GML6402A : Géostatistique

Cours 5 : Géostatistique non-linéaire

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

Objectifs

- Décrire la différence entre une méthode linéaire de krigeage (KO et KS) et une méthode non linéaire (KI);
- Comprendre les hypothèses à la base du KI;
- Expliquer les avantages et inconvénients du KI;
- Pouvoir utiliser les résultats du KI pour en extraire des informations utiles (p. ex. probabilités de dépassement, écart-type conditionnel);
- Utilisé le modèle gaussien discret et le conditionnement uniforme.

Plan du cours

1. Introduction : contexte et problématique
2. Krigeage d'indicatrices
   i. Cas d'une variable binaire
   ii. Cas d'une distribution seuillée
   iii. Méthodologie
   iv. Variogramme d'indicatrices et corrélogrammes
3. Interprétation de la valeur estimée
4. Corrections d'ordre
5. Changements de support
   i. Cas d'une variable binaire
   ii. Cas d'une distribution seuillée
   iii. Méthodologie
   iv. Variogramme d'indicatrices et corrélogrammes
6. *Soft kriging*
7. Variantes
8. Exemple

1. Introduction : contexte et problématique

Krigeage :

Nous avons vu précédemment que le krigeage de $Z(x)$ fournit :

- La meilleure **estimation linéaire** possible
  i. Au sens de la **variance d'estimation minimale**

- Exprime une variance d'estimation
  i. Fonction de la continuité spatiale **exprimée par le variogramme**
  ii. Une estimation qui **considère l'effet d'information**
     a. Configuration
     b. Quantité

Que faire lorsque l'on veut connaître plus qu'un estimé et une variance d'estimation

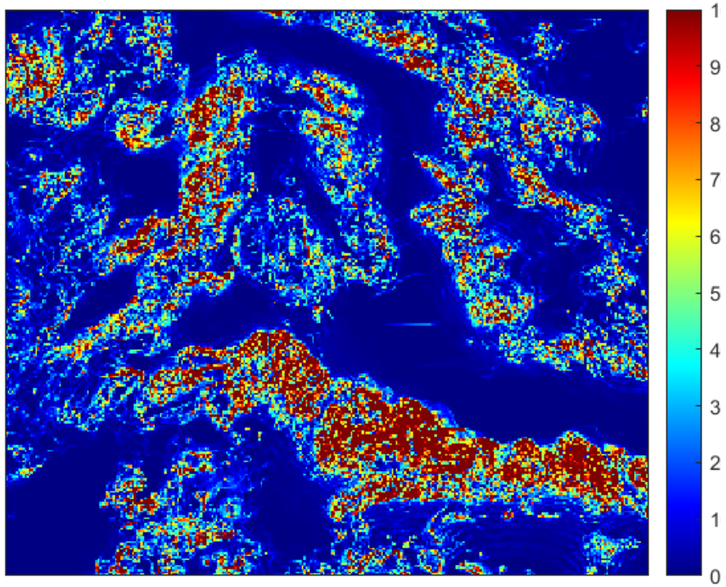
1. Introduction : contexte et problématique

Contexte : Environnement

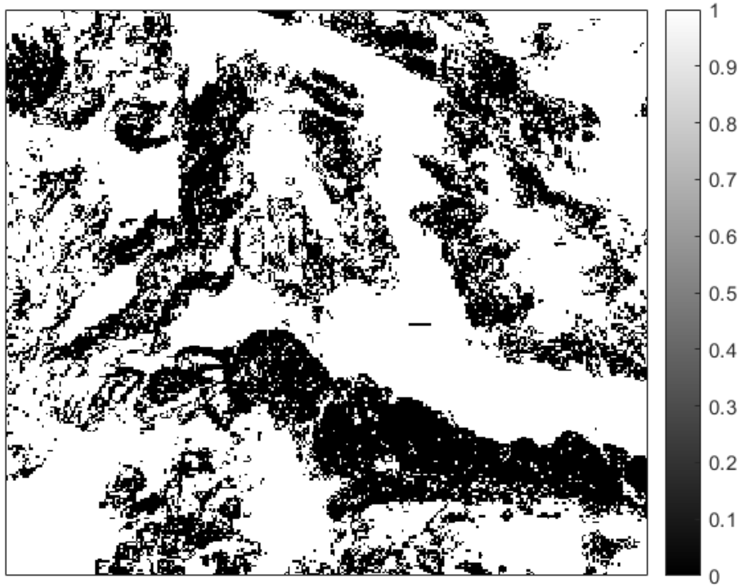
Comment déterminer en tout point quelle est la probabilité qu'un seuil ou une norme soit excédé?

Quelle quantité totale de contaminants y retrouve-t-on?

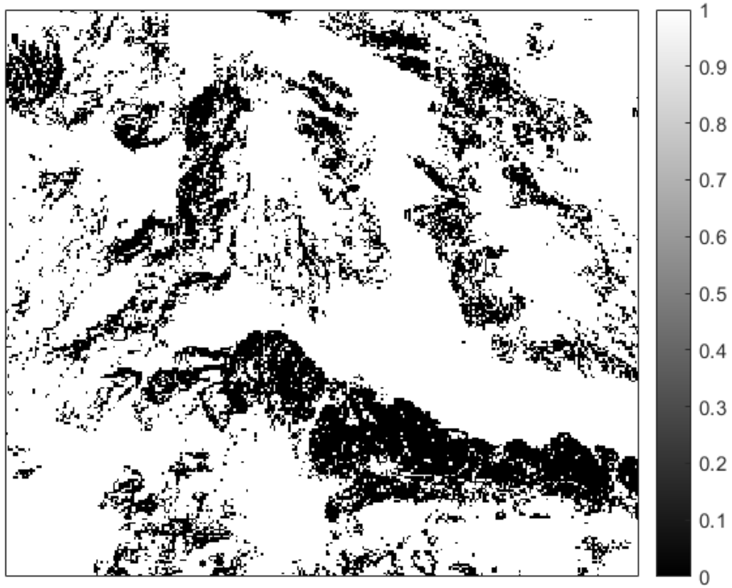
Concentration réelle (1000 ppm)



Seuil <175 ppm



Seuil <500 ppm



Noir : contaminée
Blanc : respect le seuil

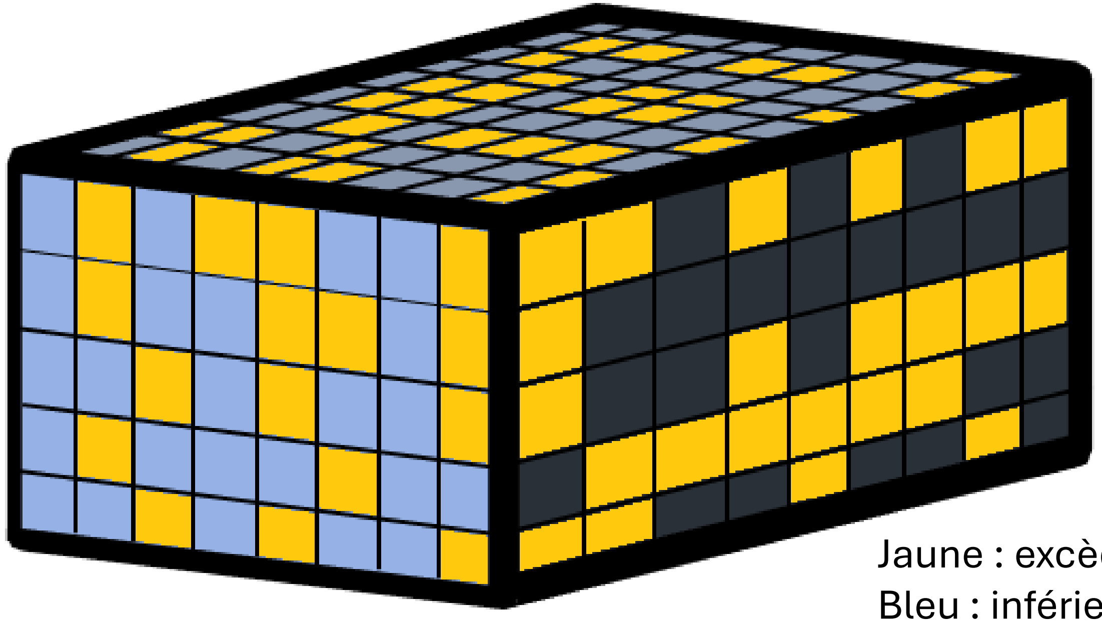
1. Introduction : contexte et problématique

Contexte : Mine

Quel est le tonnage de minerai (in situ)?

Quels sont le tonnage et la teneur du gisement en fonctions de diverses teneurs de coupure?

Quelle est la proportion de blocs excédant la teneur de coupure et la distribution de ces teneurs?

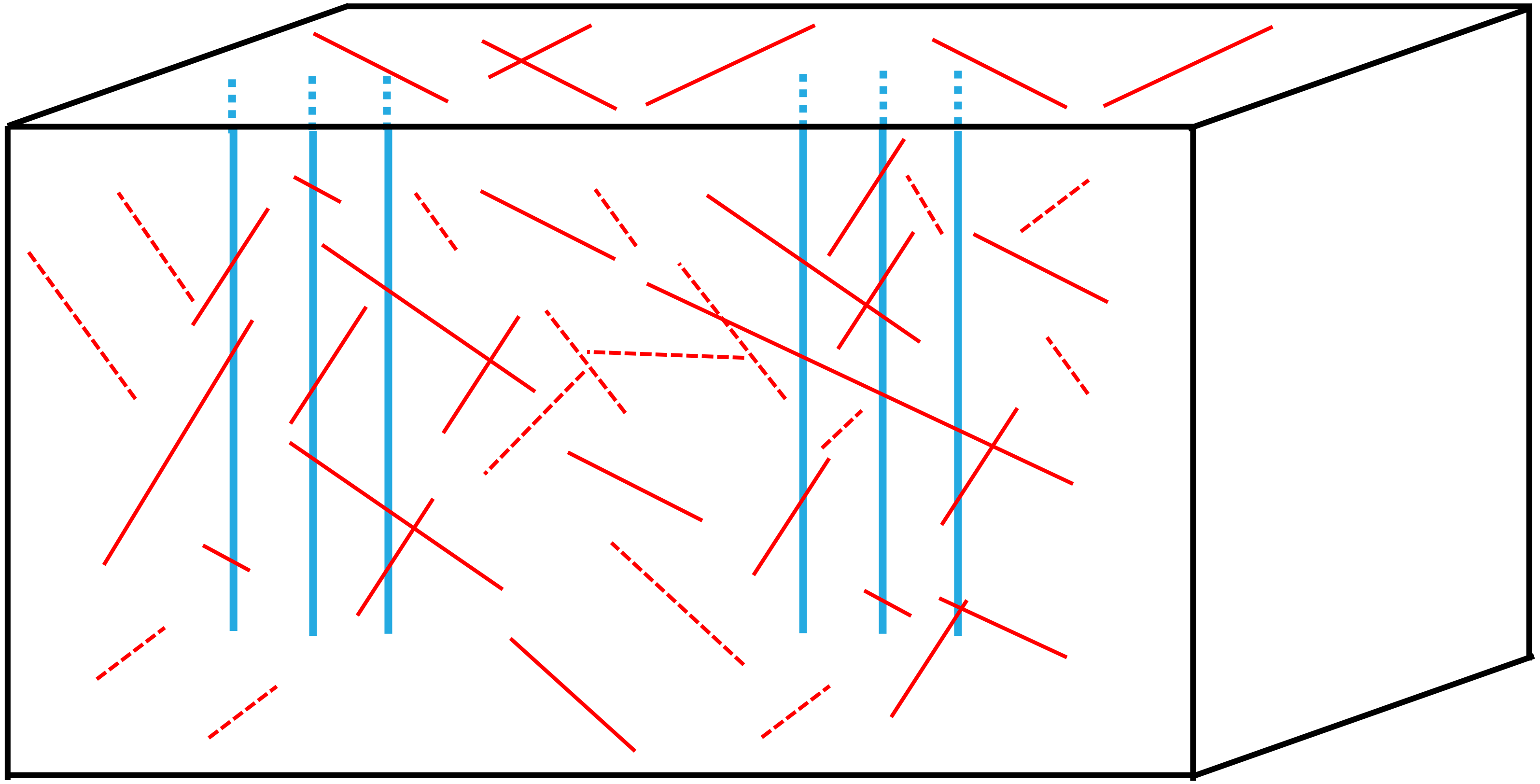


Jaune : excède la teneur de coupure
Bleu : inférieur la teneur de coupure

1. Introduction : contexte et problématique

Contexte : Massif rocheux

Quelle est la probabilité que la densité de fractures d’une certaine famille excède un seuil donné?



1. Introduction : contexte et problématique

Ce que l'on cherche:

La fonction de distribution (de répartition) conditionnelle en tout point

Objectif :

Avoir une marge d'erreur sur notre fonction de transfert

(p. ex. la probabilité que le point x_0 dépasse un seuil c de contamination)

1. Introduction : contexte et problématique

Problématique :

Comment déterminer la fonction de distribution (de répartition) conditionnelle en tout point?

Dans le cas d'une distribution normale des $Z(x)$:

- Moyenne du *krigeage ordinaire* est conditionnelle
- Variance du *krigeage ordinaire* est conditionnelle

Dans le cas d'une distribution non normale des $Z(x)$:

- Moyenne du *krigeage ordinaire* est conditionnelle
- Variance du *krigeage ordinaire* **n'est pas** conditionnelle

1. Introduction : contexte et problématique

Problématique :

Comment déterminer la fonction de distribution (de répartition) conditionnelle en tout point?

Transformation des données :

1. Par fonction simple (p. ex. $\log(Z)$);
2. Par forme analytique vers la loi normale (transformation dite graphique).

Conséquences :

1. Assure par construction la transformation vers la loi normale, mais n'assure pas que n points suivent une loi multinormale;
2. Problème de gestion de support.

1. Introduction : contexte et problématique

Solutions :

Estimer la fonction de distribution (de répartition) conditionnelle en tout point?

<u>Méthodes possibles :</u>

1. Le krigeage d'indicatrices (et ses variantes multivariables)

2. Les méthodes gaussiennes (multigaussien)
   - Vue indirectement par les simulations géostatistiques

3. Le krigeage disjonctif (lois bivariables isofactorielles)
   - Ne sera pas discuté

2. Krigeage d'indicatrices

Cas d'une variable binaire :

Soit une variable binaire $I(x)$ tel que $I(x) = 1$ si on observe la caractéristique A et $I(x) = 0$ si elle n'est pas observée

$$I(x) = \begin{cases} 1, & A \text{ observé} \\ 0, & A \text{ non observé} \end{cases}$$

Quelle interprétation donner au résultat du krigeage dans ce contexte?

$$E[I(x)] = P(I(x) = 0) \times 0 + P(I(x) = 1) \times 1 = P(I(x) = 1)$$

Si l'on tient compte des observations disponibles :

$$E[I(x)|I(x_1), I(x_2), \dots, I(x_n)] = P\big(I(x) = 1|I(x_1), I(x_2), \dots, I(x_n)\big)^*$$

* On sait que le krigeage estime (assez bien) l'espérance conditionnelle d'une variable

2. Krigeage d'indicatrices

Cas d'une variable binaire :

On *suppose* que le krigeage ordinaire demeure un bon estimateur de l'espérance conditionnelle pour une indicatrice

$$\mathrm{I}^*(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(x_i)$$

Les poids sont obtenus par krigeage ordinaire de la variable indicatrice. Il s'agit ainsi d'une estimation de $P\big(I(x) = 1 | I(x_1), I(x_2), \ldots, I(x_n)\big)$.

$$I^*(x) = P^*\big(I(x) = 1 | I(x_1), I(x_2), \ldots, I(x_n)\big)$$

2. Krigeage d'indicatrices

Cas d'une distribution seuillée :

Soit $Z(x)$ une v.a. continue définie au point x et $F(x, c)$, la fonction de répartition de la v.a. au point x pour la valeur « c ».

Par définition :

$$F(x, c) = P(Z(x) < c) = E[I(x, c)]$$

$$I(x, c) = \begin{cases} 1, & \text{si } Z(x) \leq c \\ 0, & \text{si } Z(x) > c \end{cases}$$

Par krigeage ordinaire d'indicatrices, on aura :

$$\mathrm{I}^*(\mathrm{x}, c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(x_i, c)$$

2. Krigeage d'indicatrices

Cas d'une distribution seuillée :

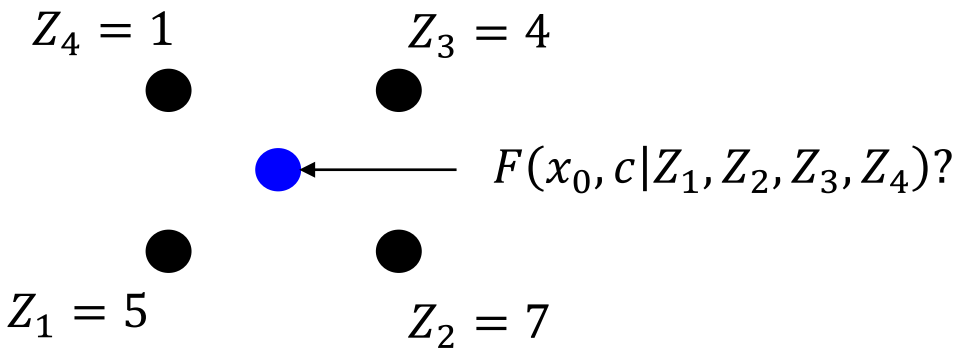
$I^*(x, c)$ *devrait* être un bon *(?)* estimateur de :

$$P\big(I(x,c) = 1 | I(x_1,c), I(x_2,c), \dots, I(x_n,c)\big) =$$
$$P\big(Z(x) < c | I(x_1,c), I(x_2,c), \dots, I(x_n,c)\big) =$$
$$F\big(x, c | I(x_1,c), I(x_2,c), \dots, I(x_n,c)\big)$$

Si l'on choisit une infinité de « c » différents, on aura une estimation de la fonction de répartition au point « x » conditionnelle aux indicatrices obtenues aux points échantillons.

