi) d\varphi$. On peut écrire :

$$C_Z(h) = -\frac{1}{h} \int_0^h C_Y(t) dt$$

Finalement, on peut inverser l'équation et obtenir :

$$C_Y(h) = \frac{d}{dh} [h C_Z(h)]$$



2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : modélisation de la covariance de ligne

Covariance 3D

Covariance de ligne

Pour le modèle
sphérique :

$$C \left(1 - 1.5 \left(\frac{h}{a} \right) + 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right)$$

$$C \left(1 - 3 \left(\frac{h}{a} \right) + 2 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right)$$

Pour le modèle gaussien :

$$C \exp \left(-\frac{h^2}{a^2} \right)$$

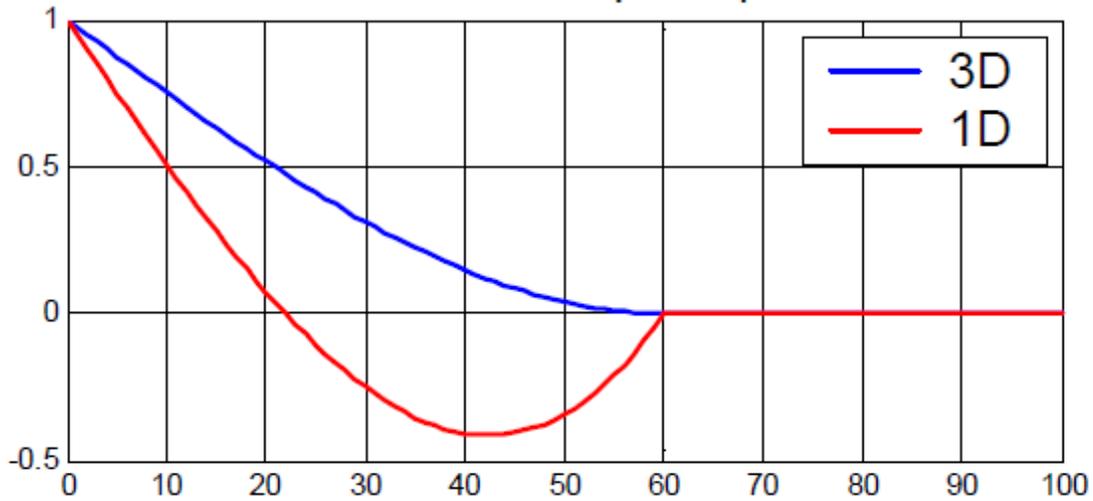
$$C \exp \left(-\frac{h^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{2h^2}{a^2} \right)$$



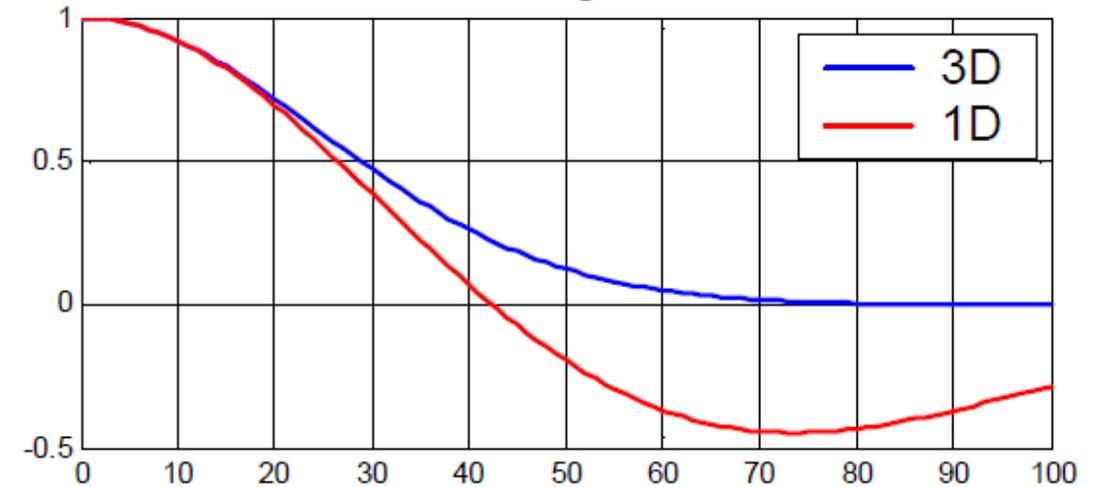
2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : modélisation de la covariance de ligne

Covariance sphérique



Covariance gaussienne



2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : astuces

Simulation en 2D :

1. générer les lignes en 3D;
2. placer les points à simuler en 2D.

