

# GML6402A : Géostatistique

## Cours 4 : Géostatistique multivariables



**POLYTECHNIQUE  
MONTREAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

# Objectifs

- Comprendre la mécanique du cokrigeage (généralisation du krigeage au cas multivariable) ;
- Analyser et expliquer les situations où le cokrigeage peut être utile ;
- Calculer des variogrammes croisés et covariances croisées ;
- Définir les paramètres d'un modèle linéaire de corégionalisation et vérifier l'admissibilité du modèle ;
- Interpréter les résultats d'un cokrigeage et de différentes formes de validation croisées.

# Plan de cours

1. Mise en contexte
2. Cokrigage simple et ordinaire
  - 2.1. Cokrigage simple
  - 2.2. Cokrigage ordinaire
  - 2.3. Forme matricielle
3. Covariance croisée et variogramme croisé
  - 3.1. Covariance croisée
  - 3.2. Variogramme croisé
4. Modèles admissibles
5. Cas où le cokrigage peut être utile



# 1. Mise en contexte

**Idée :** Améliorer les estimations obtenues par krigeage en utilisant l'information fournie par d'autres variables (données secondaires) que la variable principale.

**Variable principale :** Ce que l'on cherche à estimer (noté  $Z$ )

**Variable(s) secondaire(s) :** Données de terrain corrélées avec la variable principale. Ajoute une information supplémentaire sur la structure spatiale de la variable principale (noté  $Y_1, \dots, Y_n$ ).

**Objectif :** Obtenir une estimation qui respecte à la fois les données principales et toutes les données secondaires.

**Avez-vous des idées de variables principales et de variables secondaires communs en géologie ?**



# 1. Mise en contexte

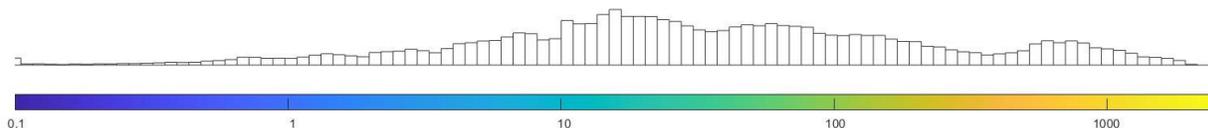
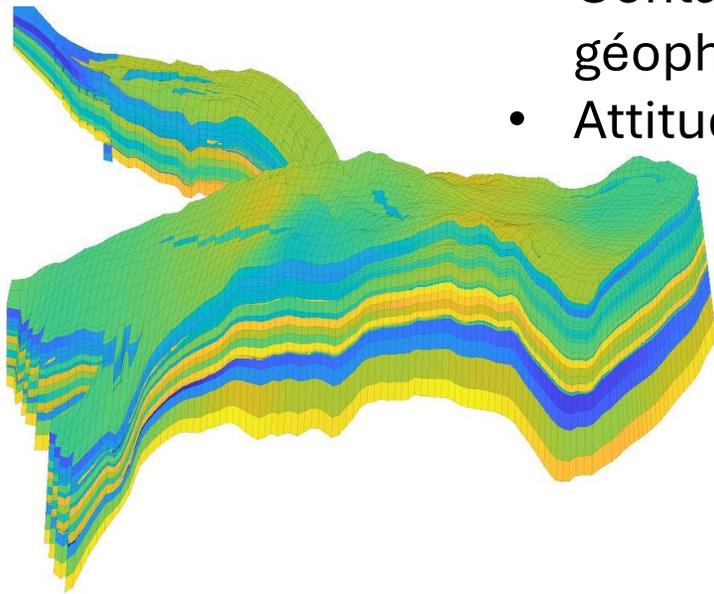
## Exemples :

### 1) Estimer la position du sommet d'un réservoir pétrolier ou gazier

Variable principale : Position du sommet observé dans *quelques* forages

Variable(s) secondaire(s) :

- Positions interprétées par sismiques
- Contact(s) géologique(s) estimé(s) par géophysique
- Attitude du contact dans les forages



# 1. Mise en contexte

## Exemples :

2) Produire une carte de charges hydraulique qui soit réaliste

Variable principale : Surface piézométrique dans *quelques* puits

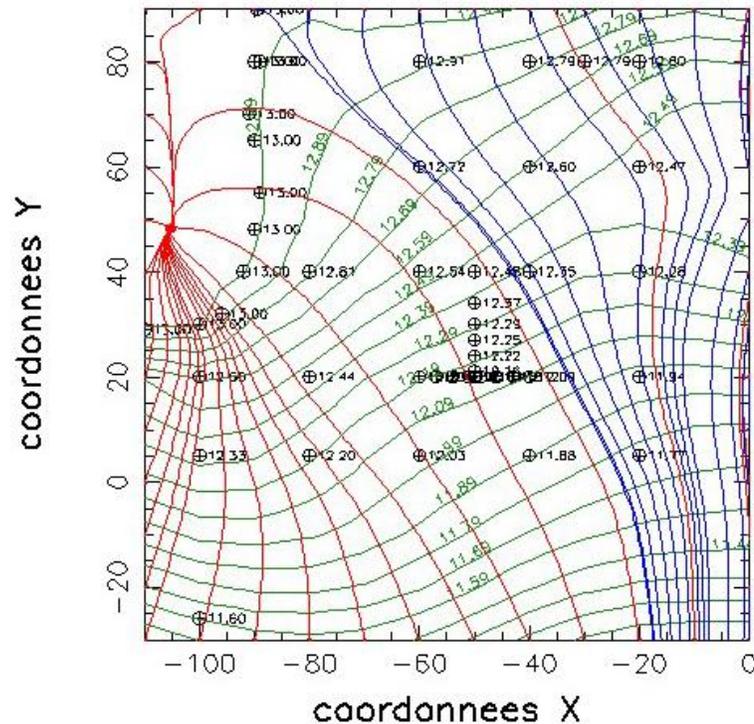
Variable(s) secondaire(s) • Surface topographique (aquifère à nappe libre)

:

• Frontières imperméables connues

• Vecteurs gradients connus (sens de l'écoulement)