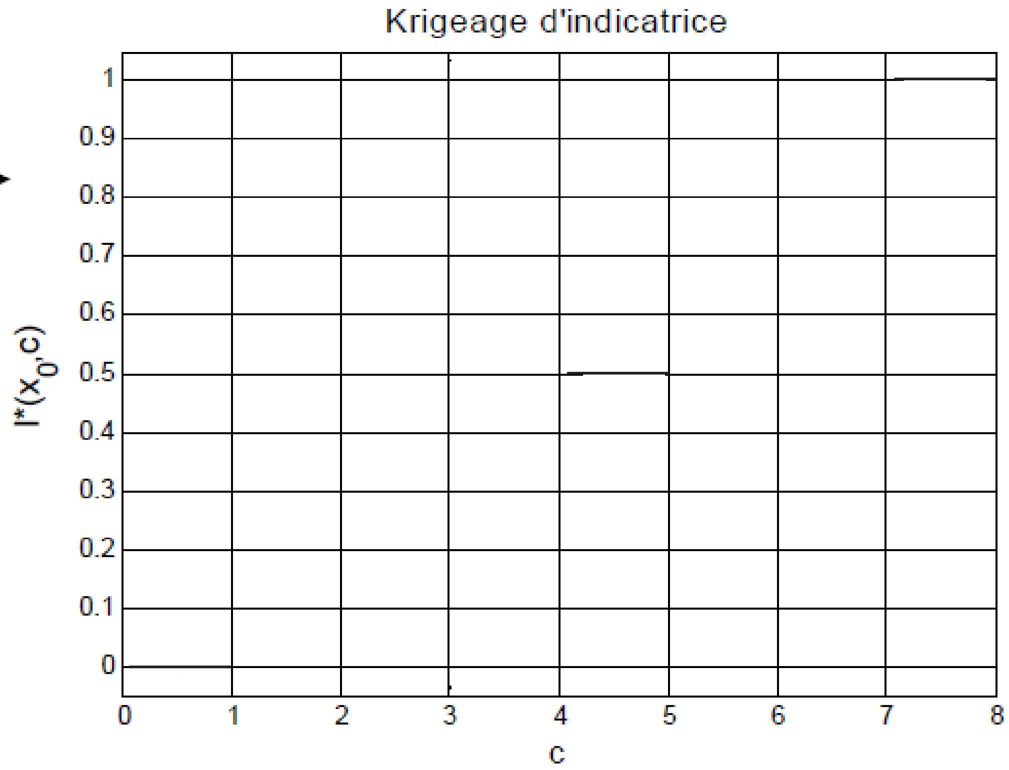
Exemple

Quatre observations à égale distance d'un estimé.



Que valent les poids de krigeage ordinaire ?

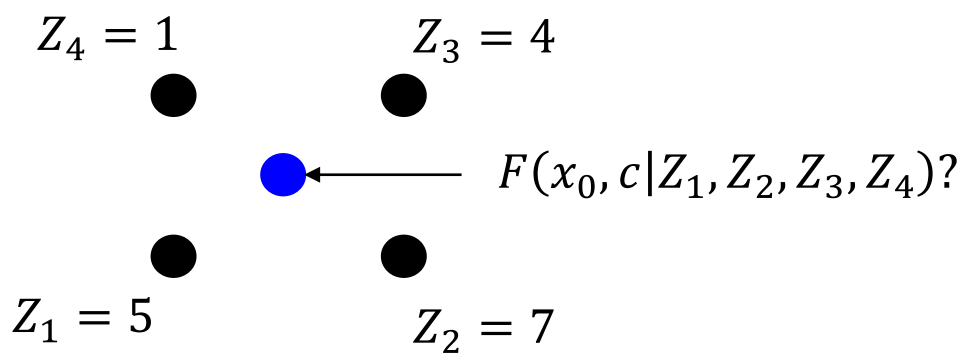
c	F*(x0,c,|(n))
0.5	
1.5	
2.5	
3.5	
4.5	
5.5	
6.5	
7.5	



2. Krigeage d'indicatrices

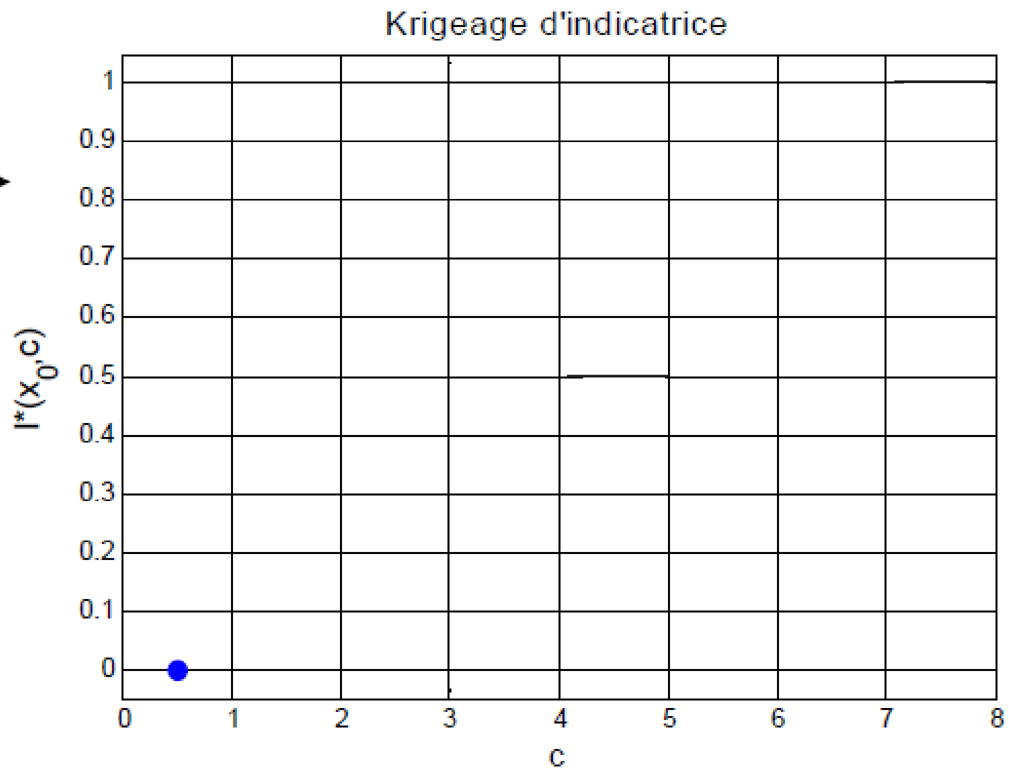
Exercice 1 :

Quatre observations à égale distance d'un estimé.



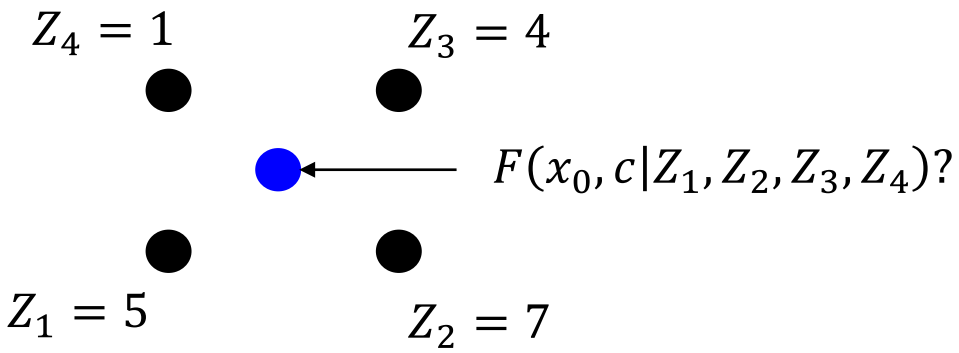
Ici, par symétrie, les poids valent tous ¼.

c	F*(x0,c,|(n))
0.5	0
1.5	
2.5	
3.5	
4.5	
5.5	
6.5	
7.5	



2. Krigeage d'indicatrices

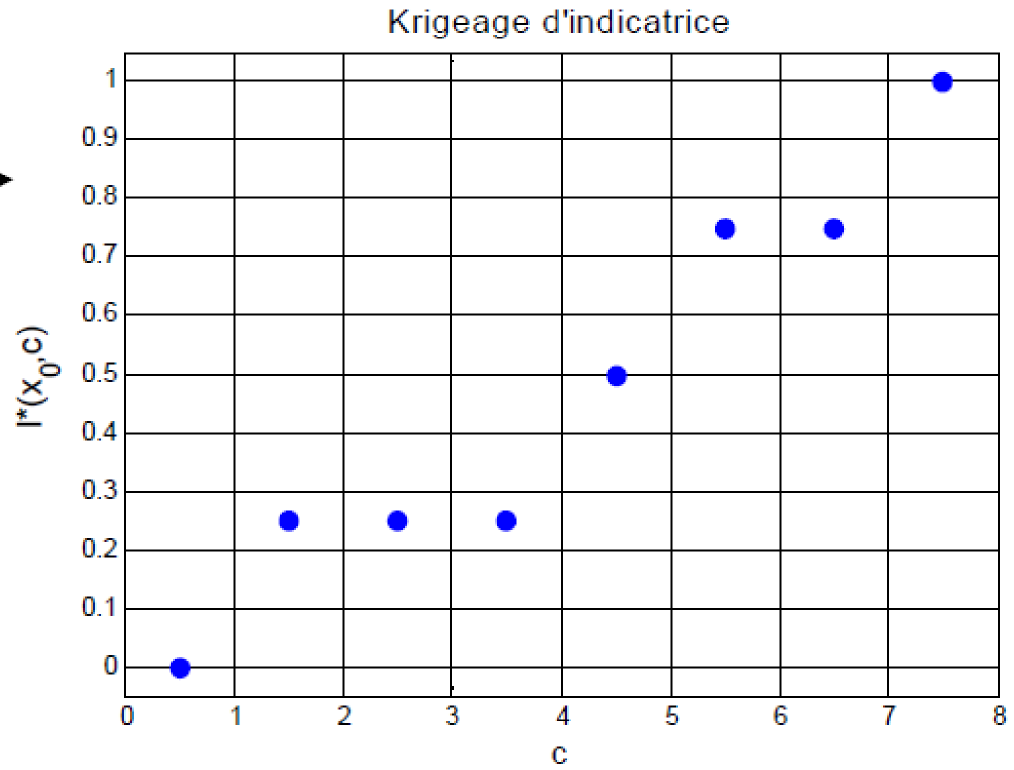
Exercice 1 : réponse



Quatre observations à égale distance d'un estimé.

Ici, par symétrie, les poids valent tous ¼.

c	F*(x0,c,|(n))
0.5	0
1.5	0.25
2.5	0.25
3.5	0.25
4.5	0.50
5.5	0.75
6.5	0.75
7.5	1.0



2. Krigeage d'indicatrices

Méthodologie :

Le problème consiste à estimer $I(x, c)$ en se servant de l'information disponible, les $Z(x_i)$ aux n points observations. On procède ainsi :

1. On code les valeurs observées $Z(x_i)$ par rapport à un seuil donné "c".
   - On obtient les $I(x_i, c)$

2. On effectue le krigeage, au point x_0, de $I(x_0, c)$ à partir des $I(x_i, c)$ qui sont connus.
   - La valeur krigée est interprétée comme une estimation de $P(Z(x_0) < \ c\ |Z_1, \dots, Z_n)$.
   - Il aura fallu calculer et modéliser le variogramme des indicatrices $I(x_i, c)$ pour effectuer le krigeage.

3. On peut recommencer le processus pour de nouveaux seuils c_2, c_3 et ainsi de suite.
   - Pour chaque seuil considéré, il faut coder les valeurs originales observées, calculer et modéliser le variogramme et effectuer un nouveau krigeage.

2. Krigeage d’indicatrices

Probabilité d’être inférieure à un seuil et variogrammes d’indicatrices

Soit $Z(x)$ une v.a. continue définie au point x et $F(x,c)$, la fonction de répartition de la v.a. au point x pour la valeur « c ».

Par définition :

$$I(x,c) = \begin{cases} 1, & \text{si } Z(x) \leq c \\ 0, & \text{si } Z(x) > c \end{cases}$$

$$E[I(x,c)] = F(x,c) = p$$

$$Var[I(x,c)] = F(x,c)\big(1 - F(x,c)\big) = p(1-p)$$

2. Krigeage d’indicatrices

Variogramme d’indicatrices et corrélogrammes :

Soit le seuil « c » correspondant à un quantile « p » de la distribution de $Z(x)$.

$I(x, c)$ a les propriétés suivantes:

$$E[I(x,c)] = \ p$$
$$Var(I(x,c)) = p(1-p)$$

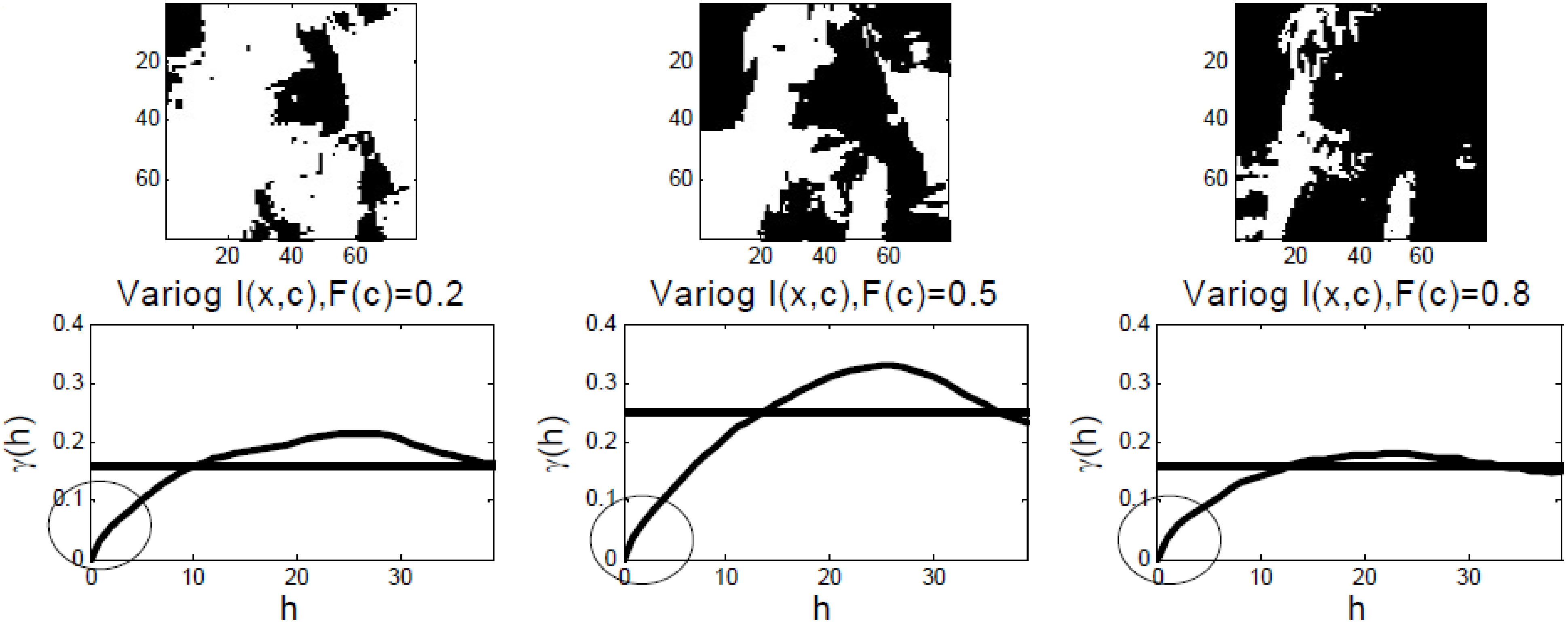
Ex. : si l’on choisit un seuil pour lequel 20% des observations sont inférieures, $D^2(I(x,c)|G) \ \approx$ 0.2∗0.8 = 0.16

Normalement, le palier est légèrement supérieur à $\boldsymbol{D^2(I(x,c)|G)}$ (dépendant de l’importance de la structure spatiale).

Les paliers sont **presque** déterminés par le seuil du codage de l’indicatrice

2. Krigeage d'indicatrices

Variogramme d'indicatrices et corrélogrammes :



Les variogrammes d'indicatrices ne peuvent montrer un comportement parabolique à l'origine → proscrire le modèle de variogramme gaussien !