Simuler des anisotropies :

1. Rotation + contraction → modèle isotrope;
2. Simuler modèle isotrope aux coordonnées transformées;
3. Dilatation + rotation inverse → modèle anisotrope aux coordonnées originales.

Simulation conditionnelle :

1. Technique du post-conditionnement



2. Bandes tournantes spatiales

Théorie : Avantages et Inconvénients

Avantages

- Méthode la plus efficace en temps de calcul et en espace mémoire.
- Sans rival sérieux pour simuler de grands champs à plusieurs millions de points
- Adaptable dans le domaine spectral (les bandes tournantes spectrales).

Inconvénients

- Plus compliquée à programmer
- Post-conditionnement requis
- Plusieurs structures imbriquées impliquent de les simuler séparément
- Anisotropies



3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Idéologie

Comme son homologue spatial, l'idée principale des bandes tournantes spectrales est de remplacer le processus de simulation dans \mathcal{R}^n (en général, $n = 2$ ou 3) par une série de simulations plus simple dans \mathcal{R} .

Considérons une covariance stationnaire continue n -dimensionnelle $C_n(h)$. Si $C_n(h)$ est réel et symétrique par rapport à l'origine, et que $C_n(h)$ est de carré intégrable, alors sa représentation spectrale est :

$$C_n(h) = \int_{\mathcal{R}^n} e^{i\langle h, \omega \rangle} f(\omega) d\omega = \int_{\mathcal{R}^n} \cos(\langle h, \omega \rangle) f(\omega) d\omega$$



3. Bandes tournantes spectrales

Théorie :

Considérons ensuite un champ aléatoire stationnaire de moyenne nulle $Y(x)$ défini par :

$$Y(x) = \sqrt{2} \cos(\langle V, x \rangle + 2\pi U)$$

où V est un vecteur de fréquence aléatoire avec une distribution donnée par la densité spectrale $f_1(\omega)$ et U est uniformément distribué sur $[0, 1]$.

Le processus aléatoire $Y(x)$ est de moyenne nulle et possède une covariance $C_n(h)$.

Preuve :



3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Preuve

$$E[Y(x)] = \int_0^1 dU \int_{\mathbb{R}^n} d\chi(V) \sqrt{2} \cos(\langle V, x \rangle + 2\pi U) = 0$$

$$E[Y(x)Y(x+h)] = \int_0^1 dU \int_{\mathbb{R}^n} d\chi(V) 2 \cos(\langle V, x \rangle + 2\pi U) \\ \times \cos(\langle V, x+h \rangle + 2\pi U)$$

$$= \int_0^1 dU \int_{\mathbb{R}^n} d\chi(V) \cos(\langle V, h \rangle) \\ + \cos(2\langle V, x \rangle + \langle V, h \rangle + 4\pi U)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d\chi(V) \cos(\langle V, h \rangle) = C_n(h)$$



3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Ergodicité et champ gaussien

Pour appliquer l'ergodicité et le champ gaussien, une somme de N processus aléatoires indépendants $Y(x)$ est utilisée (théorème central limite) :

$$Z(x) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{i=1}^N Y_i(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^N \cos(\langle V, x \rangle + 2\pi U)$$

On doit maintenant calculer V , le vecteur de fréquence aléatoire avec une distribution donnée par la densité spectrale $f_1(\omega)$

Il existe deux méthodes pour un champ 3D isotrope. Dans ce cas, la densité spectrale est radialement symétrique.

3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Ergodicité et champ gaussien

Cela peut être facilement déterminé en prenant la transformée de Fourier de la covariance de ligne dans l'opérateur des bandes tournantes :

$$C_1(h) = \frac{d(hC_3(h))}{dh}$$
$$f_1(\omega) = 2 \int_0^{\infty} C_1(h) \cos(\omega h) dh$$

Une autre possibilité est de calculer la transformée de Fourier de $C_3(h)$ pour obtenir la densité spectrale $f_3(\omega)$ et à partir de celle-ci obtenir la densité spectrale unidimensionnelle $f_1(\omega)$:

$$f_3(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{R}^3} C_3(h) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx$$
$$f_1(\omega) = (2\pi\omega)^2 f_3(\omega)$$

3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Quelques densités spectrales (Marcotte, 2015)

Table 1

3D spectral densities of some common unit sill covariance functions (note: $a_g^3 = a_x a_y a_z$; $h_a = \sqrt{(h_x/a_x)^2 + (h_y/a_y)^2 + (h_z/a_z)^2}$; $s_a = \sqrt{a_x^2 s_x^2 + a_y^2 s_y^2 + a_z^2 s_z^2}$ and $I(h_a) = 1$ when $h_a < 1$ and 0 otherwise).