• Mesures géoradar (contacts géologiques)



# 1. Mise en contexte

## Exemples :

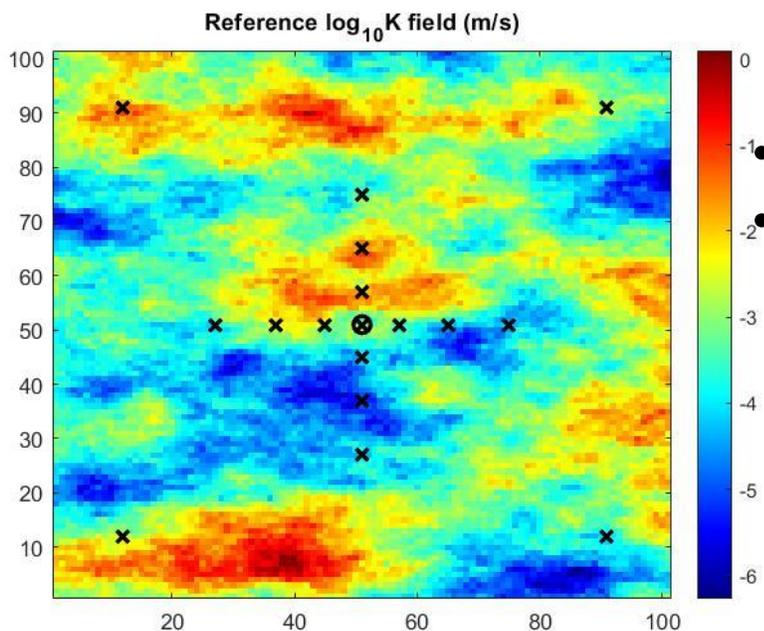
### 3) Modélisation de la transmissivité d'un aquifère

Variable principale :

**Transmissivités** dans un modèle d'éléments finis ou de différences finies

Variable(s) secondaire(s) :

- La **transmissivité** (ou conductivités hydrauliques) obtenue par *slug-test*, test de pompage, courbes granulométriques, capacité spécifique de puits
- Frontières hydrauliques connues
- Charges hydrauliques connues (permanent et transitoire)



Ici, les variables secondaires reflètent la variable principale à des échelles différentes (ponctuelle, local, radial, régional).

# 1. Mise en contexte

## Exemples :

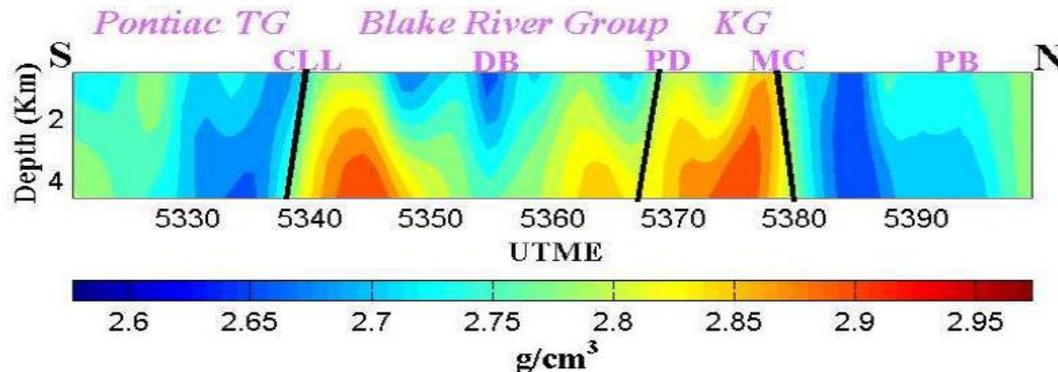
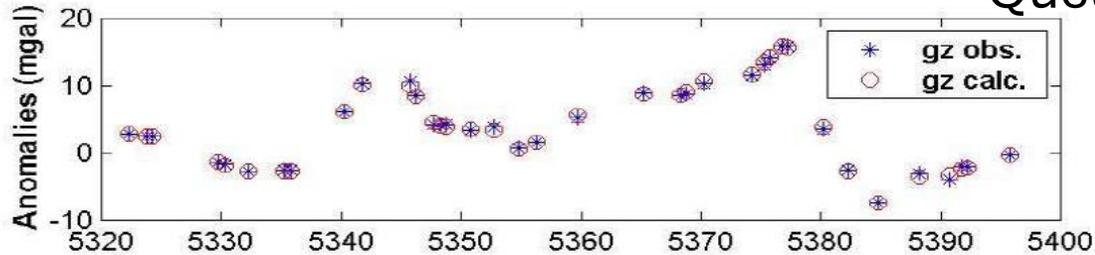
### 4) Inversion de données gravimétriques

Variable principale :

Densité pour un modèle de blocs du sous-sol

Variable(s) secondaire(s)  
:

- Anomalie gravimétrique mesurée au sol
- Anomalie gravimétrique aéroportée
- Quelques mesures de densité en forage



Note : on n'a souvent aucune observation de la variable principale pour ce cas.

# 1. Mise en contexte

## Exemples :

### 5) Inversion de tomographies radar

Variable principale :                   Modèle de 'lenteurs' pour un modèle de blocs du sous-sol dans le plan défini par 2 forages coplanaires

Variable(s) secondaire(s) : • Temps de parcours émetteur-récepteur

Note : on n'a souvent aucune observation de la variable principale pour ce cas.