2. Krigeage d’indicatrices

Variogramme d’indicatrices et corrélogrammes :

Si $Z(x)$ est bigaussien de moyenne $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on connaît la relation mathématique entre $\gamma_Z(h)$ et $\gamma_I(h, c)$

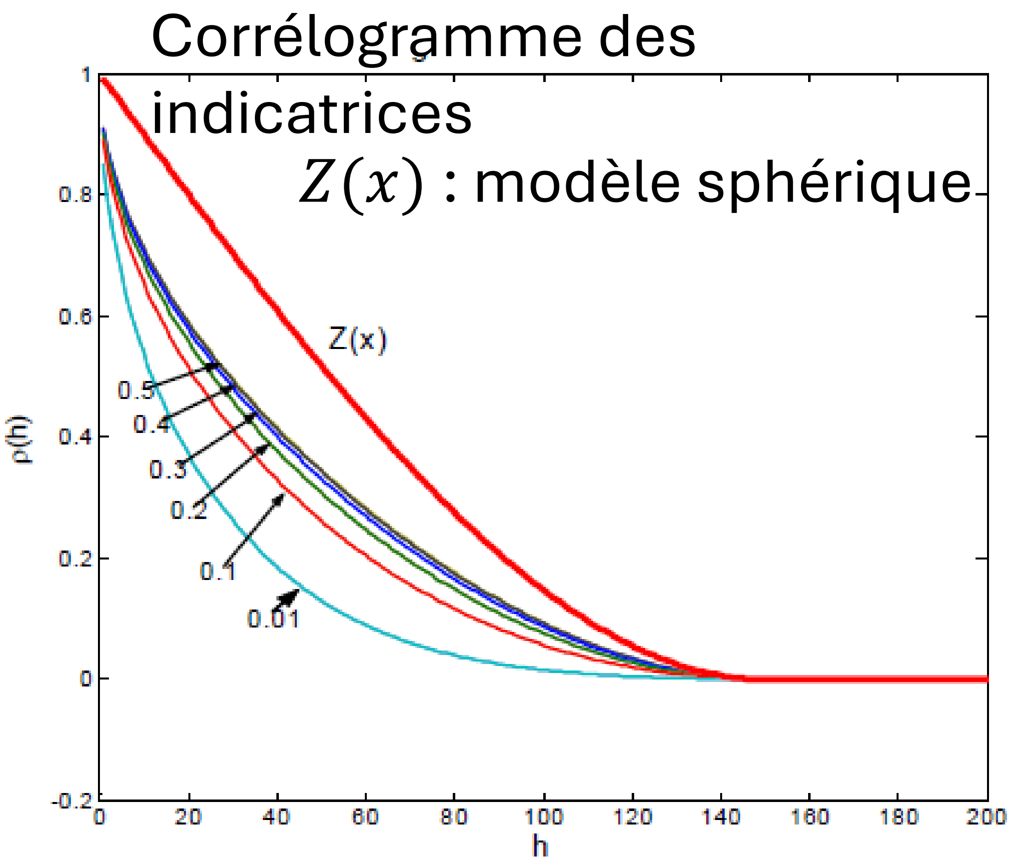
$$C_I(h,c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\rho(h)} \exp\left(-\frac{c^2}{1+u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

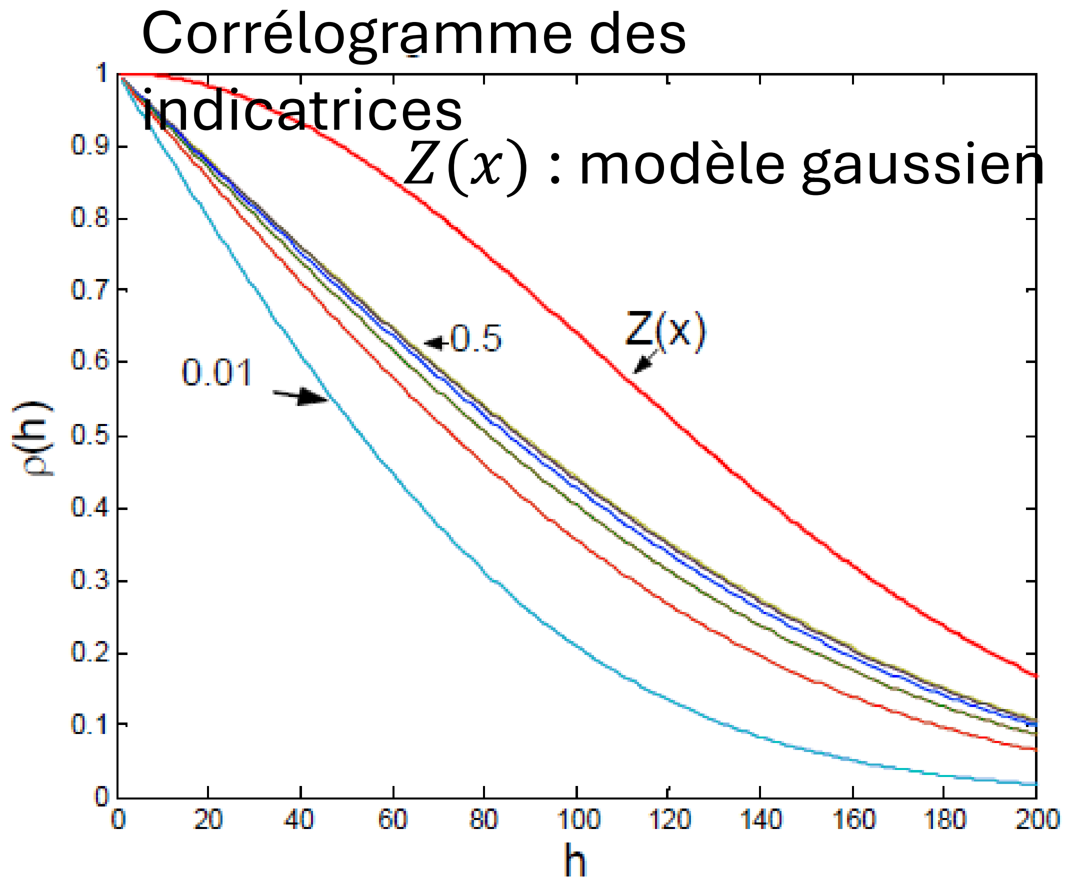
$\rho(h)$: le corrélogramme de $Z(x)$

Le plus important à retenir : il existe un lien entre le variogramme d’indicatrices et le variogramme ponctuel

2. Krigeage d'indicatrices

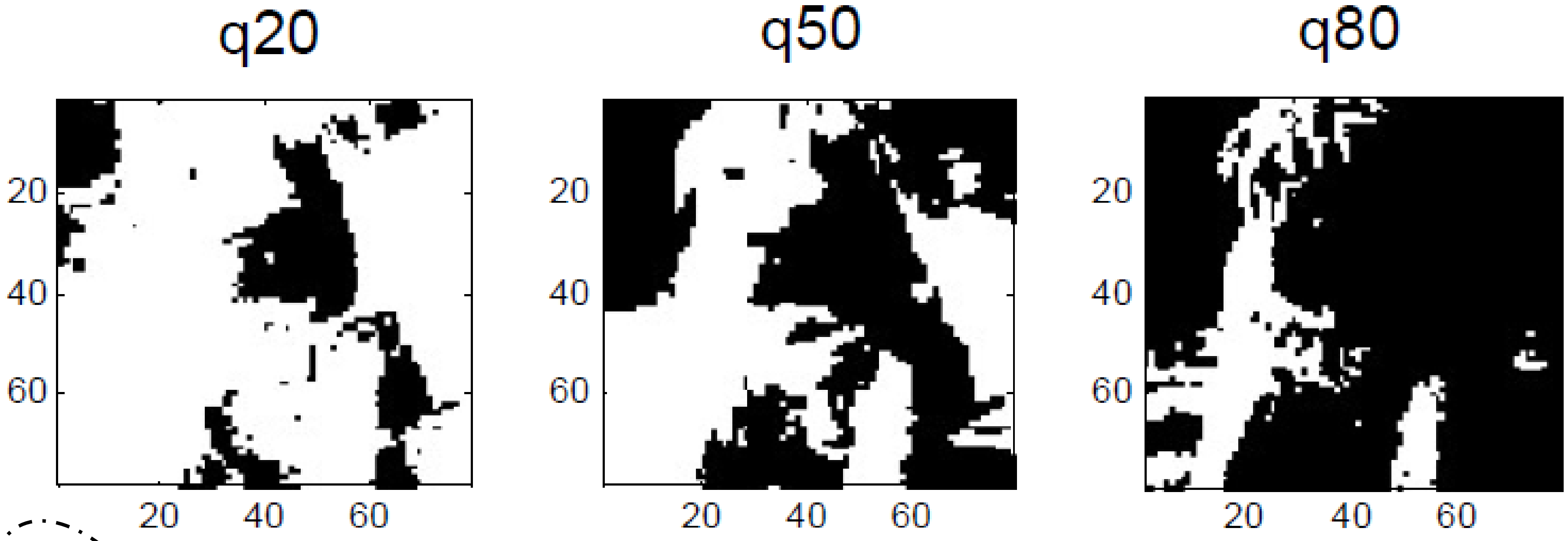
Variogramme d'indicatrices et corrélogrammes :

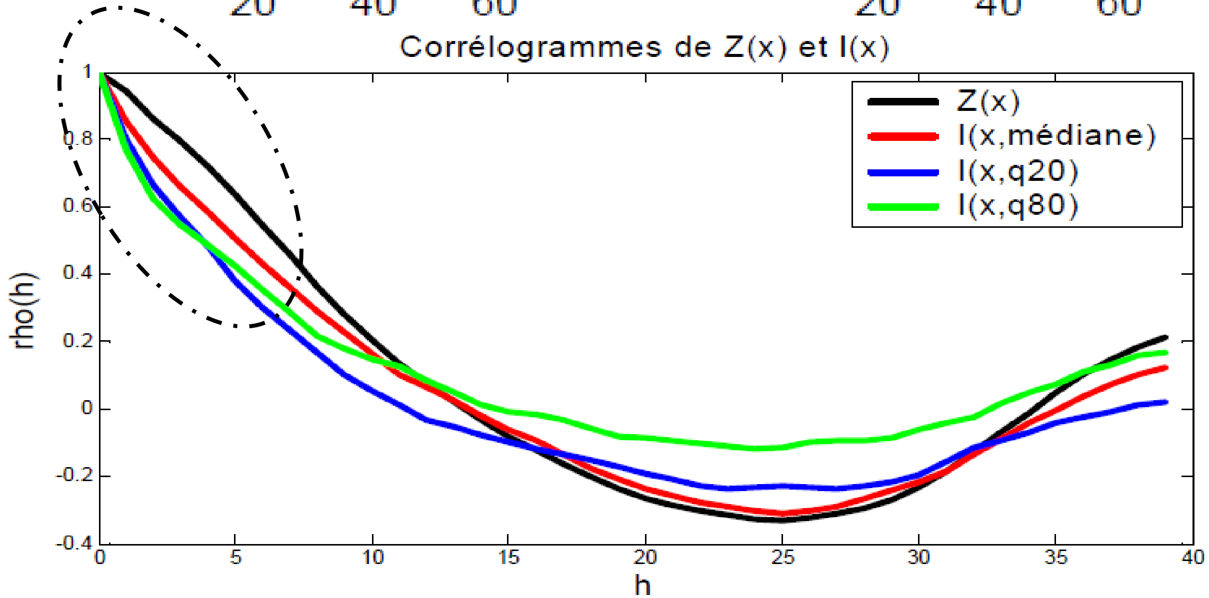




- Plus le seuil « c » est éloigné de la médiane moins il y a de structure
- Variogrammes des indicatrices est linéaire à l'origine même si $Z(x)$ est parabolique à l'origine => proscrire le modèle gaussien pour les indicatrices

Variogramme d'indicatrices et corrélogrammes :





3. Interprétation de la valeur estimée

Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire?

1. Estimer une probabilité d'excéder un seuil (p. ex. en environnement);

2. Estimer un quantile (p. ex. valeur ayant 5% de chances d'être dépassée au point x0);

3. Calculer une variance conditionnelle, c.-à-d. qui dépend des valeurs locales;

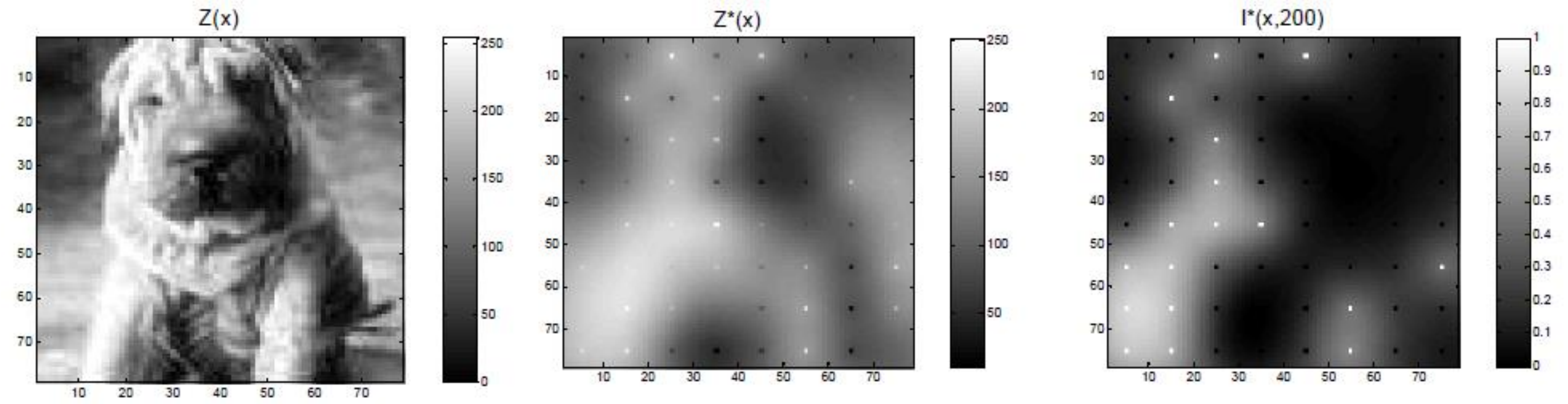
4. Fournir un estimateur qui minimise l'espérance d'une fonction de coût;

5. Plus de flexibilité :
   - Utiliser des informations du type $Z(x_i) > t, Z(x_i) < t, t2 > Z(x_i) > t1$; des données semi-quantitatives fournies par le géologue (p. ex. dans ce type de roche, la teneur n'excède jamais « t »);
   - Les variogrammes peuvent varier d'une indicatrice à l'autre.

3. Interprétation de la valeur estimée

Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire?

Le krigeage d'indicatrices permet de mieux estimer les quantiles, probabilités, etc. que le krigeage ordinaire



Réalité — Krigeage ordinaire — Krigeage indicatrice

$\mathrm{Nb}(\mathrm{Z}(\mathrm{x}) > 200) = 1453$

$\mathrm{Nb}(\mathrm{Z}(\mathrm{x})^* > 200) = 561$

$\sum_x I^*(x, 200) = 1655$

3. Interprétation de la valeur estimée

Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire?

- Avec le KI on estime mieux la proportion de points, sur toute l'image, dépassant le seuil donné ;

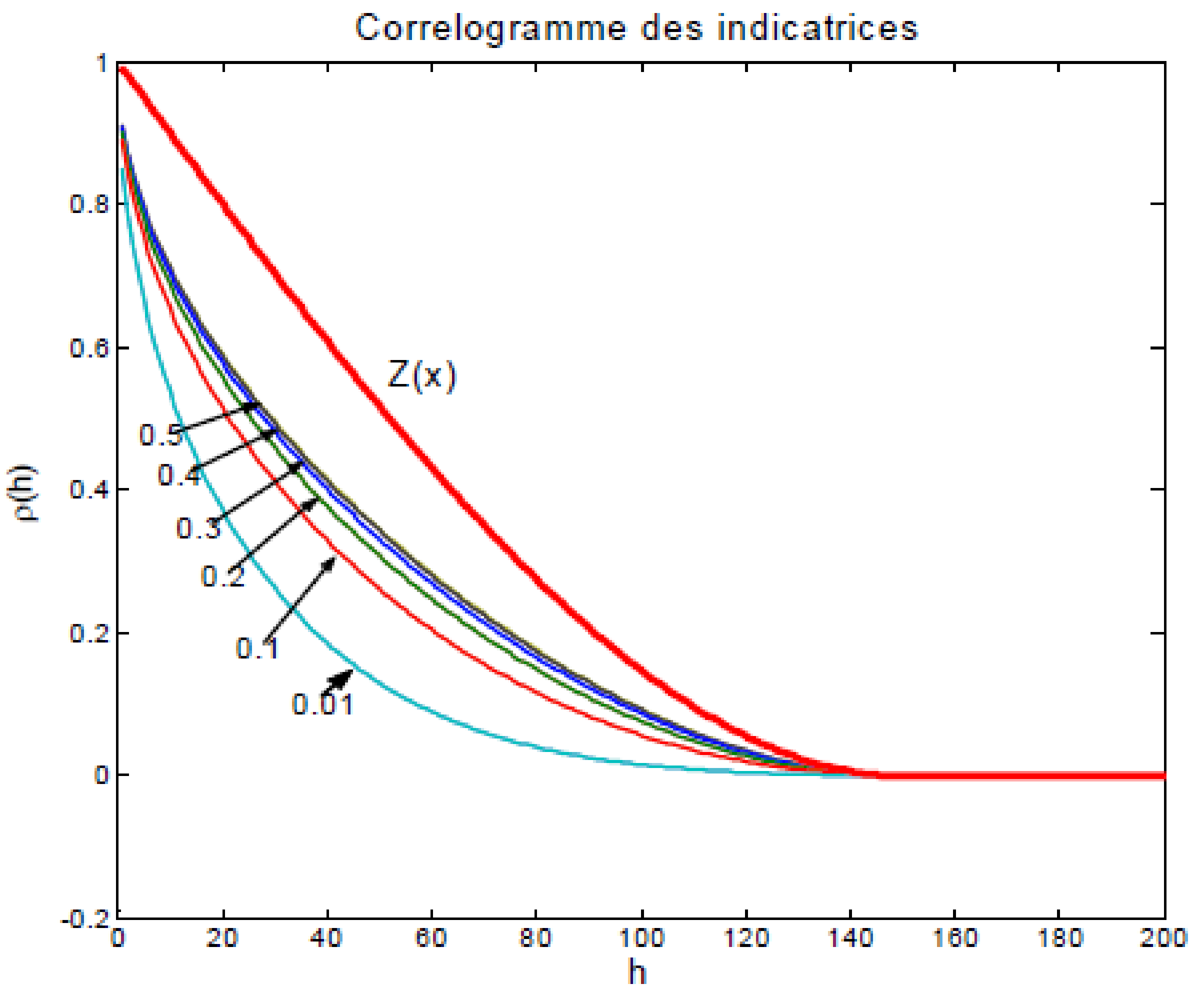
- Cependant on ne sait pas exactement lesquels parmi ces points sont au-dessus de ce seuil ;

- Tout ce que l'on a, en chaque point, c'est une probabilité qu'il soit au-dessus du seuil $\left(\text{soit } 1 - I^*(x)\right)$.

3. Interprétation de la valeur estimée

Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire?