Covariance	Definition	3D radial spectral density
	$C_a(h)$	$f(s_a)$
Exponential	e^{-h_a}	$\frac{a_g^3}{\pi^2(1+s_a^2)^2}$
Gaussian	$e^{-h_a^2}$	$\frac{a_g^3}{8\pi^{3/2}} e^{-(1/4)s_a^2}$
Spherical	$(1 - 1.5h_a + 0.5h_a^3)I(h_a)$	$\frac{3a_g^3}{4\pi s_a^3} J_{3/2}^2(s_a/2)$
Cubic	$(1 - 7h_a^2 + \frac{35}{4}h_a^3 - \frac{7}{2}h_a^5 + \frac{3}{4}h_a^7)I(h_a)$	$\frac{210a_g^3}{\pi^2 s_a^{10}} (6s_a \cos(s_a/2) + (s_a^2 - 12)\sin(s_a/2))^2$
Penta	$(1 - \frac{22}{3}h_a^2 + 33h_a^4 - \frac{77}{2}h_a^5 + \frac{33}{2}h_a^7 - \frac{11}{2}h_a^9 + \frac{5}{6}h_a^{11})I(h_a)$	$\frac{27720a_g^3}{\pi^2 s_a^{14}} ((s_a^3 - 60s_a)\cos(s_a/2) + (120 - 12s_a^2)\sin(s_a/2))^2$
Cauchy	$(1 + h_a^2)^{-\alpha}$ with $\alpha > 1/2$	$\frac{a_g^3 s_a^{\alpha-3/2}}{\pi^{3/2} 2^{\alpha+1/2}} K_{3/2-\alpha}(s_a)$
	note: with $0 < \alpha \leq 1/2$ the spectral density could not be computed	
K-Bessel (Matern)	$\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} h_a^\nu K_\nu(h_a)$ with $\nu \geq 0$	$\frac{a_g^3 \Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu)\pi^{3/2}(1+s_a^2)^{\nu+3/2}}$

3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Quelques densités spectrales (Arroyo et al. , 2020)

Table 1. Examples of Isotropic Covariances/Generalized Covariances and Their Spectral Densities

Model	Covariance	Spectral density	Restrictions
spherical	$\frac{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{3+d}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)_+^{\frac{1+d}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+d}{2}; \frac{3+d}{2}; 1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)$	$\frac{\Gamma(1 + d/2)}{\pi^{d/2}\ \mathbf{u}\ ^d} J_{d/2}^2\left(\frac{2\pi a\ \mathbf{u}\ }{2}\right)$	$a > 0$
cubic	$\frac{\Gamma(3 + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{7+d}{2})\Gamma(\frac{3}{2})} \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)_+^{\frac{3+d}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3+d}{2}; \frac{7+d}{2}; 1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)$	$\frac{2\Gamma(3 + d/2)}{\pi^{2+d/2}a^2\ \mathbf{u}\ ^{d+2}} J_{1+d/2}^2\left(\frac{2\pi a\ \mathbf{u}\ }{2}\right)$	$a > 0$
penta	$\frac{2\Gamma(5 + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{11+d}{2})\Gamma(\frac{5}{2})} \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)_+^{\frac{5+d}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5+d}{2}; \frac{11+d}{2}; 1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)$	$\frac{8\Gamma(5 + d/2)}{3\pi^{4+d/2}a^4\ \mathbf{u}\ ^{d+4}} J_{2+d/2}^2\left(\frac{2\pi a\ \mathbf{u}\ }{2}\right)$	$a > 0$
exponential	$\exp\left\{-\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right\}$	$\pi^{\frac{d-1}{2}}(2a)^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \left(1 + (2\pi a)^2\ \mathbf{u}\ ^2\right)^{-\frac{d+1}{2}}$	$a > 0$
Gaussian	$\exp\left\{-\left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^2\right\}$	$\pi^{\frac{d}{2}} a^d \exp\left(-\frac{(2\pi a)^2\ \mathbf{u}\ ^2}{4}\right)$	$a > 0$
Askey	$\left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)_+^{\nu}$	$\frac{2\pi^{d/2}a^d\Gamma(d)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(d/2)\Gamma(\nu+d+1)} \times {}_1F_2\left(\frac{d+1}{2}; \frac{\nu+d+1}{2}, \frac{\nu+d+2}{2}; -(\pi a\ \mathbf{u}\)^2\right)$	$a > 0, \nu \geq \frac{d+1}{2}$
Wendland	$\frac{2^{-\nu-k}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)_+^{\nu+k} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \nu+k+1; 1 - \frac{\ \mathbf{h}\ ^2}{a^2}\right)$	$\frac{2^{k+d}\pi^{d/2}a^d\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{d+1}{2}+k)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+d+2k+1)} \times {}_1F_2\left(\frac{d+1}{2}+k; \frac{\nu+d+1}{2}+k, \frac{\nu+d+2}{2}+k; -(\pi a\ \mathbf{u}\)^2\right)$	$a > 0, 2k \in \mathbb{N}^*, \nu = \left\lfloor \frac{d}{2} + k \right\rfloor + 1$