# 1. Mise en contexte

## Exemples :

### 6) Cartographie de la température de l'eau en surface

Variable principale :                    Température de l'eau mesurée directement

Variable(s) secondaire(s) : • Températures obtenues par interprétation du signal spectral d'un satellite

### 7) Cartographie de la bathymétrie

Variable principale :                    Mesures directes (bateau)

Variable(s) secondaire(s) : • Interprétation d'un levé hydroacoustique

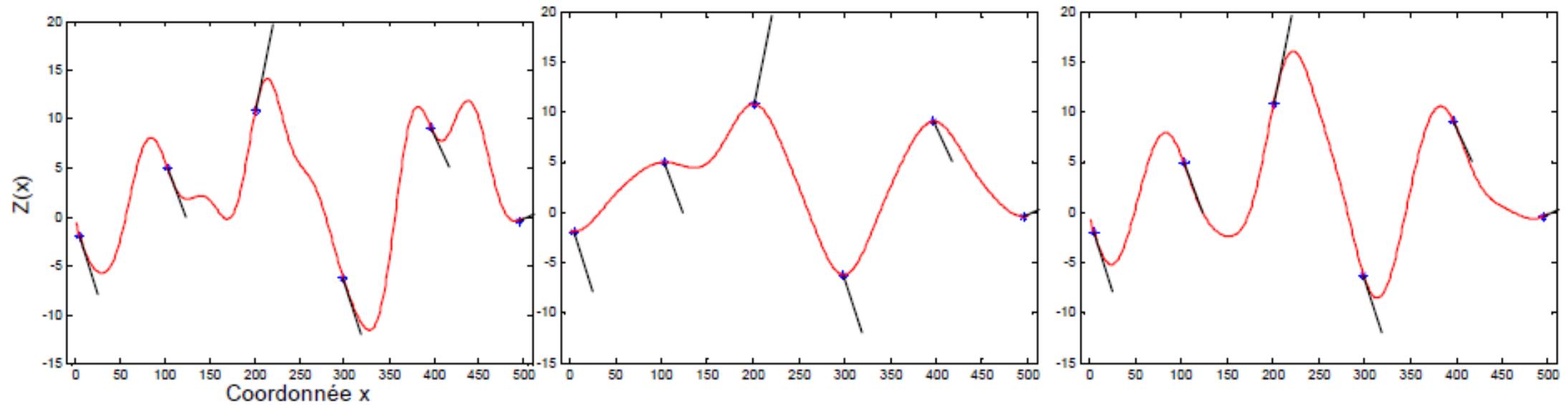
### 8) Cartographie de la contamination

Variable principale :                    Teneurs d'un polluant

Variable(s) secondaire(s) : • Topographie  
• Surface piézométrique

# 1. Mise en contexte

## Exemples :



Réalité

Krigage

Cokrigage avec  
dérivées

MAE :

Krigage 4.13

Cokrigage : 1.24

# 1. Mise en contexte

## Exemples :

1. On mesure la base (B), le sommet (S) et l'épaisseur (E) d'une même formation en quelques forages ;
2. On modélise les variogrammes de ces 3 variables ;
3. On effectue le krigeage de ces 3 variables  $\rightarrow B^*(x), S^*(x), E^*(x)$ .

Aura-t-on :  $E^*(x) = S^*(x) - B^*(x)$  ?

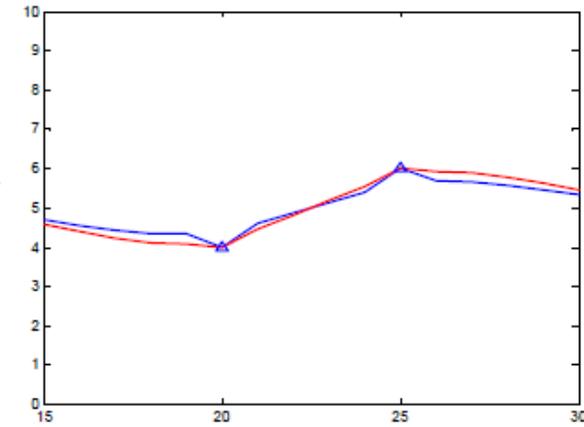
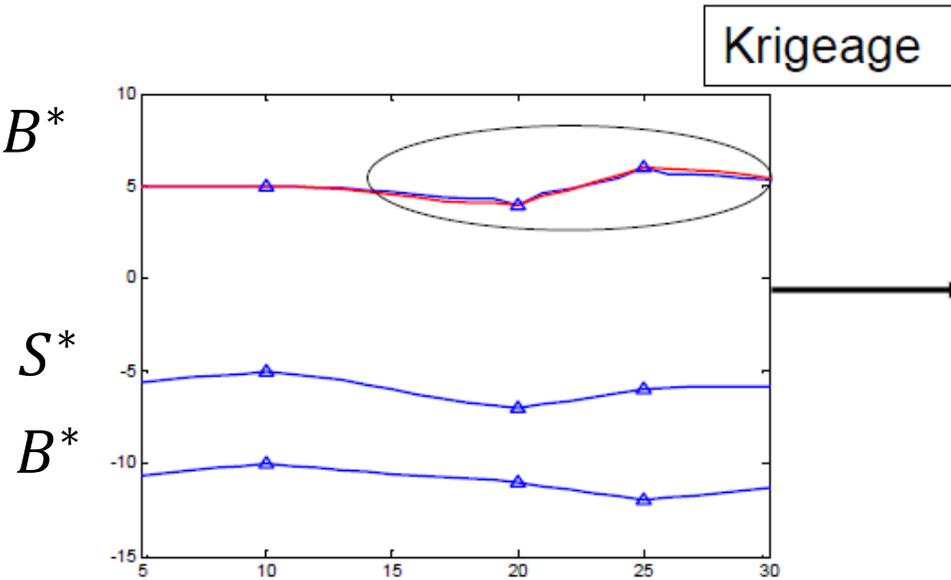
Pour le krigeage :

Pour le cokrigeage :