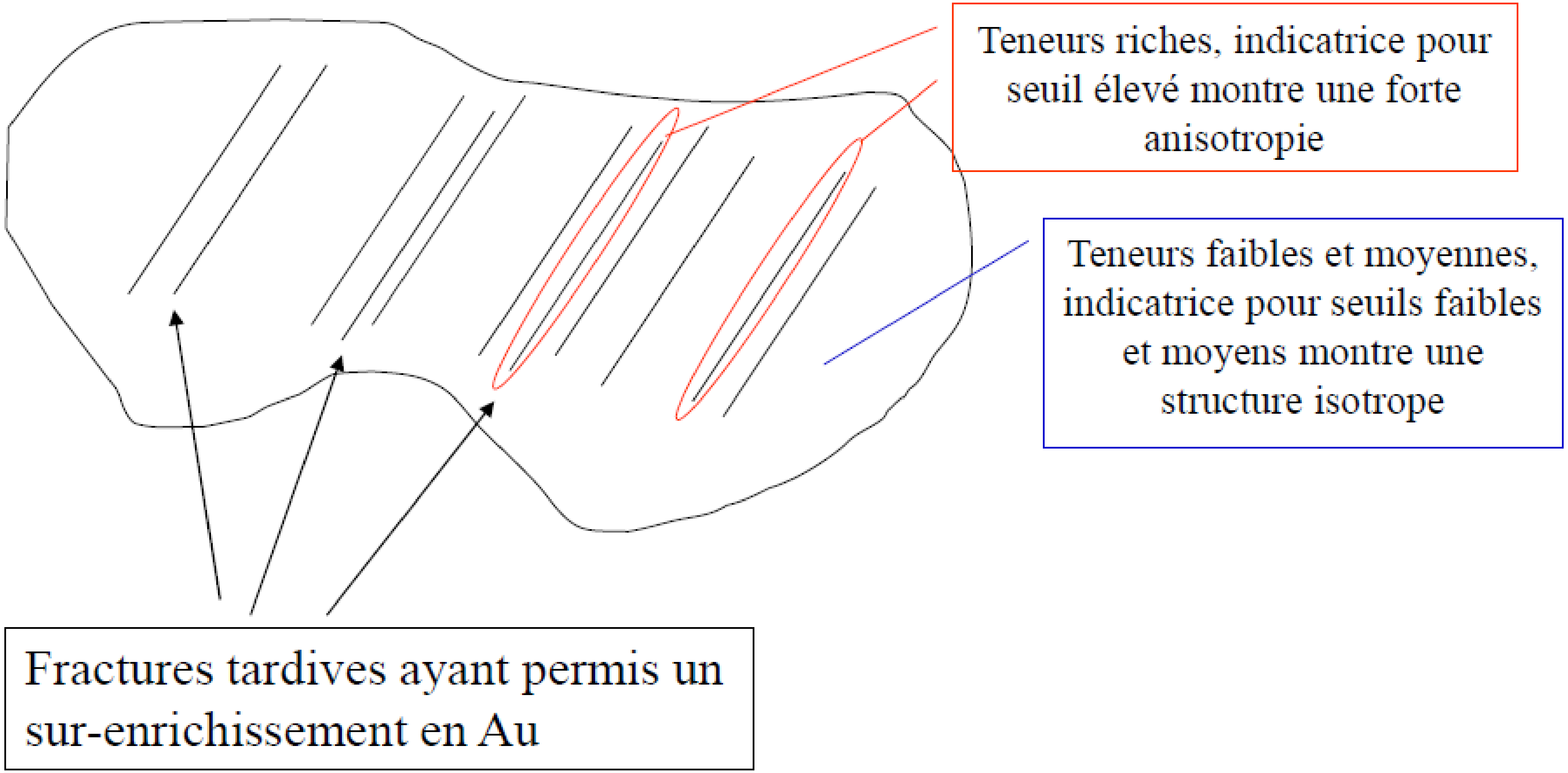
Les variogrammes peuvent varier d’une indicatrice à l’autre



3. Interprétation de la valeur estimée

Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire?

Les variogrammes peuvent varier d'une indicatrice à l'autre



3. Interprétation de la valeur estimée

À quel prix?

1. Fonction de répartition représentée sous forme discrète : combien de seuils? (en pratique souvent de 5 à 10 seuils)

2. Chaque seuil → v. indicatrice différente → modélisation du variogramme → krigeage d'indicatrice → effort beaucoup plus important; peut mener à des possibilités d'incohérences dans la modélisation.

3. Chaque indicatrice doit être stationnaire → fonction de répartition stationnaire (hypothèse + forte que pour le krigeage).

4. On a réduit l'ensemble conditionnant à $\{ I(x_1, c), I(x_2, c) \ldots I(x_n, c) \}$ au lieu de $\{ Z(x_1), Z(x_2) \ldots Z(x_n) \}$ → certaine perte d'information?

3. Interprétation de la valeur estimée

Quels sont les problèmes qui se posent?

1. Problème de relation d'ordre : valeurs de $I^*(x_0, c_i)$ peuvent être >1 ou <0; $I^*(x_0, c_i) > I^*(x_0, c_j)$ quand $c_i < c_j$;

2. Les variogrammes d'indicatrices sont souvent plus faciles à modéliser (il n'y a pas de données extrêmes, que des 0 ou des 1) mais souvent la structure spatiale est faible → manque de précision dans les estimations de I^*;

3. Comment interpoler entre les valeurs de $I^*(x_0, c_i)$?
   Comment extrapoler au-delà de c_{min} et c_{max} ?

4. Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs ?
   Ex. $P^*(Z_v(x) > c|Z(x_1), \dots, Z(x_n))$

4. Correction d’ordre

Problématiques :

Le krigeage d’indicatrice ne garantit pas que la fonction de répartition conditionnelle estimée soit strictement croissante.

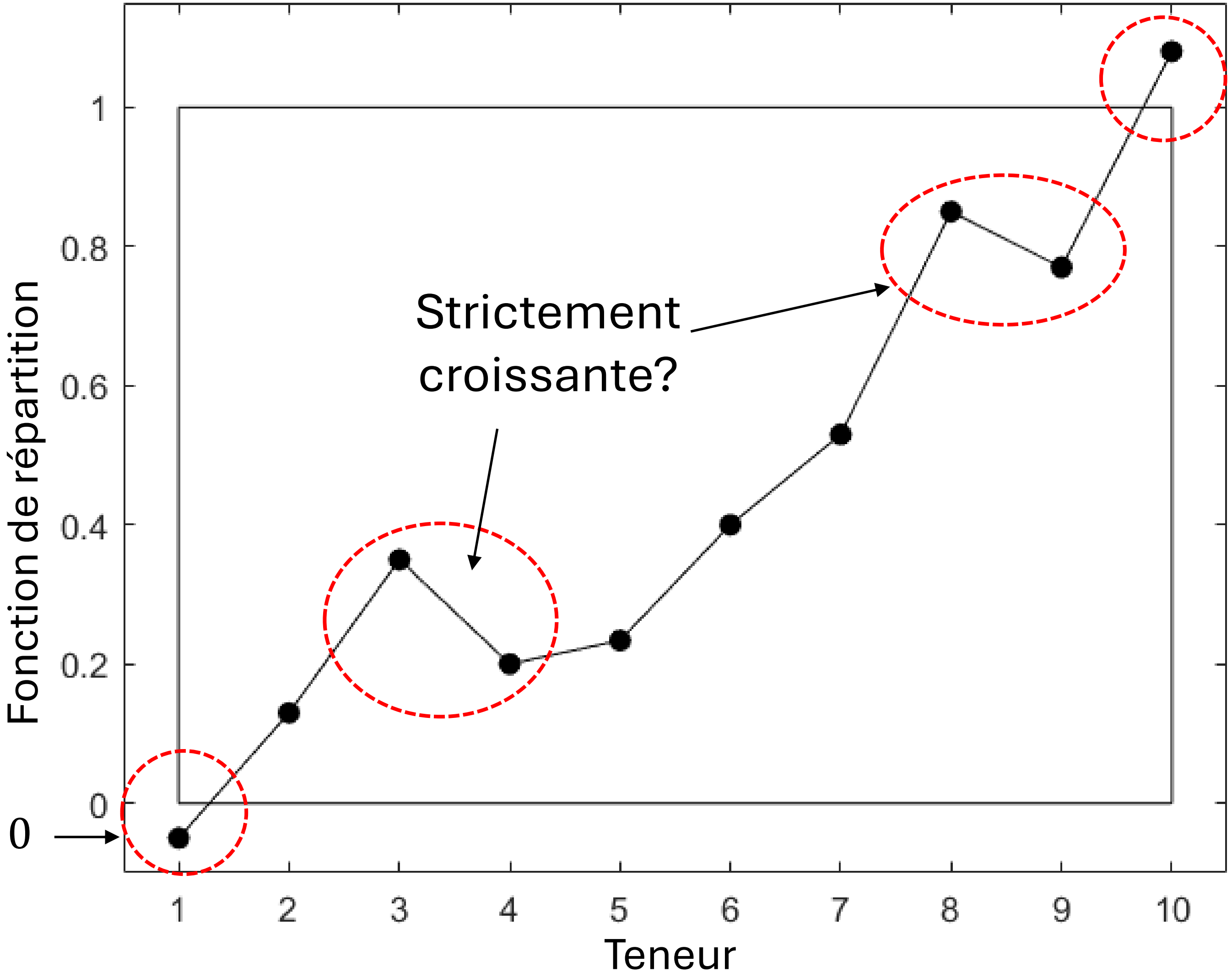
La source de ce problème est liée à :

1. des variogrammes mal modélisés;
2. des patrons de krigeage incohérents;
3. des poids de krigeage négatifs et supérieurs à 1;
4. un manque de données pour certains seuils.

4. Correction d'ordre

Problématiques : visuellement

Soit $Z(x) \in [1,10]$:

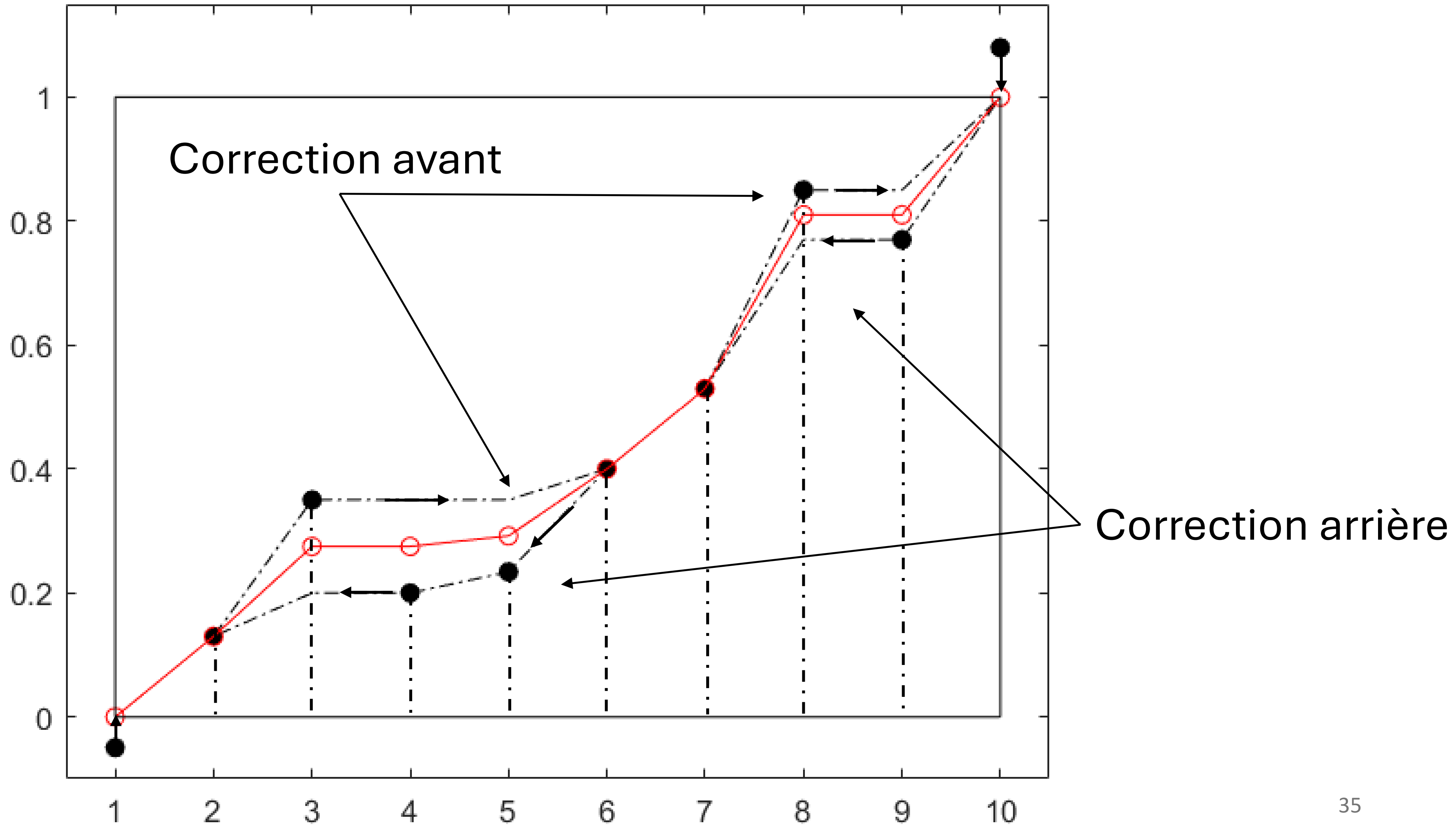


$\lim_{Z(x)\to 10} F_{Z(X)}\left(Z(x)\right) = 1$

$\lim_{Z(x)\to 1} F_{Z(X)}\left(Z(x)\right) = 0$

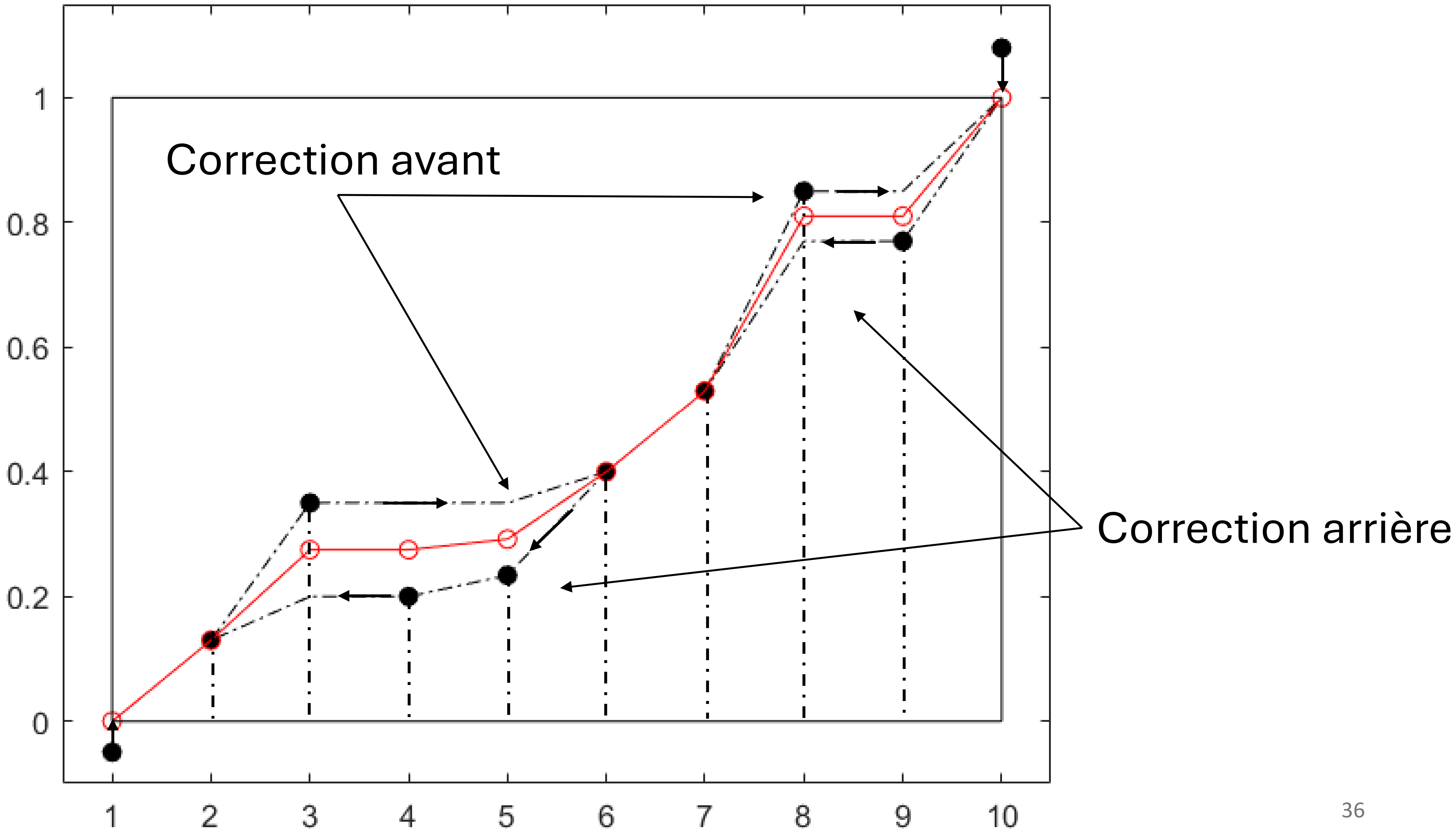
4. Correction d'ordre

Problématiques : visuellement



4. Correction d’ordre

Exercice 4 :