$(\cdot)_+$ denotes the positive part function, $[\cdot]$ the integer part function, $\Gamma(\cdot)$ the gamma function, J_ν the Bessel function of order ν , ${}_2F_1$ Gauss's hypergeometric function and ${}_1F_2$ a generalized hypergeometric function [1].

3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Quelques densités spectrales (Arroyo et al. , 2020)

Table 2. Examples of Isotropic Covariances/Generalized Covariances and Their Spectral Densities

Model	Covariance	Spectral density	Restrictions
Matérn	$\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^\nu K_\nu \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)$	$\frac{\pi^{\frac{d}{2}} (2a)^d \Gamma\left(\nu + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \left(1 + (2\pi a)^2 \ \mathbf{u}\ ^2\right)^{-\frac{d}{2}-\nu}$	$a > 0, \nu > 0$
J-Bessel	$2^\nu \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^{-\nu} J_\nu \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)$	$\frac{\pi^{\frac{d}{2}} (2a)^d \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma\left(\nu + 1 - \frac{d}{2}\right)} \left(1 - (2\pi a)^2 \ \mathbf{u}\ ^2\right)_+^{\nu-\frac{d}{2}}$	$a > 0, \nu > \frac{d}{2} - 1$
Cauchy	$\left(1 + \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^2\right)^{-\nu}$	$\frac{2\pi^\nu \ \mathbf{u}\ ^{v-d/2} a^{v+d/2}}{\Gamma(\nu)} K_{\nu-d/2}(2\pi a \ \mathbf{u}\)$	$a > 0, \nu > d - 1$
Laguerre	${}_1F_1\left(\nu; \frac{d}{2}; -\left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^2\right)$	$\frac{\Gamma(d/2)(\pi a \ \mathbf{u}\)^{2\nu}}{\Gamma(\nu)\pi^{d/2}\ \mathbf{u}\ ^d} \exp\left(-(\pi a \ \mathbf{u}\)^2\right)$	$a > 0, \nu > \frac{d-1}{4}$
Hypergeometric	${}_2F_1\left(\nu, \nu'; \frac{d}{2}; -\left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^2\right)$	$\frac{2\Gamma(d/2)(\pi a \ \mathbf{u}\)^{\nu+\nu'}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu')\pi^{d/2}\ \mathbf{u}\ ^d} K_{\nu-\nu'}(2\pi a \ \mathbf{u}\)$	$a > 0, \max(\nu, \nu') > \frac{d-1}{4}$
power	$(-1)^{\lfloor \alpha/2 \rfloor + 1} \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^\alpha$	$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} + k\right) \pi^{\alpha+d/2} a^\alpha \ \mathbf{u}\ ^{\alpha+d}}$	$a > 0, 2k < \alpha < 2k + 2$
spline	$(-1)^{k+1} \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)^{2k} \log\left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{a}\right)$	$\frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{2k+d}{2}\right)}{2\pi^{2k+d/2} a^{2k} \ \mathbf{u}\ ^{2k+d}}$	$a > 0, k \in \mathbb{N}$

$(\cdot)_+$ denotes the positive part function, $\lfloor \cdot \rfloor$ the integer part function, $\Gamma(\cdot)$ the gamma function, J_ν the Bessel function of order ν , K_ν the modified Bessel function of the second kind of order ν , ${}_1F_1$ Kummer's confluent hypergeometric function and ${}_2F_1$ Gauss's hypergeometric function [1].