# 1. Mise en contexte

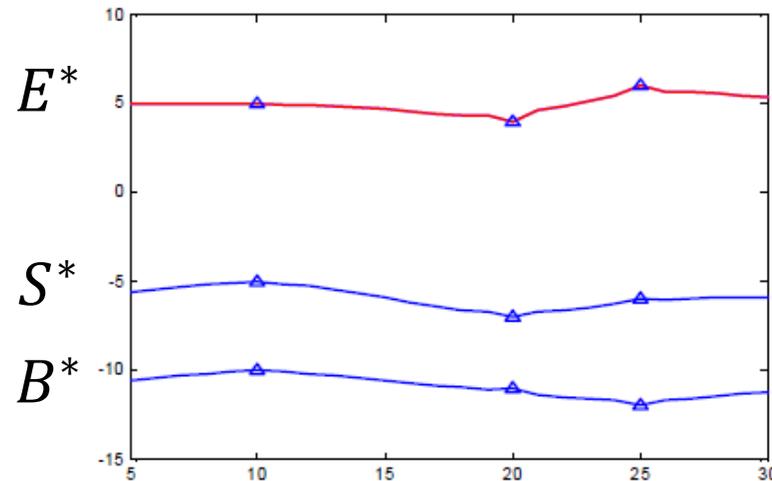
## Exemples :

$$E^*, S^* - B^*$$



— S\*-B\*  
— E\*

Cokrigeage



Réponse :

Pour le krigeage : NON

Pour le cokrigeage : OUI

## 2. Cokrigage simple et ordinaire

### Cas à deux variables :

On va étudier seulement le cas avec une variable principale et une variable secondaire.

Posons  $Z(x)$ , la variable principale, et  $Y(x)$ , la variable secondaire, avec respectivement  $n_z$  et  $n_y$  observations et de moyenne  $m_z$  et  $m_y$ .

La généralisation à plusieurs variables secondaires est identique à la méthodologie à deux variables. Seulement plus lourd mathématiquement, sans pour autant être plus complexes.

# 2. Cokrigage simple et ordinaire

## 2.1. Cokrigage simple

Les moyennes  $m_z$  et  $m_y$  sont connues. L'estimateur de  $Z$  est alors :

$$Z_0^* = m_z + \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i (Z_i - m_z) + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i (Y_i - m_y)$$

La variance d'estimation :

$$\begin{aligned} \text{Var}(e) = \text{Var}(Z_0 - Z_0^*) = & \text{Var}(Z_0) + \\ & \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(Y_i, Y_j) + 2 \sum_{i=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} \text{Cov}(Z_i, Y_j) + \\ & -2 \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i \text{Cov}(Z_0, Z_i) - 2 \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i \text{Cov}(Z_0, Y_i) \end{aligned}$$

Terme du haut : Variance de ce que l'on estime

Terme du milieu : Variance de l'estimateur

Terme du bas : Covariance de l'estimateur et ce que l'on estime

# 2. Cokrigage simple et ordinaire

## 2.1. Cokrigage simple

Minimisation de  $Var(e)$ . Système de  $n_z + n_y$  équations et inconnues.

$$\frac{\partial Var(e)}{\partial \lambda_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) = Cov(Z_0, Z_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_z$$

$$\frac{\partial Var(e)}{\partial \alpha_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Z_0, Y_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_y$$

Variance de cokrigage simple :

$$\sigma_{CS}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i) \leq \sigma_{KS}^2$$

# 2. Cokrigage simple et ordinaire

## 2.2. Cokrigage ordinaire

Méthode de Lagrange :

Les moyennes  $m_z$  et  $m_y$  sont inconnues. L'estimateur de  $Z$  est alors :

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Z_i + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Y_i, \quad \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i = 0$$

Lagrangien :

$$L(\lambda_i, \alpha_i, \mu_z, \mu_y) = \text{Var}(e) - 2\mu_z \left( \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i - 1 \right) - 2\mu_y \left( \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i \right)$$

# 2. Cokrigage simple et ordinaire

## 2.2. Cokrigage ordinaire

Minimisation de  $Var(e)$ . Système de  $n_z + n_y + 2$  équations et inconnues.

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) + \mu_z = Cov(Z_0, Z_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^{n_z} \lambda_j Cov(Y_i, Z_j) + \sum_{j=1}^{n_y} \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) + \mu_y = Cov(Z_0, Y_i), \quad \forall i = 1, \dots, n_y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_z} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_y} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i = 0$$

Variance de cokrigage ordinaire :

$$\sigma_{CO}^2 = Var(Z_0) - \sum_{i=1}^{n_z} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i Cov(Z_0, Y_i) - \mu_z$$

## 2. Cokrigage simple et ordinaire

### 2.3. Forme matricielle

$$K\tilde{\lambda} = k \text{ et } \sigma_{ck}^2 = \text{Var}(Z_0) - \tilde{\lambda}'k$$

Cokrigage simple :

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} \\ K_{yz} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \end{bmatrix}$$

Cokrigage ordinaire :

$$\begin{bmatrix} K_{zz} & K_{zy} & 1 & 0 \\ K_{yz} & K_{yy} & 0 & 1 \\ 1' & 0' & 0 & 0 \\ 0' & 1' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \mu_z \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{zz} \\ k_{yz} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

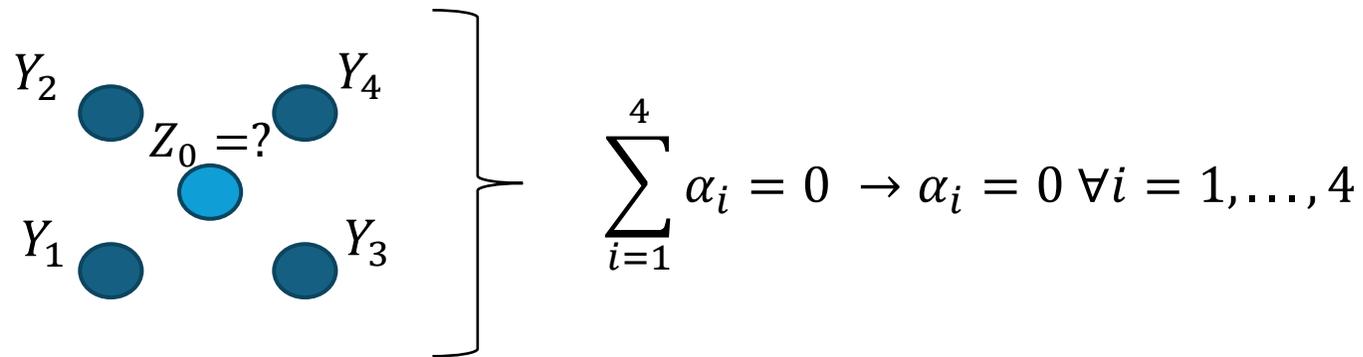
$$K_{zz} \rightarrow n_z \times n_z ; K_{zy} \rightarrow n_z \times n_y ; K_{yz} \rightarrow n_y \times n_z ; K_{yy} \rightarrow n_y \times n_y \\ k_{zz} \rightarrow n_z \times 1 ; k_{yz} \rightarrow n_y \times 1$$