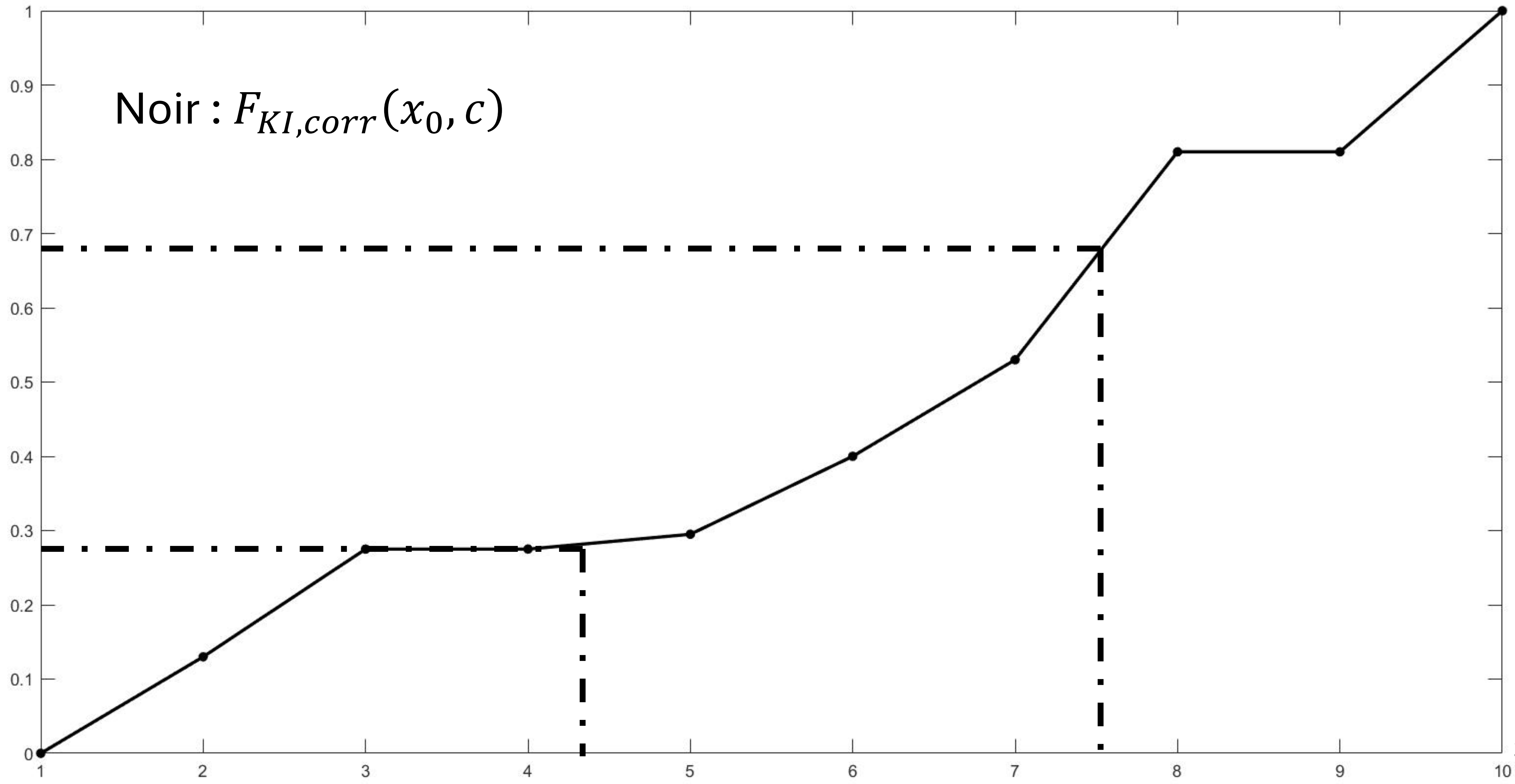
4. Correction d'ordre

Exercice 4 : réponse

Seuil c	$F_{KI}(x_0, c)$	$F_{KI}, avant(x_0, c)$	$F_{KI}, arr(x_0, c)$	$F_{KI}, corr(x_0, c)$
1	-0.05	0	0	0
2	0.13	0.13	0.13	0.13
3	0.35	0.35	0.20	0.275
4	0.20	0.35	0.20	0.275
5	0.24	0.35	0.24	0.295
6	0.40	0.40	0.40	0.40
7	0.53	0.53	0.53	0.53
8	0.85	0.85	0.77	0.81
9	0.77	0.85	0.77	0.81
10	1.08	1	1	1

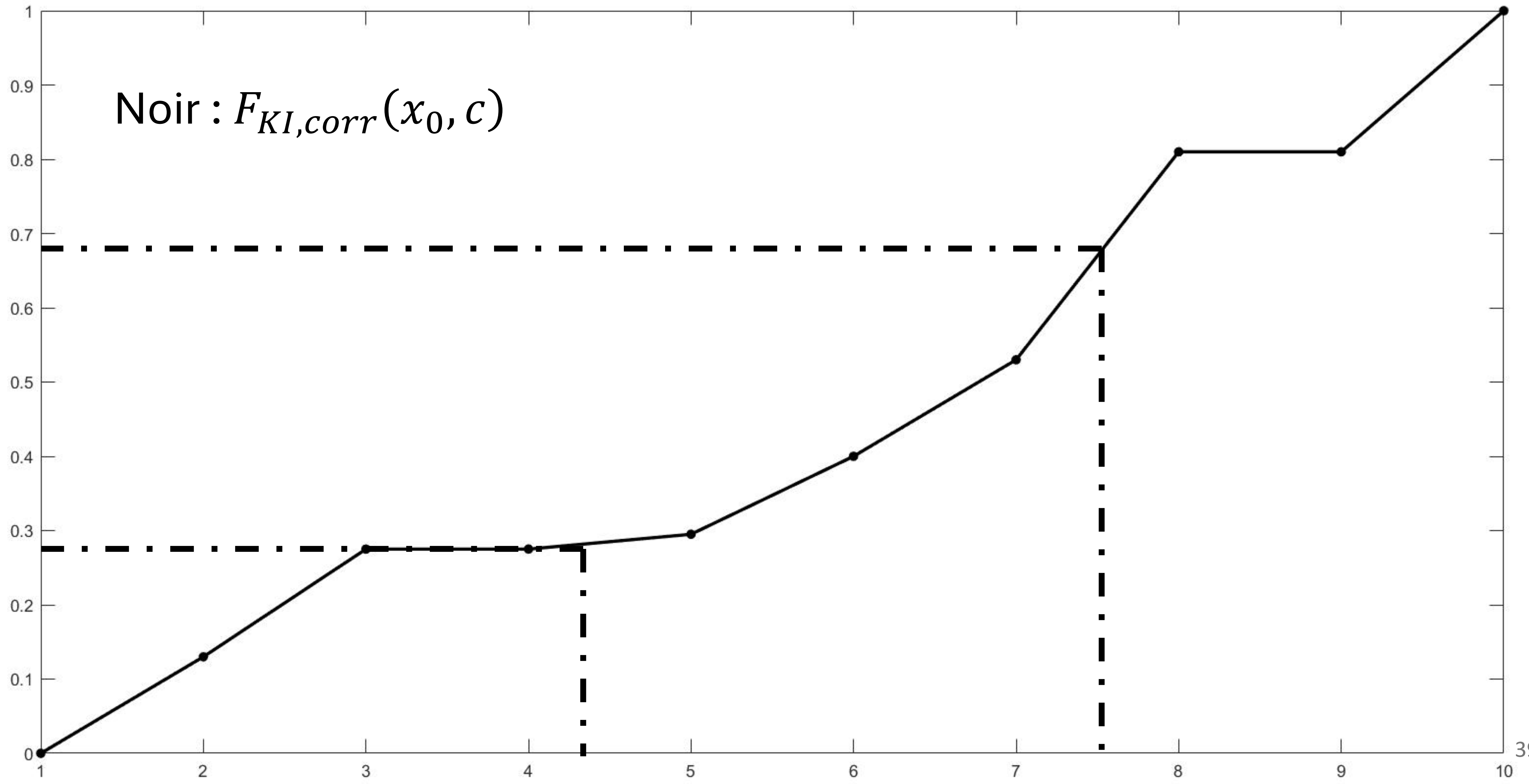
4. Correction d'ordre

Exercice 4 : réponse (suite)

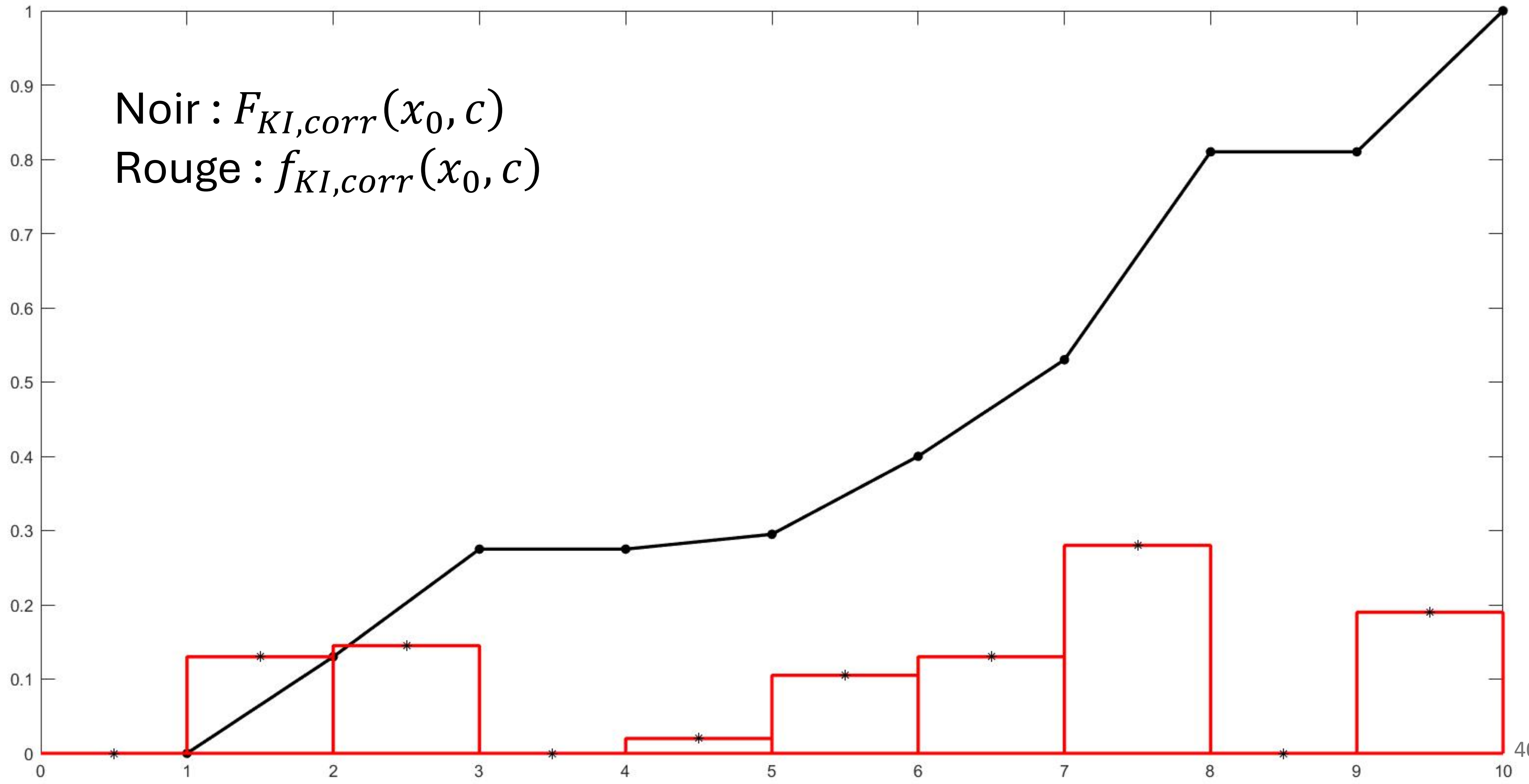


4. Correction d'ordre

Exercice 4 : réponse (suite)



Exercice 4 : réponse (suite)



4. Correction d’ordre

Méthode :

1. On corrige les valeurs inférieures à 0 et supérieures à 1 :
   - $I^{*\prime}(x_0, c_i) \ = \ \max(0, I^*(x_0, c_i))$
   - $I^{*\prime}(x_0, c_i) \ = \ \min(1, I^*(x_0, c_i))$

2. On calcul la correction avant (c.-à-d. on refuse toute décroissance à partir de la gauche)
   - $I^*_{avant}(x_0, c_{i+1}) \ = \ max(I^*_{avant}(x_0, c_i), I^*(x_0, c_{i+1}))$

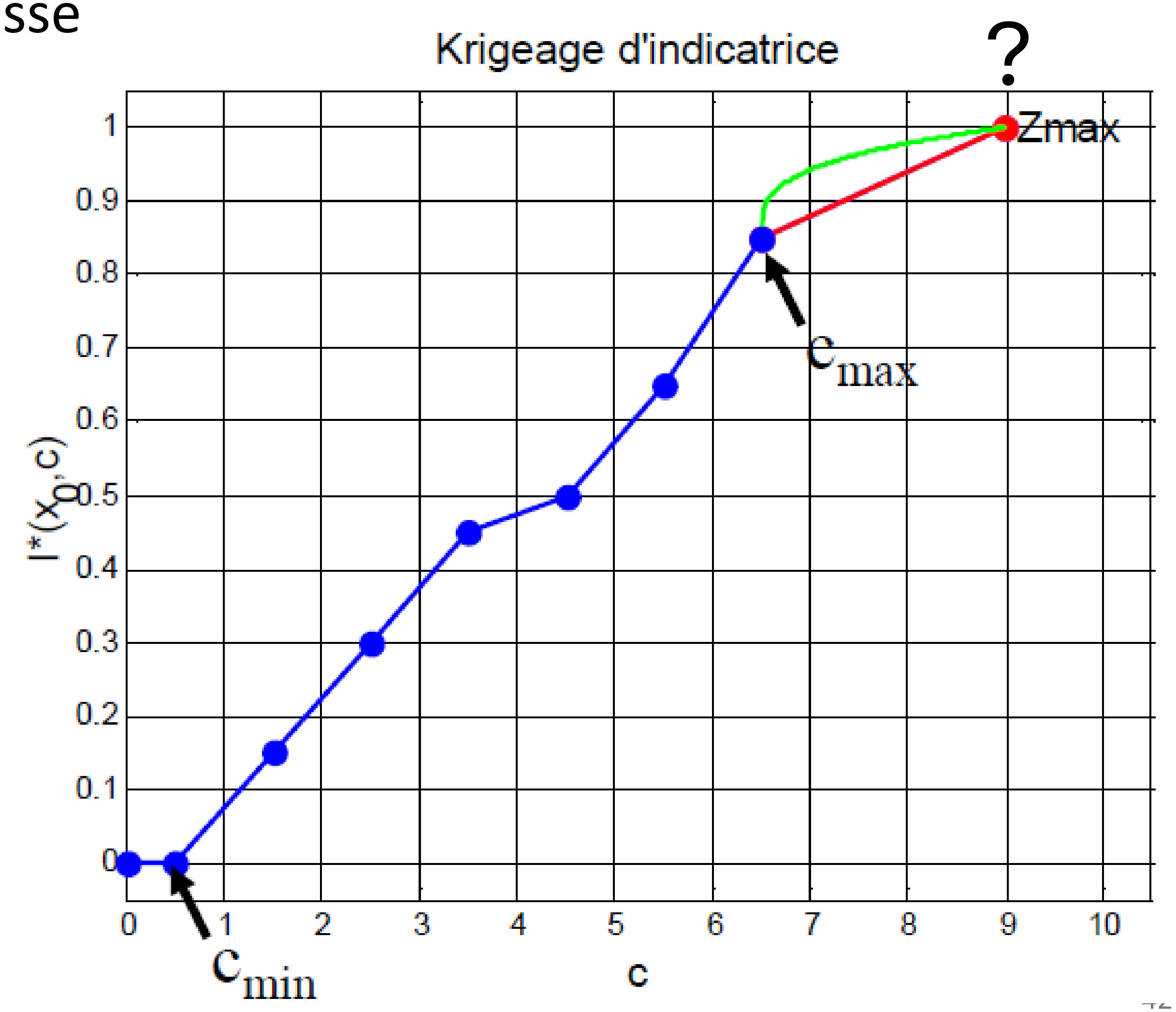
3. On calcul la correction arrière (c.-à-d. on refuse toute croissance à partir de la droite)
   - $I^*_{arrière}(x_0, c_i) \ = \ min(I^*(x_0, c_i), I^*_{arrière}(x_0, c_{i+1}))$

4. On effectue la correction en prenant la moyenne de la correction avant et arrière.
   - $I^{*\prime}(x_0, c_i) = 0.5\left(I^*_{avant}(x_0, c_i) + I^*_{arrière}(x_0, c_i)\right)$

4. Correction d’ordre

Interpolation entre les valeurs de $I^*(x_i, c_j)$:

Linéaire, sauf possiblement la dernière classe

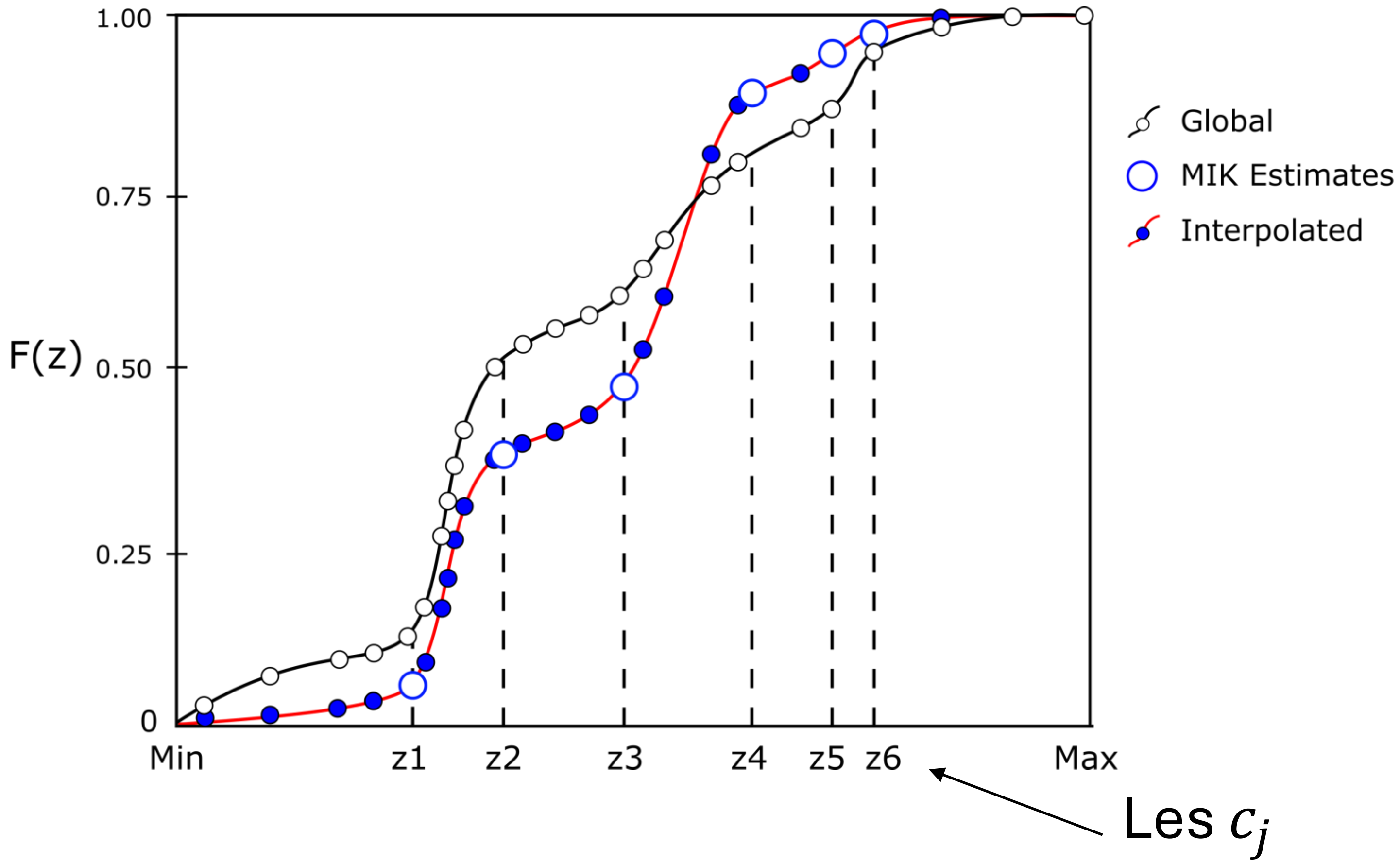


*Certains auteurs mentionnent la possibilité d’inférer la forme de la distribution dégroupée (sans tenir compte de la continuité spatiale) des données brutes pour qu’elle s’adapte à celle de la distribution des indicatrices entre les espaces et aux extrémités

4. Correction d'ordre

Interpolation entre les valeurs de $I^*(x_i, c_j)$:

Inférer à la distribution obtenue par krigeage d'indicatrices la forme de la distribution dégroupée (sans tenir compte de la continuité spatiale) des données brutes pour qu'elle s'adapte entre les espaces et aux extrémités



Tiré de : Carvalho, D., & Deutsch, C. V. (2017). An Overview of Multiple Indicator Kriging. In J. L. Deutsch (Ed.), *Geostatistics Lessons*. Retrieved from http://geostatisticslessons.com/lessons/mikoverview

5. Changement de support

Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs?