3. Bandes tournantes spectrales

Théorie : Algorithme

1. Calculer la fonction de densité spectral $f_1(\omega)$ permettant de simuler $C_3(h)$
2. Intégrer $f_1(\omega)$ pour obtenir la fonction de répartition $F_1(\omega)$
3. Pour $\forall i = 1 \dots N$
 - a) Choisir une direction aléatoire sur la demi-sphère unité pour la ligne u_i (par exemple en utilisant la séquence de van der Corput);
 - b) Tiré uniformément t_i dans $[0,1]$ et définir $w_i = F_1(t_i)$;
 - c) Définir $V_i = w_i u_i$
 - d) Tiré une phase aléatoire U_i uniformément dans $[0,1]$;
 - e) Calculer le champ $Y_i(x) = \sqrt{2} \cos(\langle V_i, x \rangle + 2\pi U_i)$

4. Calculer $Z(x) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{i=1}^N Y_i(x)$

4. Expansion de Karhunen-Loève

Théorie : Idéologie

Une autre méthode rapide et efficace pour simuler des champs aléatoires à partir d'un processus gaussien est l'expansion de Karhunen-Loève (KLE). Cette méthode **décompose un processus gaussien en une série de fonctions orthogonales pondérées** par des coefficients aléatoires, permettant ainsi de représenter la variabilité spatiale.

Pour un processus gaussien avec une fonction de covariance donnée, la KLE permet de **capturer les principales caractéristiques** de la distribution spatiale grâce à ses **valeurs propres** et **vecteurs propres** associées.



4. Expansion de Karhunen-Loève

Théorie : Idéologie

Soit $Z(x)$ un champs aléatoire gaussien de moyenne nulle et de covariance $C_3(h)$. On peut simuler $Z(x)$ par :

$$Z(x) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i \phi_i(x)$$

Où λ_i sont les valeurs propres de la fonction de covariance, $\phi_i(x)$ sont les vecteurs propres orthogonaux et ξ_i sont des variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance unitaire.



4. Expansion de Karhunen-Loève

Théorie : Idéologie

1. Discrétiser la fonction de covariance en évaluant les covariances aux points du domaine;
2. Résoudre le problème aux valeurs propres pour obtenir les vecteurs propres discrétisés (λ_i) et les valeurs propres associées ($\phi_i(x)$);
3. Tiré aléatoirement des variables non corrélées de moyenne nulle et de variance unitaire (ξ_i), e.g., un bruit blanc aléatoire;
4. Calculer $Z(x) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi_i \phi_i(x)$.



5. Post conditionnement par krigeage simple

Résumé des algorithmes

Méthode	Complexité (non-conditionnelle)	Complexité de réalisations additionnelles	Valide pour des champs
LU	n^3	n^2	Petit
SGS	m^3n	m^3n	Grand à très grand
FFTMA	$n \log(n)$	$n \log(n)$	Grand
Bandes tournantes	n	N	Très grand

n : nombre de points à simuler

m : nombre de points utilisés dans le krigeage

Quoi faire pour rendre conditionnelles les méthodes non-conditionnelles? 32

5. Post conditionnement par krigeage simple

Équations

Z_S : Champ simulé non conditionnelle à un point de la grille de simulation

Z_i : Champ simulé non conditionnelle à un point observation

Z_{SC} : Champ simulée à un point de grille conditionnellement aux données

Z_S^* : Champ krigé à un point de grille utilisant les valeurs simulées aux points observations

Z^* : Champ krigé à un point de grille utilisant les valeurs observées

Z : Champ vrai à un point de grille

$$Z_{SC} = Z^* + (Z_S - Z_S^*) \longrightarrow \text{Le champ krigé + un champ d'erreur simulée}$$

$$Z_{SC} = Z_S + (Z^* - Z_S^*) \longrightarrow \text{Le champ simulé + le champ de krigeage de la différence aux points d'observations}$$

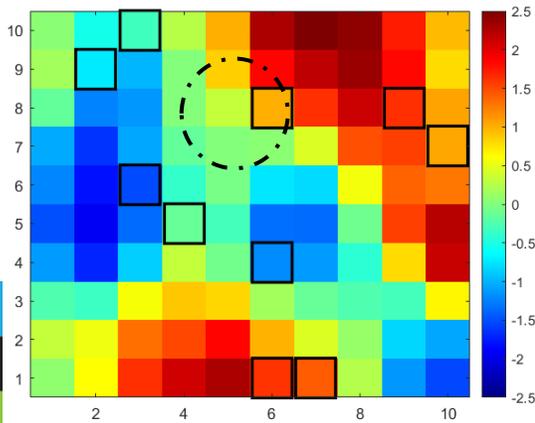
5. Post conditionnement par krigeage simple