## 2. Cokrigage simple et ordinaire

### Cokrigage simple (CS) vs cokrigage ordinaire (CO)

Souvent le CS est préférable

- CS → ne nécessite pas d'observations de  $Z$
- CO → dans certaines configurations symétriques, la contrainte sur les poids empêche de tenir compte de l'information de la variable secondaire



# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

Il existe 3 fonctions de structure croisées décrites dans la littérature :

## i. Covariogramme croisé :

$$C_{12}(\mathbf{h}) = \text{Cov}(Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}))$$

Avantages :

- permet d'utiliser des variables mesurées à des localisations ne coïncidant pas pour chaque variable
- permet de tenir compte d'asymétrie de corrélations

Désavantage :

- requiert d'estimer les moyennes de chaque variable

## ii. Variogramme croisé :

$$\gamma_{12}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E[(Z_1(\mathbf{x}) - Z_1(\mathbf{x} + \mathbf{h})) (Z_2(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}))]$$

Avantage :

- ne nécessite pas l'estimation des moyennes

Désavantages :

- requiert des variables mesurées aux mêmes localisations
- ne permet pas de modéliser des corrélations asymétriques

## iii. Pseudo-variogramme croisé :

$$p_{12}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E[(Z_1(\mathbf{x}) - Z_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}))^2]$$

Avantages :

- permet d'utiliser des variables mesurées à des localisations ne coïncidant pas pour chaque variable
- permet de tenir compte d'asymétrie de corrélations

Désavantages :

- ne permet pas de modéliser des corrélations négatives
- nécessite un ajustement pour les unités (habituellement normalisation) qui peut demander d'estimer les moyenne et écart-type de chaque variable

# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

## Définitions :

$$\text{Covariance croisée : } C_{ZY}(h) = \text{Cov}(Z(x), Y(x+h))$$

$$\begin{aligned} \text{Variogramme croisé : } \gamma_{ZY}(h) &= 0.5 E[(Z(x) - Z(x+h))(Y(x) - Y(x+h))] \\ &= 0.5 \text{Cov}(Z(x) - Z(x+h), Y(x) - Y(x+h)) \end{aligned}$$

Le variogramme croisé est **toujours** symétrique

$$\gamma_{ZY}(h) = C_{ZY}(0) - 0.5(C_{ZY}(h) + C_{ZY}(-h))$$

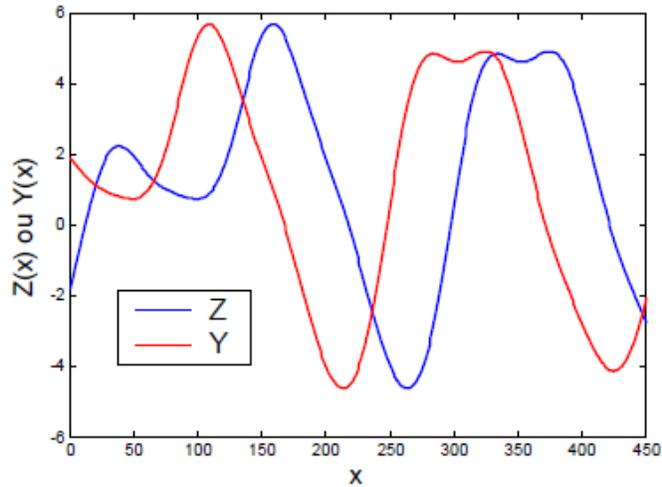
↓

$$\gamma_{ZY}(h) = \gamma_{ZY}(-h)$$

- La covariance croisée **ne peut être déduite** du variogramme croisé que **si elle est symétrique** !
- La covariance croisée est **plus générale** que le variogramme croisé

# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

## Comparaison :

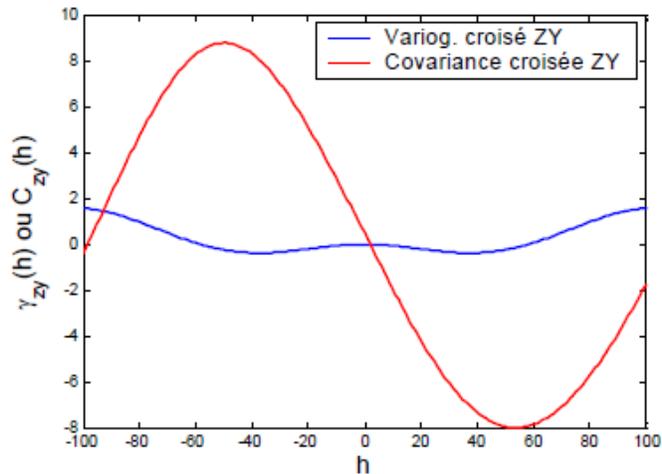


$$Y(x) = Z(x - 50)$$

Le variogramme croisé (bleu) ne détecte aucune structure.