<u>Très important :</u>

$$P(Z_v(x) > c\ ) \neq \frac{1}{v}\int_{v(x)} P(Z(y) > c)\, dy$$

<u>Un exemple :</u>

- $Z(x) = 1\,000\,000$ ppm
- $Z(x) = 1$ ppm

$$\mathrm{P}(Z_v(\mathrm{x}) > 1.2) = 1$$

$$\frac{1}{v}\int_{v(x)} P(Z(y) > 1.2)\, dy \approx 0$$

5. Changement de support

Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs?

La fonction qui lie la teneur à la probabilité est non-linéaire

Similaire à :

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i)\right) \neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\big(Z(x_i)\big)$$

$$P(Z_v(x) > c\ ) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i)\ > c\right) \neq \frac{1}{v}\int_{v(x)} P(Z(y) > c)\, dy$$

5. Changement de support

Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs?

Solutions?

- Correction affine
- Correction indirecte lognormale

Aucune n'est entièrement convaincante

- Modèle Gaussien discret
- Conditionnement uniforme

Émet des hypothèses plus raisonnables

Tendance actuelle : recourir à des simulations! (Prochain cours)

5. Changement de support

Correction Affine : Contracter la distribution d'un facteur fixe déterminé par le ratio des variances de dispersion de blocs sur les variances ponctuelles.

$$F_v\left(Z_v(x)\right) = F\left((Z(x) - m)\left(\frac{D^2(v|G)}{D^2(\cdot|G)}\right)^{0.5} + m \right)$$

m : la moyenne de la distribution locale estimée par KI

F : la fonction de répartition locale estimée par KI (i.e. $I^*(x, c)$ après corrections pour relations d'ordre)

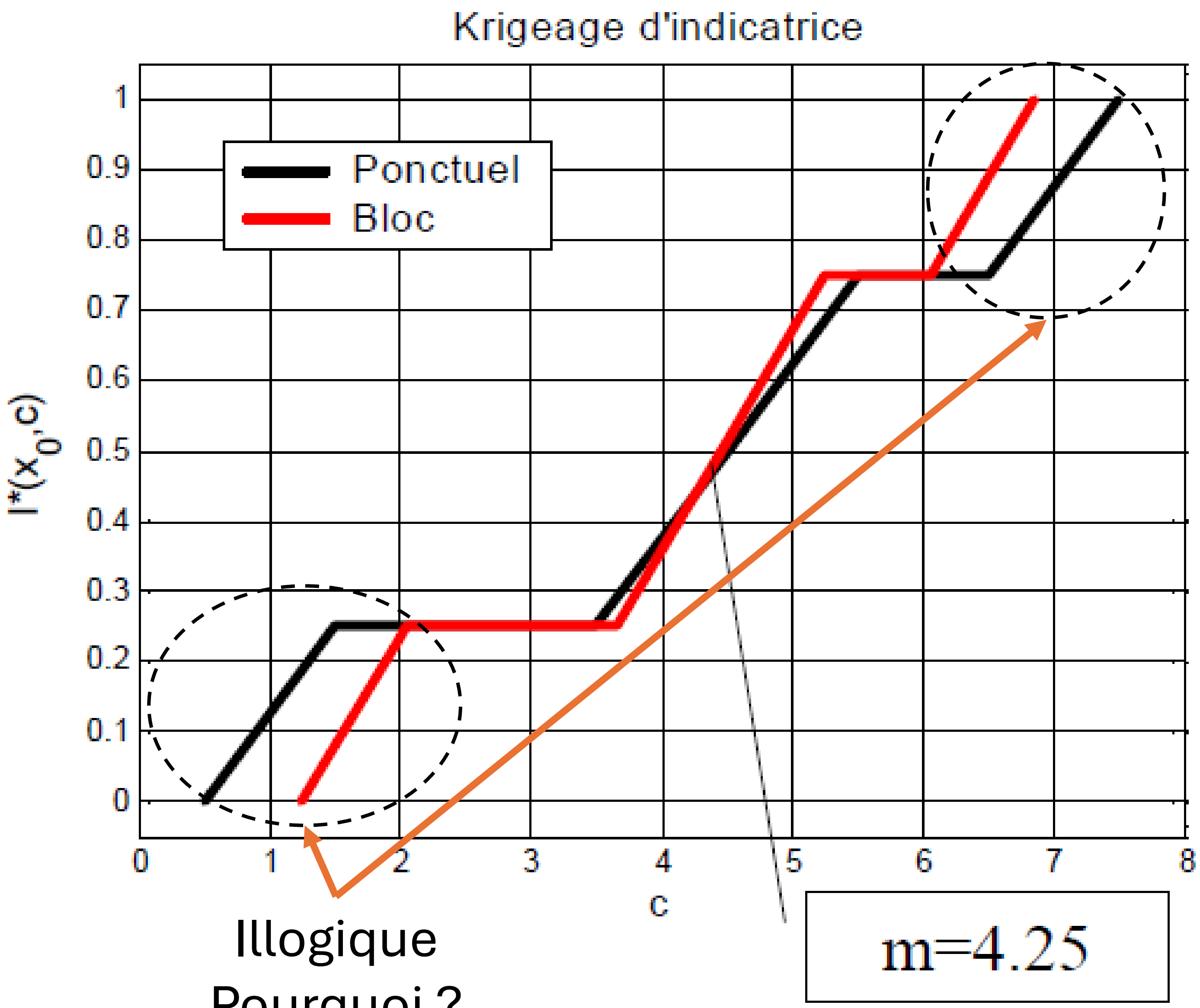
F_v : la fonction de répartition « de blocs »

5. Changement de support

Correction Affine :

$$F_v(Z_v(x)) = F\left((Z(x) - m)\left(\frac{D^2(v|G)}{D^2(\cdot|G)}\right)^{0.}\right.$$

$$\left(\frac{D^2(v|G)}{D^2(\cdot\,|G)}\right)^{0.5} = 0.8$$

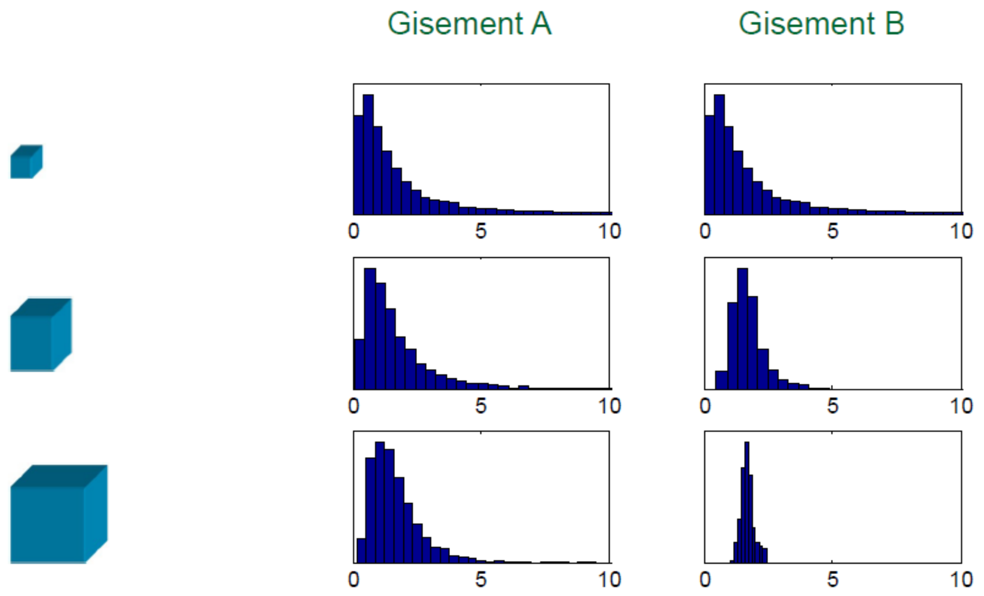


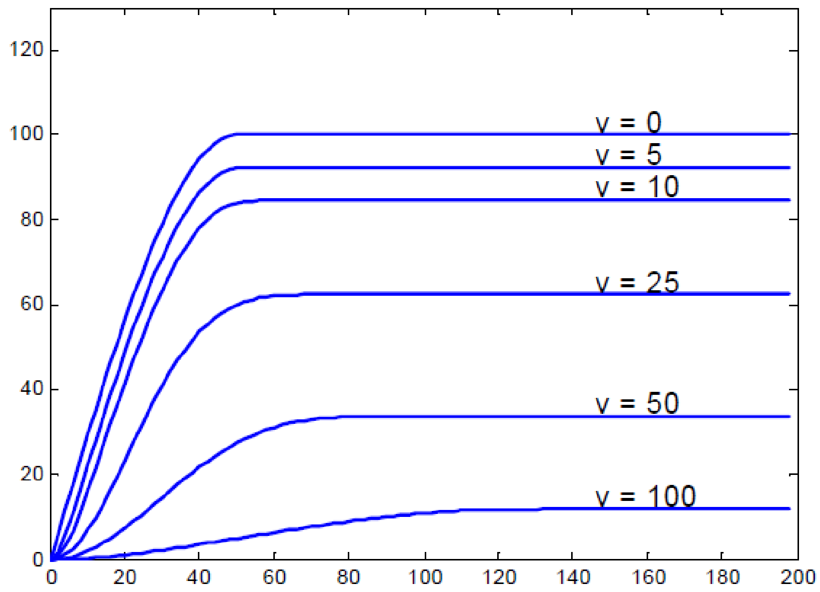
Illogique
Pourquoi ?

5. Changement de support

Correction Affine :

- La correction affine **réduit la variance** de la distribution sans en modifier la forme.
- Cette hypothèse de **permanence de la forme** est limitative, car des valeurs minimales et maximales artificielles sont introduites.
- Nous savons que la distribution deviendra **plus symétrique à mesure que le support augmente**.
- Cela ne serait correct que pour une distribution qui est gaussienne à la plus petite échelle.





5. Changement de support

Correction indirecte log-normal :

La correction indirecte log-normale **suppose** que les distributions **ponctuelles et par blocs** sont toutes deux **log-normales avec la même moyenne et des variances** différentes.

Cette méthode de changement de support suppose que l'on peut associer une valeur Z_V à chaque valeur ponctuelle Z_i par la relation :

$$Z_V = aZ_i^b$$

Isaaks & Srivastava (1989, p.473)	Emery (2004)
$b = \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{\sigma_v^2}{m^2}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{m^2}\right)} \right)^{1/2}$	$b : \frac{E\left[Z_i^{2b}\right]}{E\left[Z_i^b\right]^2} = 1 + \frac{\sigma_v^2}{m^2}$
$a = m^{1-b}\left(1 + \frac{\sigma_v^2}{m^2}\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{m^2}\right)^{b/2}$	$a = \frac{m}{E[Z^b]}$

Emery, X. On the consistency of the indirect lognormal correction. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 18, 258–264 (2004). https://doi.org/10.1007/s00477-004-0188-2

5. Changement de support

Correction indirecte log-normal : limitations

Ce modèle fonctionne assez bien lorsque la distribution de la variable Z_i n'est pas trop éloignée d'une distribution lognormale (donc variable continue, distribution unimodale avec asymétrie positive). Emery (2004) note toutefois plusieurs problèmes avec cette approche :

1. pour de très grands blocs, la distribution **ne tend pas vers une loi normale** comme attendu avec le théorème centrale limite;
2. on retrouve la **même proportion de valeurs nulles** pour les blocs que pour les points, ce qui semble irréaliste;
3. la distribution des **blocs peut être plus asymétrique** que celle des points (comportement non-souhaitable);
4. la forme de la **distribution des blocs change** si l'on translate la distribution des points par une constante;
5. le modèle est **mal adapté aux distributions discrètes** puisqu'il produira aussi des distributions discrètes pour les valeurs des blocs;

Emery, X. On the consistency of the indirect lognormal correction. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 18, 258–264 (2004). https://doi.org/10.1007/s00477-004-0188-2

5. Changement de support

Conditionnement uniforme:

Permet d’**estimer les réserves récupérables** à l'intérieur d'un panneau minier en utilisant la teneur estimée du panneau et un **modèle de changement de support**.

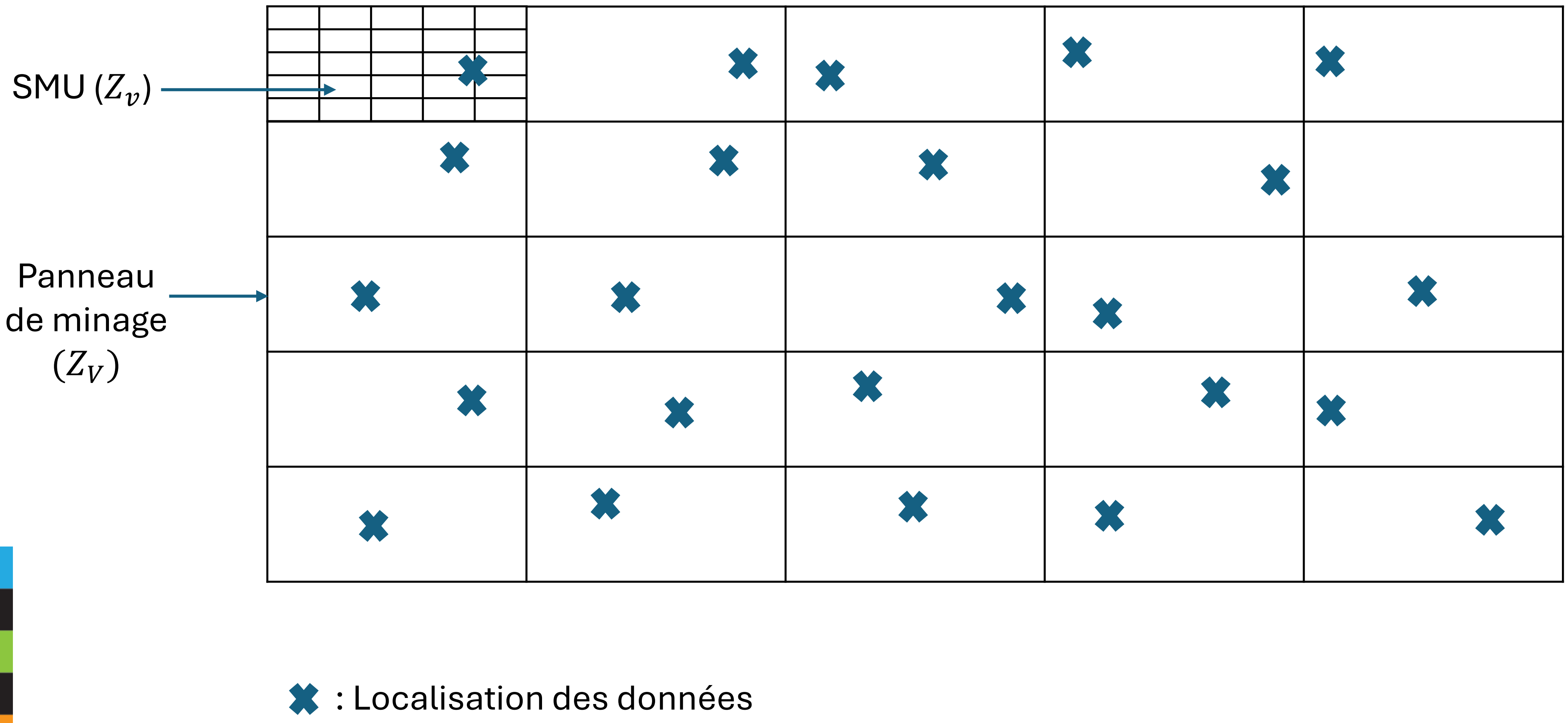
Nous faisons l'**hypothèse** que **si la teneur du panneau est connue, alors la distribution des SMU dans ce panneau est également connue**.

L’idée est de découper le gisement en panneaux (blocs de gande taille, Z_V) pour lesquels l’estimation par krigeage ordinaire peut se faire sans trop de problème, puis d’estimer les distributions de plus petits blocs (Z_v), ou d’estimation futurs (Z_V^*) localement.

Le conditionnement uniforme utilise à la base un modèle de changement de support appelé **modèle gaussien discret**.

5. Changement de support

Conditionnement uniforme:



SMU : selective mining unit

5. Changement de support

Conditionnement uniforme: Modèle gaussien discret

Supposons que l'on peut écrire $Z(x) = \phi(Y(x))$ et $Z_v(x) = \phi(Y_v(x))$ où Y et Y_v sont des variables $N(0,1)$ suivant une distribution bigaussienne avec corrélation r.

Si l'on prend un point x au hasard dans un bloc v, on a que :

$$E[Z(x)|Z_v] = Z_v$$

Il découle de la loi binormale que:

$$E[Y(x)|Y_v] = rY_v$$
$$\mathrm{Var}[Y(x)|Y_v] = 1 - r^2$$

On peut donc écrire conditionnellement à $Y_v = y_v$ que :

$$Y(x) = ry_v + (1 - r^2)^{1/2}U \text{ où } U \text{ est } N(0,1)$$

On a finalement que :

$$Z_v = \phi(Y_v) = \mathrm{E[Z(x)|Z_v]} = \int \phi\left(rY_v + (1 - r^2)^{\frac{1}{2}}u\right) g(u)du$$

où $g(u)$ est la fonction de densité $N(0,1)$.