Équations

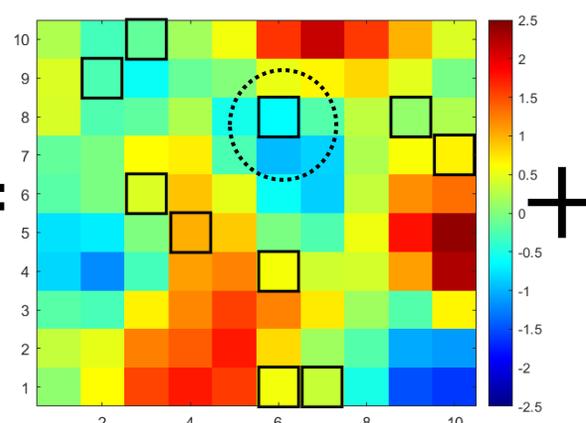
Le post-conditionnement par krigeage permet de reproduire exactement les données observées. (Pour l'exemple, les carrés noirs représentent la localisation des données de conditionnement.)

$$Z_{sc} = Z_s + Z_c^k - Z_s^k$$

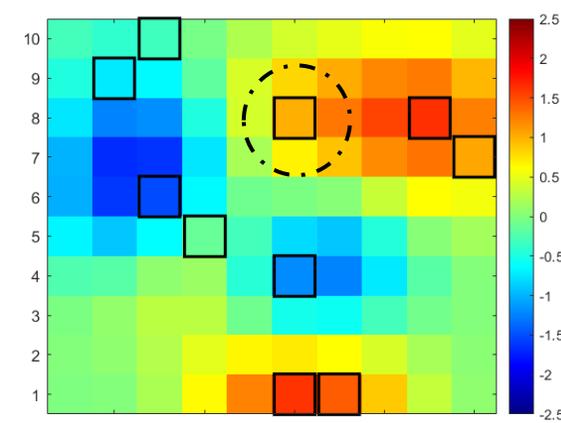
Champ simulé conditionnel



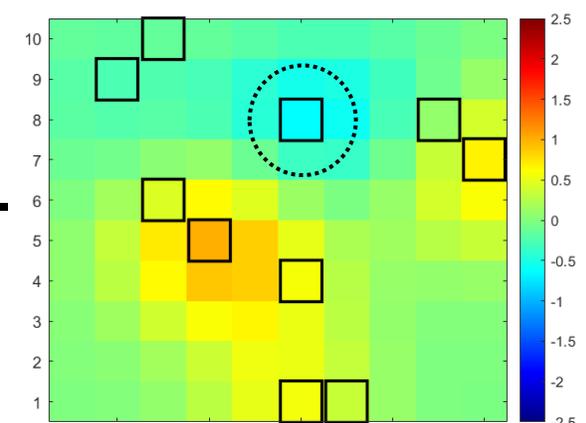
Champ simulé non conditionnel



Champ krigé à partir des données de conditionnement



Champ krigé à partir des données simulées



5. Post conditionnement par krigeage simple

Propriétés

Non-conditionnelle	Conditionnelle
$E[Z_s] = m$	$E[Z_{sc}] = Z^*$
$Var(Z_s) = \sigma^2$	$Var(Z_{sc}) = \sigma_{KS}^2$
$Var(Z - Z_s) = 2\sigma^2$	$Var(Z - Z_{sc}) = 2\sigma_{KS}^2$

Z_s : valeur simulée non conditionnelle à un point de la grille de simulation

Z_{sc} : valeur simulée à un point de grille conditionnellement aux données

Z : valeur vraie à un point de grille

6. Autres

Méthodologie :

Lorsque la fonction de transfert porte sur des teneurs de blocs (ex. optimisation d'une fosse à ciel ouvert) il faut simuler ces valeurs conditionnellement aux valeurs ponctuelles.

La méthode consiste à simuler des teneurs ponctuelles sur une grille fine, puis de les regrouper selon les blocs désirés (les blocs peuvent être de tailles et de formes différentes).

Le principal défi est d'ordre informatique. Par exemple si l'on veut simuler une mine ayant disons 200 x 200 x 200 blocs et que l'on veuille discrétiser chaque bloc par une grille de 3 x 3 x 3, on aurait à simuler $200^3 \times 3^3 = 216$ millions de points (pour une seule réalisation).