La covariance croisée (rouge) détecte une forte structure

- Asymétrique
- Reconnais le décalage



# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

## Comparaison :



Covariance croisée	Variogramme croisée
$m_z$ et $m_y$ connus	Pas besoin
Tous les points où <b>l'une ou l'autre</b> variable est connue peuvent être utilisés dans le calcul de la covariance	Seuls les points où <b>les 2 variables</b> sont connues peuvent être utilisés dans le calcul du variogramme croisé
La covariance peut être <b>asymétrique</b>	La covariance doit être <b>symétrique</b>



# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

## Notes:

a)

Krigeage → plus souvent krigeage ordinaire

Cokrigeage → cokrigeage simple est souvent plus indiqué (p. ex. cas où la variable principale n'est pas observée)

b)

Krigeage → variogramme est l'outil de base

Cokrigeage → covariance est l'outil de base



### 3. Covariance croisée et variogramme croisé

#### Symétrie :

- Les matrices de cokrigage sont toujours symétriques  $\rightarrow K_{zy} = K'_{yz}$
- Toutefois, les fonctions de covariances croisées, elles, ne sont pas nécessairement symétriques, en effet :

$$C_{zy}(h) = Cov(Z(x), Y(x+h)) = Cov(Y(x+h), Z(x)) = C_{yz}(-h)$$

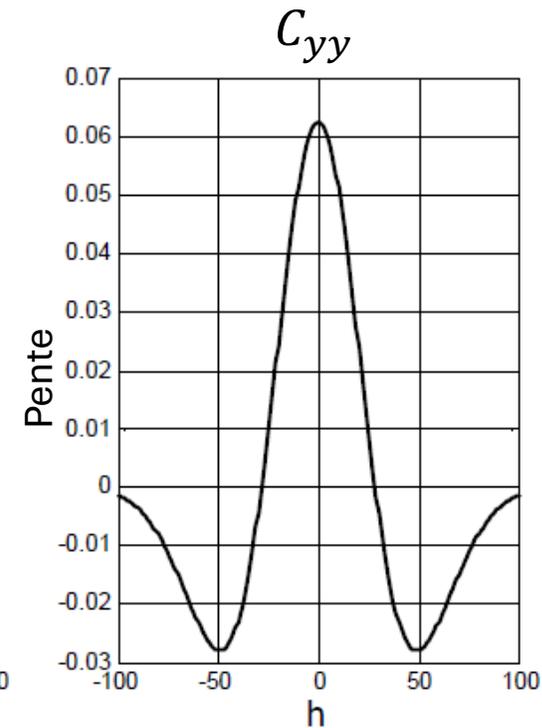
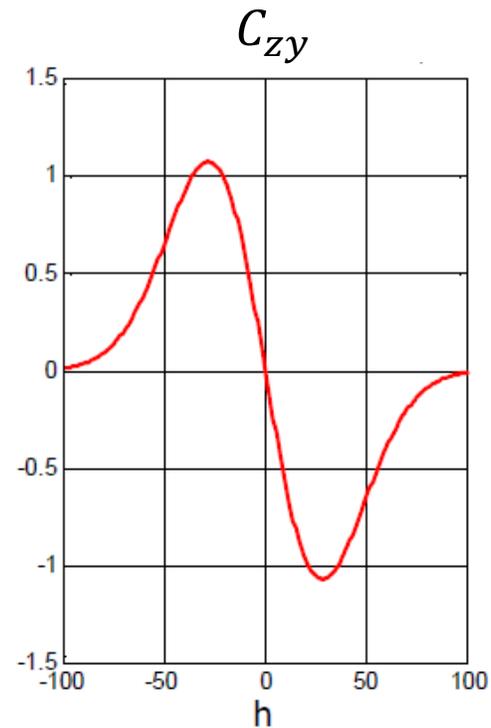
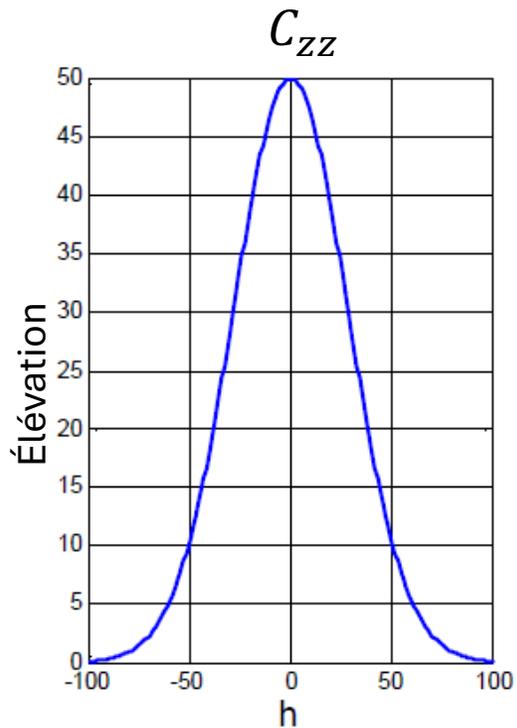
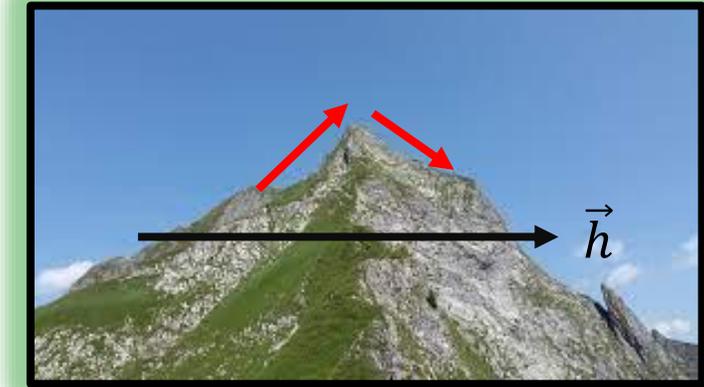
- Mais, en général

$$C_{zy}(h) = Cov(Z(x), Y(x+h)) \neq Cov(Y(x), Z(x+h)) = C_{yz}(h) = C_{zy}(-h)$$

# 3. Covariance croisée et variogramme croisé

Exemple visuel :

$$C_{zy}(h) \neq C_{zy}(-h)$$



## 4. Modèles admissibles

**Note :** Wackernagel(1995) recommande d'utiliser le covariogramme croisé dans le cas multivariable. J'adhère à cette recommandation.

La vérification de l'admissibilité des modèles de covariogrammes multivariables est plus complexe dans le cas général que pour le cas univariable.

**But :** Assurer que toute combinaison linéaire de  $Z$  et  $Y$  présente une **variance théorique positive**.

- Vérification délicate, non triviale, complexe mathématiquement.
- On va se limiter aux modèles admissibles par construction.