5. Changement de support

Conditionnement uniforme: Modèle gaussien discret

1. L'intrégrale peut être évaluée numériquement

2. La fonction ϕ peut être obtenue expérimentalement de diverses façons (e.g., polynômes d'Hermite ou transformation graphique)

3. Le coefficient r compris entre 0 et 1 est déterminé de sorte que:
$$Var(Z_v) = Var\left(\phi_{\mathrm{v}}(\mathrm{Y_v})\right) = \mathrm{Var}\left(\mathrm{Z(x)}\right) - \bar{\gamma}(v, v)$$

4. Connaissant Z_v associé à chaque Y_v et sachant que Y_v est distribué suivant une $N(0,1)$, on obtient la distribution de Z_v.

5. Un aspect intéressant de ce modèle est que le coefficient de changement de support est déterminé grâce au variogramme des teneurs (Z) et non du variogramme des valeurs normales (Y) correspondantes. Avec les simulations conditionnelles au contraire, c'est le variogramme des Y qui est utilisé à la base, ce qui oblige à adopter une hypothèse de multinormalité.

5. Changement de support

Conditionnement uniforme: Modèle gaussien discret

Extension pour inclure l'effet d'information

On peut étendre le modèle pour prédire les ressources qui seront obtenues en se basant sur l'estimation future obtenues au moment de la sélection.

On pose que Y et Y_v^* suivent une loi binormale de corrélation q.

On va estimer la distribution de Z_v^* par :

$$Z_v^* = \phi(Y_v^*) = \mathrm{E}[\mathrm{Z(x)}|\mathrm{Z_v^*}] = \int \phi\left(qY_v^* + (1-q^2)^{\frac{1}{2}}u\right) g(u)du$$

Le coefficient q tient compte du changement de support et de l'effet information. Il est déterminé de telle sorte que :

$$Var(Z_v^*) = Var\left(\phi_{\mathrm{v}}(Y_v^*)\right) = \mathrm{Var}\left(\mathrm{Z(x)}\right) - \bar{\gamma}(v,v) - \sigma_k^2$$

où σ_k^2 est la variance de krigeage obtenue avec l'estimateur futur (supposé identique pour tous les blocs).

5. Changement de support

Conditionnement uniforme :

On s'intéresse à la distribution des teneurs de petits blocs v dans un panneau de taille V avec $V > v$ (typiquement quelques dizaines de blocs v dans V). On fait les mêmes hypothèses du **modèle gaussien discret** pour les supports v et V.

Appelons r_v et $r_V < r_v$ les coefficients de changement de support obtenus (déterminés par les variances de blocs v et V). Considérons un bloc pris au hasard dans V . On a que :

$$E[Z_v|Z_V] = Z_V.$$

(i.e. en moyenne la teneur d'un petit bloc pris au hasard dans le panneau est égale à la teneur du panneau).

Si l'on suppose que Y_v et Y_V suivent une loi binormale de correlation R, on a que :

$$E[Y_v|Y_V] = RY_V$$
$$Var(Y_v|Y_V) = 1 - R^2$$

On a donc:

$$Z_V = \phi_V(Y_V) = \mathrm{E}[\mathrm{Z}_v|\mathrm{Z}_V] = \int \phi_v\left(RY_V + (1-R^2)^{\frac{1}{2}}u\right) g(u)du$$

Si l'on suppose aussi que $Y(x)$ et Y_V suivent une loi binormale de correlation r_V, on a que :

$$Z_V = \phi_V(Y_V) = \mathrm{E}[Z(x)|\mathrm{Z}_V] = \int \phi\left(r_V Y_V + (1-r_V^2)^{\frac{1}{2}}u\right) g(u)du$$

5. Changement de support

Conditionnement uniforme :

On peut montrer que:

$$R = r_V / r_v$$

En pratique, l'on ne connaît pas Z_V. Toutefois, on peut utiliser la valeur estimée par krigeage ordinaire pour le panneau V (l'estimation à l'échelle du panneau est normalement précise).

Connaissant Z_V, on détermine y_V par inversion de ϕ_v. On a alors tous les éléments pour l'espérance de toute fonction $f(y_V)$, dont le tonnage, la quantité de métal, et la teneur.

On voit donc que l'on peut localiser les ressources à l'échelle des panneaux pour les blocs v.

Ainsi, le tonnage au-dessus du seuil $c = \phi_v(y_c)$ est donné par :

$$T = 1 - G\left(\frac{y_{c_v} - RY_V}{\sqrt{1 - R^2}}\right)$$

Conditionnement uniforme : Utilisation des polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite simplifient la description du modèle gaussien discret (du moins pour l'aspect théorique). Dans un contexte gaussien, on peut représenter la fonction ϕ par une série infinite de polynômes d'Hermite :

$$\phi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n(Y)$$

Ou les f_n sont des coefficients à déterminer et les $H_n(Y)$ sont des polynômes d'Hermite donnés (à *Y*=*y*) par :

$$H_0(y) = 1$$
$$H_1(y) = -y$$
$$H_2(y) = (y^2 - 1)/\sqrt{2}$$
$$H_{n+1}(y) = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} y H_n(y) - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} H_{n-1}(y)$$

Les f_n sont calculés en évaluant :

$$f_n = E[\phi(y) H_n(y)] = \int \phi(y) H_n(y) g(y) dy$$

On a en particulier que :

$$E[\phi(y)] = f_0 \text{ et Var } [\phi(y)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$$

5. Changement de support

Conditionnement uniforme : Utilisation des polynômes d'Hermite

Dans le cadre du modèle gaussien discret, on peut montrer que :

$$Z_v = \phi_v(Y_v) = \sum_{n=0}^{\infty} r_v^n f_n H_n(Y_v)$$

Et

$$Z_V = \phi_V(Y_V) = \sum_{n=0}^{\infty} r_V^n f_n H_n(Y_V)$$

On peut écrire que :

$$Var(Z_v) = \sum_{n=1}^{\infty} r_v^{2n} f_n^2$$

Et

$$Var(Z_V) = \sum_{n=1}^{\infty} r_V^{2n} f_n^2$$

On peut réécrire :

$$\phi_V(Y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} r_V^n f_n H_n(Y_V) = \sum_{n=0}^{\infty} r_v^n \frac{r_V^n}{r_v^n} f_n H_n(Y_V) = \sum_{n=0}^{\infty} r_v^n R^n f_n H_n(Y_V)$$

qui démontre que le changement de support point $\rightarrow V$ (avec coefficient r_V) peut être obtenu par le changement de point $\rightarrow v$ avec coefficient r_v suivi d'un changement de support de $v \rightarrow V$ avec coefficient R.

5. Changement de support

Conditionnement uniforme : Utilisation des polynômes d'Hermite

Pour bien ajuster une distribution donnée et diminuer les oscillations, il faut parfois atteindre des ordres très élevés.

Exemple : même avec un ordre de 60, des oscillations persistent dans les valeurs prédites (points en rouge dans la figure à droite).

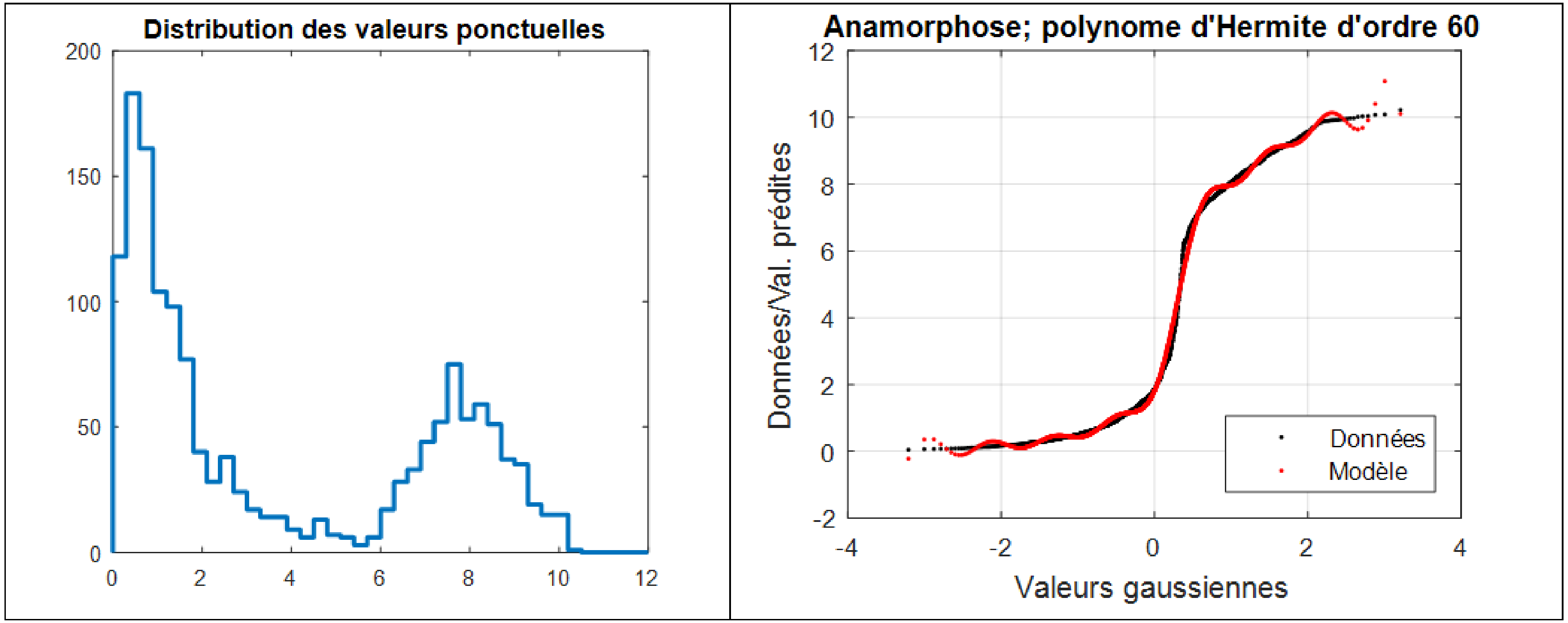


Figure 2 : Distribution ponctuelle bimodale (gauche) et courbes donnant les valeurs observées et prédites par l'expansion par polynôme d'Hermite à l'ordre 60 en fonction de la valeur gaussienne (droite).

5. Changement de support

Conditionnement uniforme :

Étapes de mise en œuvre du modèle gaussien discret et du conditionnement uniforme (avec les polynômes d'Hermite)

1. Choisir la zone d'étude et calculer le variogramme des teneurs ponctuelles

2. Choisir la taille des blocs (dépend de la méthode de minage) et choisir la taille des panneaux à considérer (fonction de la distance inter-forages)

3. Calculer les coefficients f_n. Pour ce faire :

   i. On classe les teneurs $z_i = \phi(y_i)$, on associe la valeur gaussienne correspondante y_i à chaque rang;

   ii. On choisit l'ordre de l'expansion N (~ 100);

   iii. On évalue les polynôme $H_n(y_i), n = 0, \dots, N$, à chaque valeur de y_i ;

   iv. On évalue l'équation numérique par : $f_n = \frac{1}{nd} \sum_{i=1}^{nd} z_i H_n(y_i)$, où nd est le nombre de données;

   v. On compare les valeurs expérimentales z_i aux valeurs calculées par le modèle. Si l'ajustement est satisfaisant, on arrête, sinon, on peut essayer d'augmenter l'ordre du polynôme.

5. Changement de support

Conditionnement uniforme :

Étapes de mise en œuvre du modèle gaussien discret et du conditionnement uniforme (avec les polynômes d'Hermite)

4. Utiliser le variogramme ponctuelle pour calculer les variances de Z_v et Z_V

5. Déterminer r_v et r_V. Calculer $R = r_V / r_v$.

6. Estimer par krigeage ordinaire la teneur des panneaux. Considérer que $Z_V \equiv Z_V^{KO}$ et déterminer la valeur de y_V correspondant à l'équation $Z_V = \phi_V(Y_V) = \sum_{n=0}^{\infty} r_V^n f_n H_n(Y_V)$

7. La fonction de répartition de Z_v pour ce panneau est obtenue en évaluant :

$$P\left(Z_v < c \middle| Z_V = Z_V^{KO}\right) = P\left(N(0,1) < \frac{y_c - R y_V}{(1 - R^2)^{0.5}}\right)$$

Ou y_c est obtenue à partir de l'équation suivante évaluée à la valeur de $Z_v = c$:

$$c = \phi_v(y_c) = \sum_{n=0}^{\infty} r_v^n f_n H_n(y_c)$$

8. Ayant la fonction de répartition de Z_v, on peut estimer l'espérance de toute fonction de Z_v (tonnage, quantité de méral, etc...)

6. *Soft Kriging*

Tenir compte des informations semi-quantitatives :

KI est plus flexible que KS et KO :

- Utiliser des informations du type $Z(x_i) > t, Z(x_i) < t, t2 > Z(x_i) > t1;$
- Utiliser des données semi-quantitatives fournies par le géologue (e.g., « dans ce type de roche, la teneur n'excède jamais « t »).

Exemple :

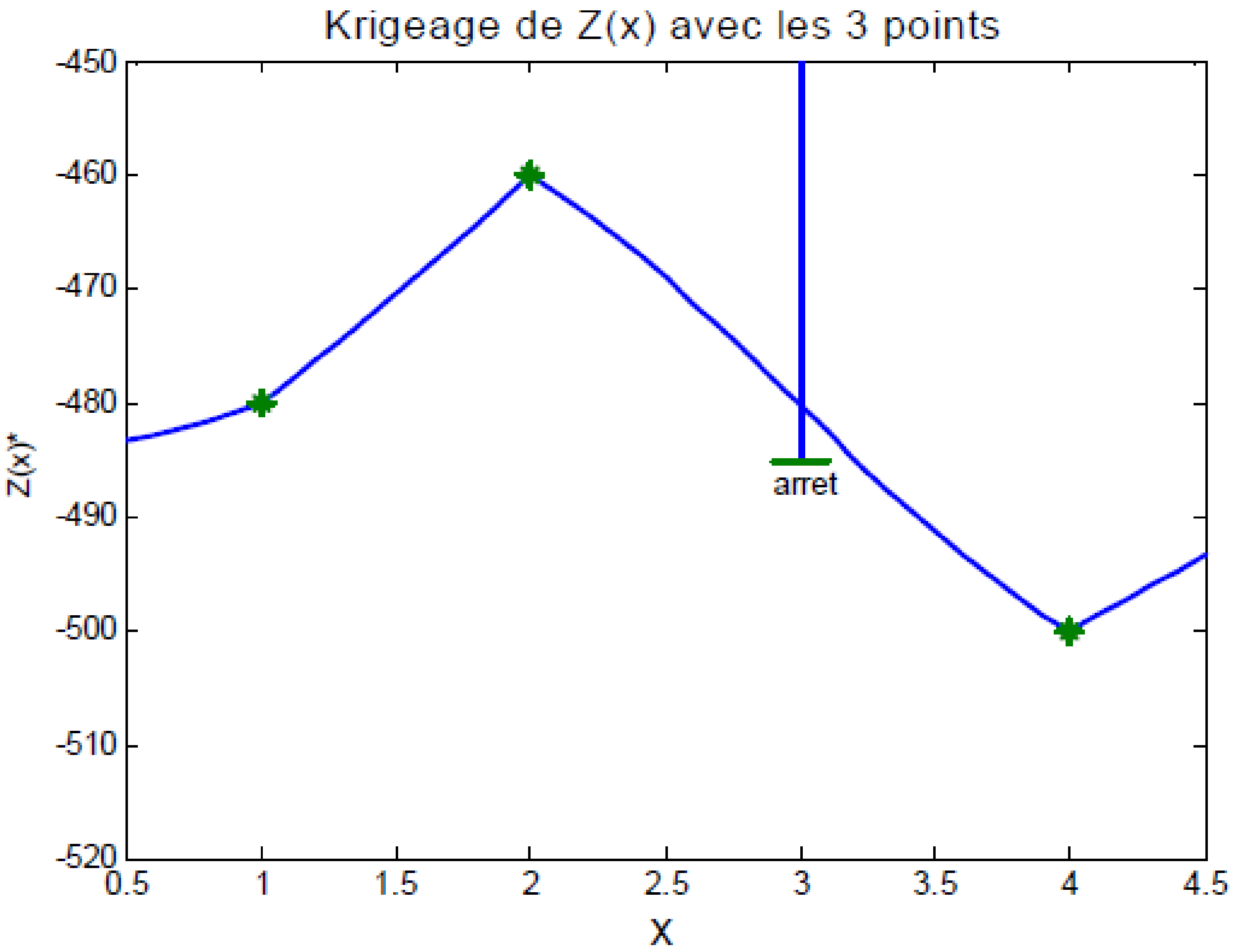
3 forages ont intercepté le sommet d'un réservoir pétrolier

$$Z(1) = -480, \qquad Z(2) = -460, \qquad Z(4) = -500$$

Un 4e forage situé en x=3 a dû être arrêté au niveau –485 sans que le sommet n'ait pas été intercepté !