# 4. Modèles admissibles

## Conditions d'admissibilité pour les covariogrammes croisés

a) Cas 2 variables

b) Cas de  $p$  variables, modèle intrinsèque

c) Cas de  $p$  variables, modèle de corégionalisation linéaire

d) Cas de  $p$  variables, cas général

e) Variables avec relations déterminées



## 4. Modèles admissibles

### a) Cas de deux variables :

Condition de Cauchy-Schwartz sur les variogrammes croisés :

$$\left(\gamma_{12}(h)\right)^2 \leq \gamma_{11}(h)\gamma_{22}(h)$$

Cette condition est nécessaire avec  $p$  variables.

Avec **deux variables et un modèle intrinsèque** (i.e. tous les variogrammes et variogrammes croisés sont proportionnels entre eux) de corégionalisation, elle est **nécessaire et suffisante**.

## 4. Modèles admissibles

### a) Cas de deux variables :

Condition de Cauchy-Schwartz sur les covariogrammes croisés :

Utilisant la relation suivante entre variogrammes et covariogrammes :

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2}(C_{ij}(h) + C_{ij}(-h))$$

On peut définir une condition équivalente pour les covariogrammes.

On notera le cas plus simple où les covariances sont symétriques :

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - C_{ij}(h)$$

qui permet de réécrire la condition de Cauchy-Schwartz :

$$\left(C_{12}(0) - C_{12}(h)\right)^2 \leq (C_{11}(0) - C_{11}(h))(C_{22}(0) - C_{22}(h))$$

où

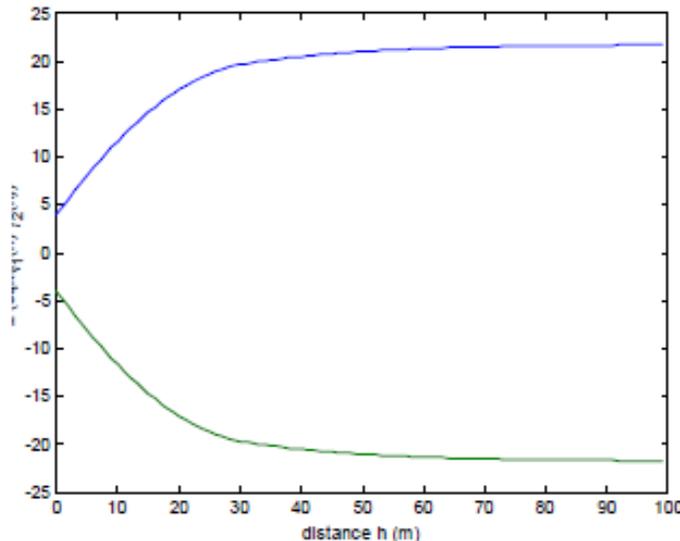
$C_{11}(h)$ ,  $C_{12}(h)$  et  $C_{22}(h)$  soient tous trois des modèles admissibles individuellement.

## 4. Modèles admissibles

### a) Cas de deux variables :

#### Condition de Cauchy-Schwartz

Définis une enveloppe où doit se retrouver  
entièrement le modèle de variogramme croisé



$$|\gamma_{ZY}(h)| \leq \sqrt{\gamma_{ZZ}(h)\gamma_{YY}(h)}$$

Condition **nécessaire**,  
mais **non suffisante** !

Cette condition permet de s'assurer que la  
corrélation est toujours comprise entre -1 et 1.

## 4. Modèles admissibles

### b) Cas de $p$ variables, modèle intrinsèque:

Lorsque tous les covariogrammes simples et croisés sont proportionnels entre eux, alors on peut écrire

$$[C_{ij}(h)] = B * C(h), \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & \dots & b_{pp} \end{vmatrix}$$

est une matrice  $p \times p$  de coefficients qui doit (la matrice) être positive définie.

Pour vérifier cette condition, il suffit de vérifier que toutes les valeurs propres sont positives (il existe plusieurs autres méthodes également).

Note : Dans ce modèle, les covariances sont nécessairement symétriques.

## 4. Modèles admissibles

### c) Cas de $p$ variables, modèle de corégionalisation linéaire :

Très fréquent

Toutes les covariances et covariances croisées peuvent s'exprimer comme une *combinaison linéaire de quelques structures de base* ( de palier 1, arbitrairement)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{ZZ}(h) & C_{ZY}(h) \\ C_{YZ}(h) & C_{YY}(h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{1,ZZ} & B_{1,ZY} \\ B_{1,YZ} & B_{1,YY} \end{pmatrix} C_1(h) + \begin{pmatrix} B_{2,ZZ} & B_{2,ZY} \\ B_{2,YZ} & B_{2,YY} \end{pmatrix} C_2(h) + \dots \\ &= B_1 C_1(h) + B_2 C_2(h) + \dots + B_n C_n(h) \end{aligned}$$

Les matrices  $B_i$  sont des matrices de coefficients

# 4. Modèles admissibles

## c) Cas de p variables, modèle de corégionalisation linéaire :

1. Si chaque matrice **B est positive semi-définie** (c.-à-d. avec 2 variables  $\det(B) \geq 0$ ) alors le modèle est admissible.
2. Si l'une des matrices n'est pas positive semi-définie, alors on ne peut rien dire sur l'admissibilité du modèle.
3. Si la matrice B associée à l'effet de pépite n'est pas positive semi-définie, on est certain que le modèle est non admissible.