6. *Soft Kriging*

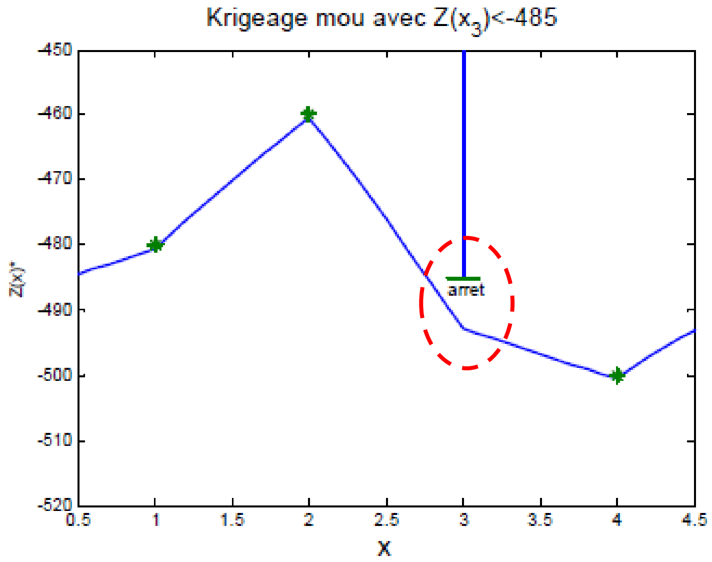
Tenir compte des informations semi-quantitatives : solution par KO de Z(x)

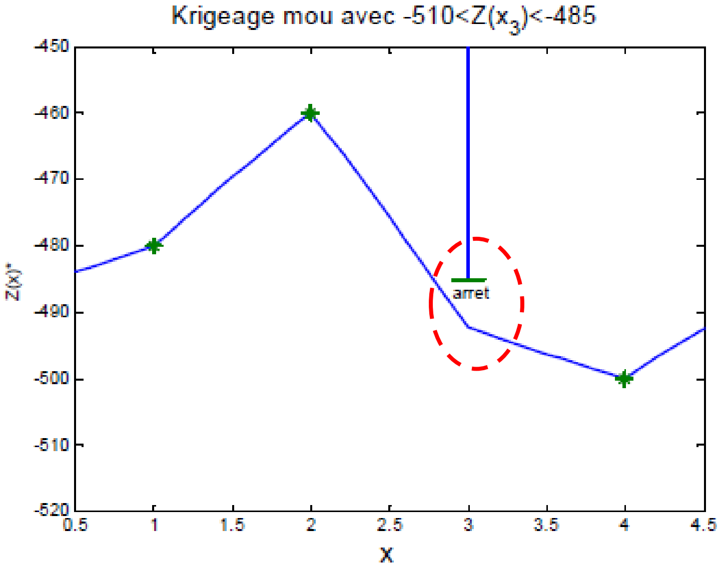


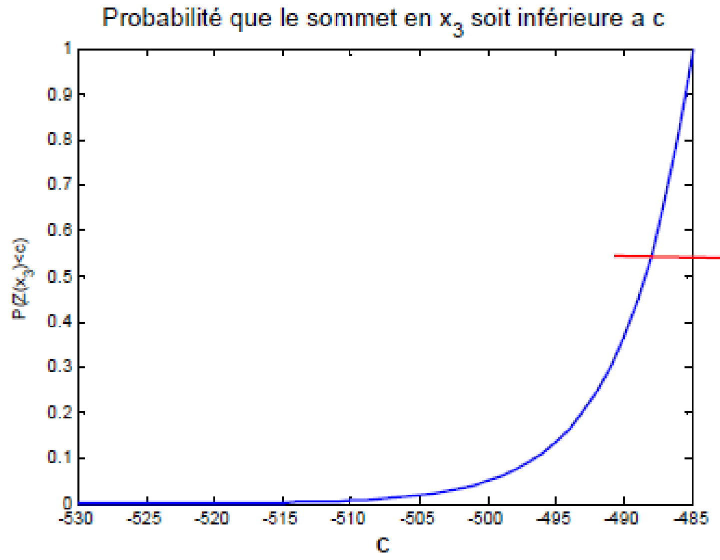
La solution n'est pas acceptable ! Elle contredit l'information en x=3.

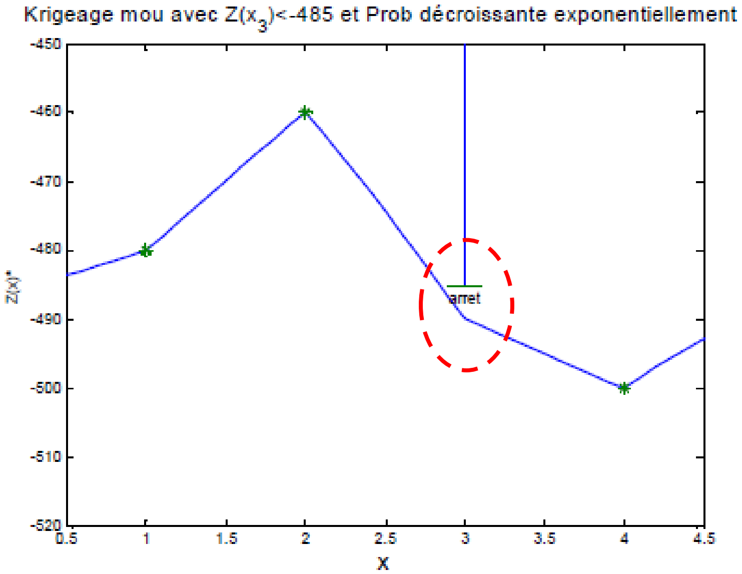
6. *Soft Kriging*

Tenir compte des informations semi-quantitatives : solution en utilisant KI









Krigeage simple d'indicatrice

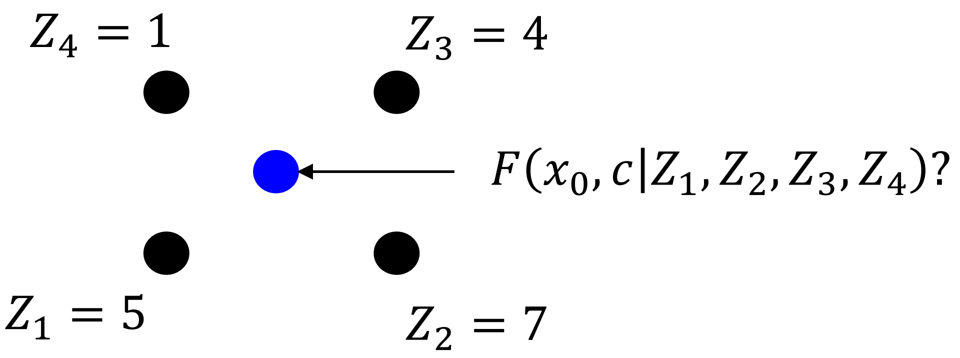
$$\mathrm{I}^*(\mathrm{x}_0, \mathrm{c}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(x_i, c) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) F_Z(c)$$

$$= F_Z(c) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(I(x_i, c) - F_Z(c)\big)$$

$$KS: \; m + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (Z_i - m)$$

$F_Z(c)$: fonction de répartition globale

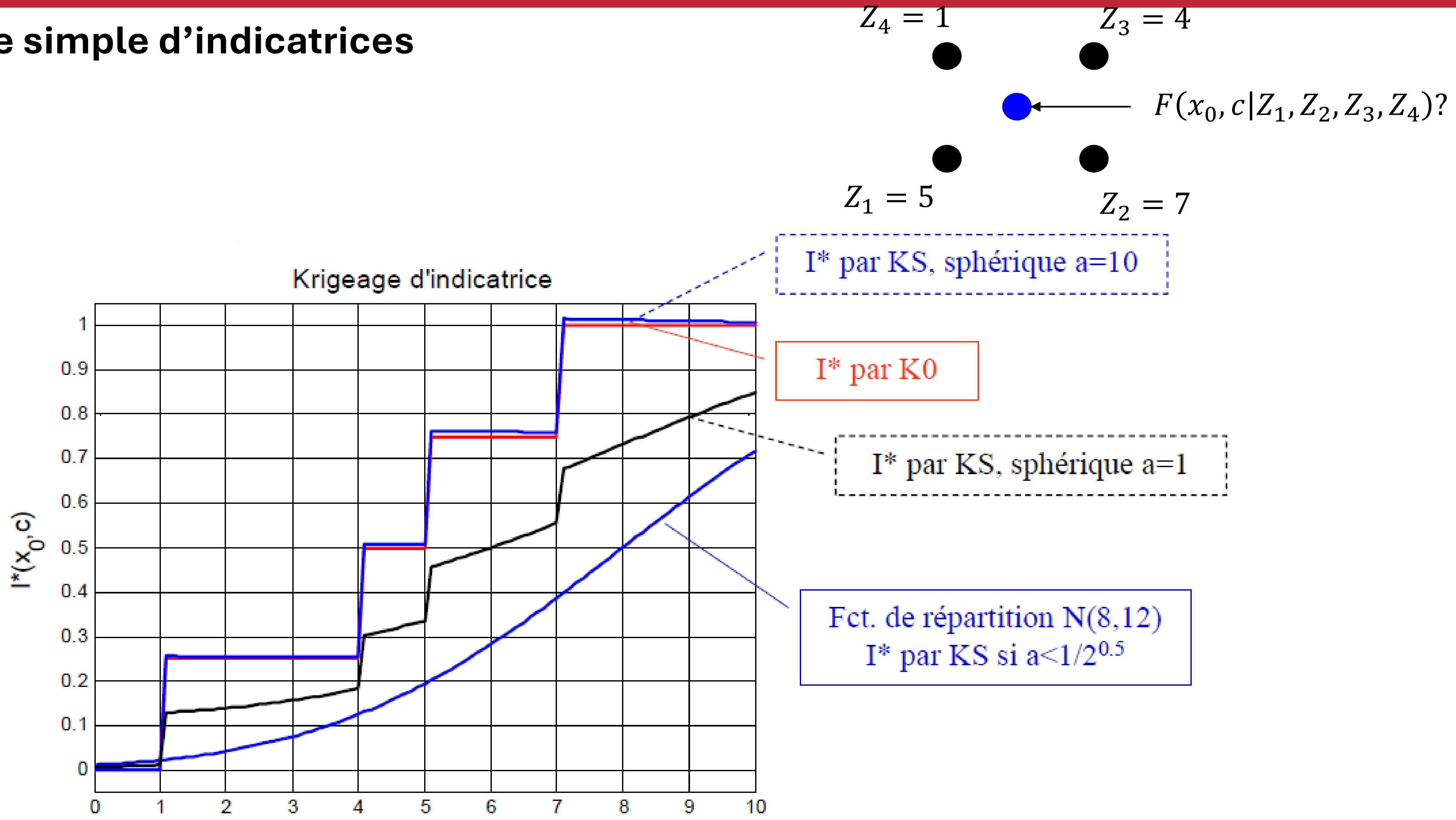
- Permet une gradation plus souple de $I^*(x, c)$;
- Permets de mieux tenir compte du degré de corrélation locale.



S'il n'y a pas de corrélation entre les points, la fonction estimée sera simplement $F_Z(c)$

7. Variantes

Krigeage simple d'indicatrices



7. Variantes

Cokrigeage d'indicatrice

Cas 1 : utilisation de toutes les indicatrices

v. principale : $I(x, c_j)$
v. Secondaires : $I(x, c_k), k \neq j$

Très lourd, presque jamais utilisé

Cas 2 : *Probability kriging*

v. principale : $I(x, c_j)$
v. Secondaires : $Z(x)$, sinon encore mieux $U(x) = \frac{rang(Z(x))}{n+1}$

7. Variantes

Krigeage : analyse par composantes principales

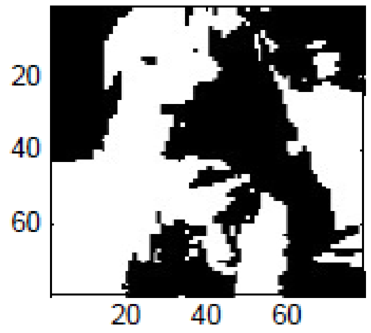
Idée : Transformer les indicatrices liées entre elles (corrélées) en nouvelles variables décorrélées les unes des autres.

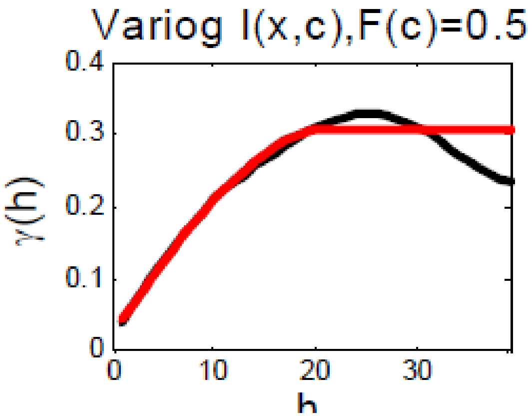
On réalise le krigeage sur les facteurs obtenus de l'analyse par composantes principales

Une alternative au cokrigeage des indicatrices

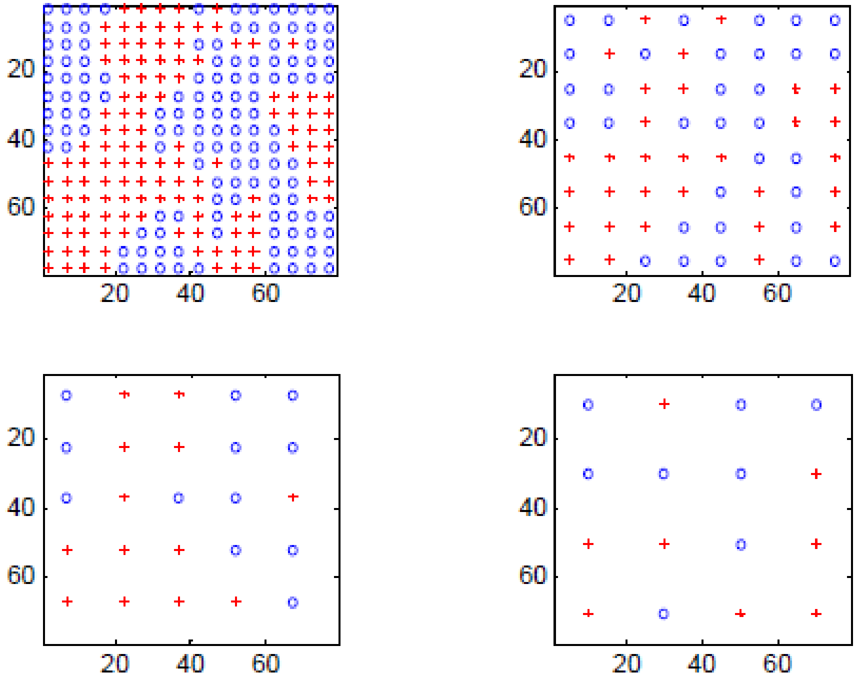
8. Exemple

Déterminer le volume d'un sol contaminé au-delà d'une norme





C=130; V=3120

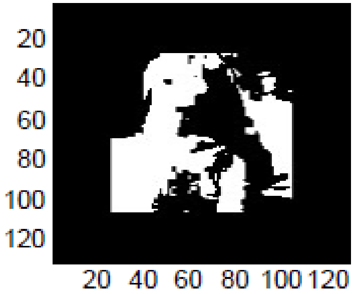


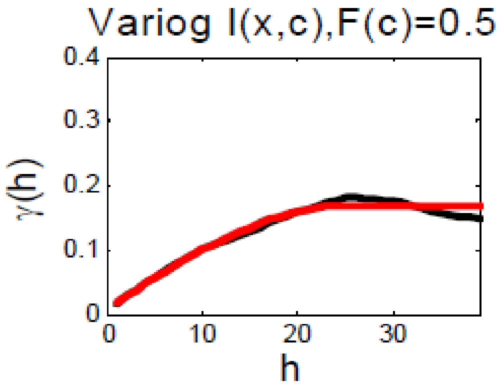
Pas	n	V*	σ	CI (95%)
5	256	3020	93	[2834,3205]
10	64	3023	210	[2603,3443]
15	25	3002	387	[2228,3775]
20	16	3089	527	[2036,4142]

8. Exemple

Déterminer le volume d'un sol contaminé au-delà d'une norme

Que se passe-t-il si l'échantillon déborde de la zone d'intérêt?





Le variogramme des indicatrices change

	Surface>c		Écart-type	
Pas	Sans	Avec	Sans	Avec
5	3020	3096	93	132
10	3023	3110	210	230
15	3002	4115	387	403
20	3089	$\boxed{3267}$	527	577

Les estimés sont semblables et l'ordre de grandeur des écarts-types est comparable, même si la zone couverte est 2.2 fois + grande en superficie

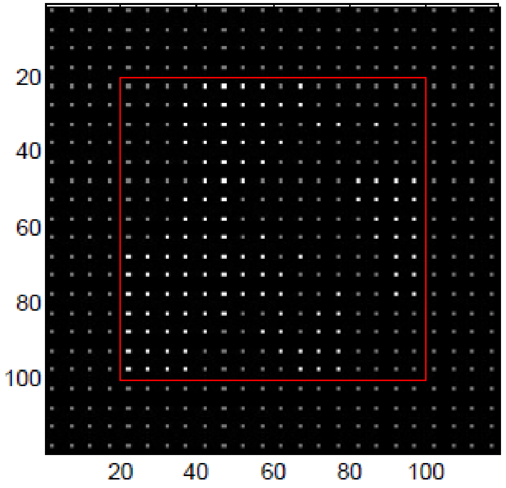
⇩

Bonne robustesse au choix initial de la zone d'étude

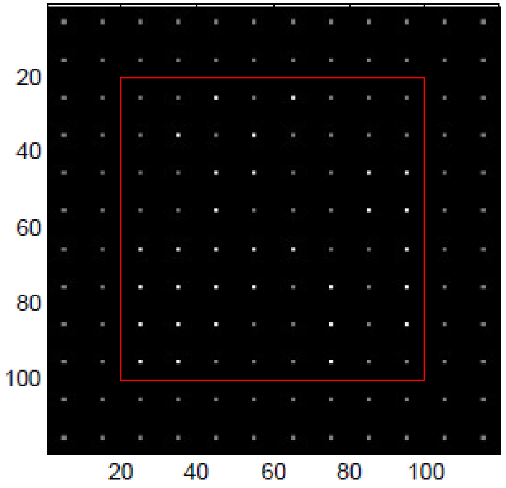
8. Exemple

Déterminer le volume d'un sol contaminé au-delà d'une norme

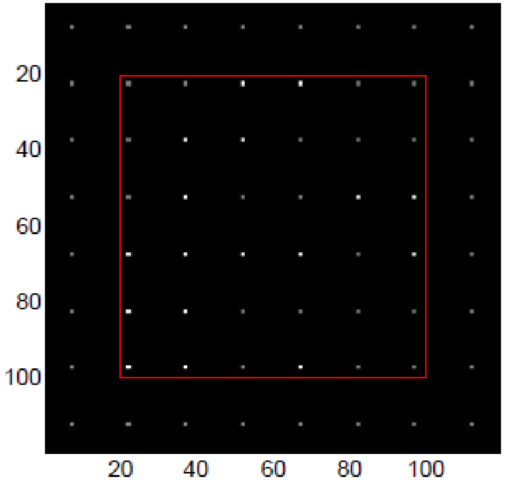
Pas=5m



Pas=10m



Pas=15m



Pas=20m