**Note :** lorsque toutes les matrices B **sont proportionnelles**, on peut réécrire le modèle linéaire de corégionalisation comme:

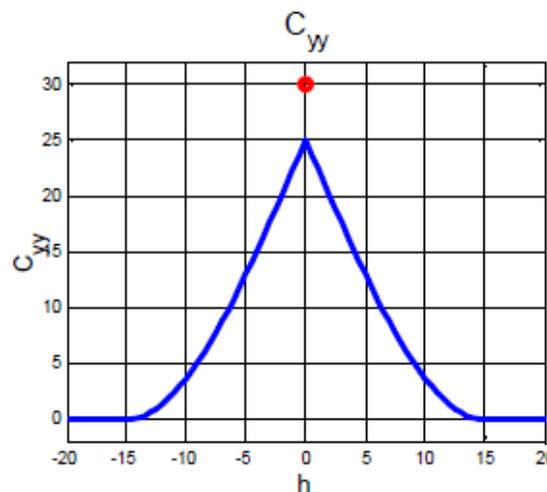
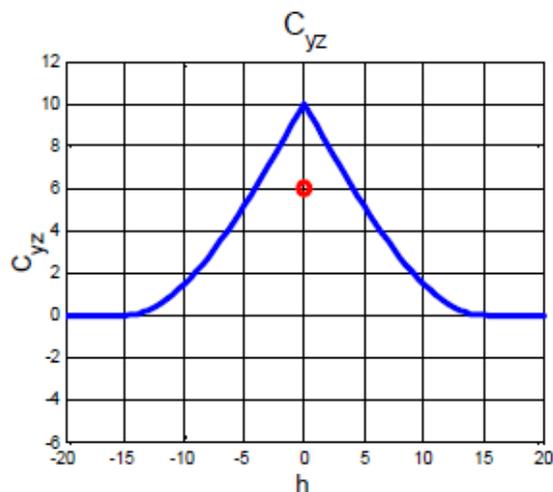
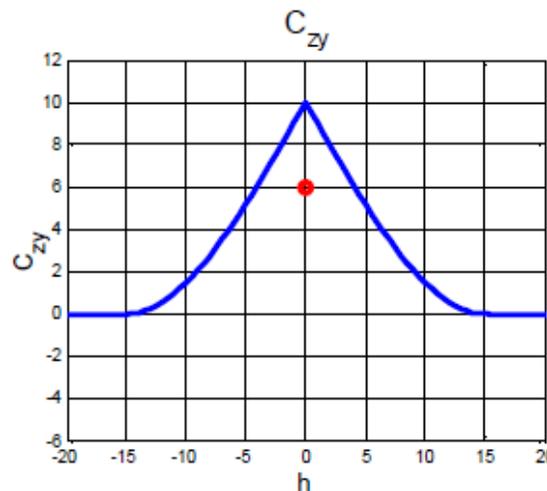
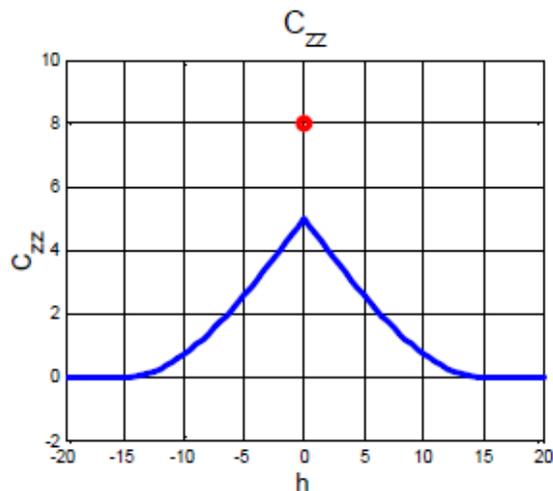
$$\begin{pmatrix} C_{ZZ}(h) & C_{ZY}(h) \\ C_{YZ}(h) & C_{YY}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{ZZ} & B_{ZY} \\ B_{YZ} & B_{YY} \end{pmatrix} C(h) = BC(h)$$

Ce modèle est admissible **si et seulement si** B est positive semi-

# 4. Modèles admissibles

## c) Modèle de corégionalisation linéaire :

Exemples :



Effet de pépite

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \delta(h)$$

Modèle sphérique :

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} \text{sphérique } (a = 15, C = 1)$$

Admissibilité :

$$\det(\delta(h)) = 15 - 16 = -1 \neq 0$$

$$\det(\text{sph}(h)) = 125 - 100 = 25$$

## 4. Modèles admissibles

### d) Cas de $p$ variables, cas général.

On doit évaluer la transformée de Fourier de chaque covariogramme (simple et croisé). Dans le domaine de Fourier  $c_{ij}(w)$ . Ensuite, pour chaque «  $w$  », on doit vérifier que la matrice  $[c_{ij}(w)]$  est positive définie pour tout «  $w$  ».

En pratique on n'utilise pas cet algorithme normalement.



## 4. Modèles admissibles

### e) Variables avec relations déterministes.

Parfois le cokrigeage implique **des variables liées par des équations déterministes** (ex. une propriété et sa dérivée selon une direction donnée, une équation différentielle liant des variables, un champ de potentiel, etc.).

Lorsque l'on peut déduire à partir d'une variable quel est le modèle de covariogramme croisé et le modèle de covariogramme simple de l'autre variable, alors on est **assuré que le modèle est admissible**.

Malheureusement, la dérivation de ces fonctions de covariance est souvent très difficile à réaliser au plan mathématique. De plus, souvent les variables liées n'ont pas le même niveau de stationnarité, ce qui complique l'estimation.

## 4. Modèles admissibles

### e) Variables avec relations déterministes.

**Modèle découlant de relations physiques ou mathématique entre  $Z$  et  $Y$ .**

Si on connaît  $C_{ZZ}$ , on peut déduire  $C_{ZY}$  et  $C_{YY}$

Exemple 1D :  $Y(x)$  est la dérivée de  $Z(x)$

$$Y(x) = \frac{dZ(x)}{dx}$$

$$C_{ZY} = \text{Cov}(Z(x), Y(x+h)) = \frac{d}{dh} [\text{Cov}(Z(x), Z(x+h))] = \frac{dC_{ZZ}}{dh}$$

$$C_{YY} = \text{Cov}(Y(x), Y(x+h)) = -\frac{d^2}{dh^2} [\text{Cov}(Z(x), Z(x+h))] = -\frac{d^2 C_{ZZ}}{dh^2}$$

$$C_{YZ} = -C_{ZY}$$

# 4. Modèles admissibles

## En résumé

Type de modèle	Description	Condition à vérifier	
		2 variables	p variables
Intrinsèque	Tous les variogrammes sont proportionnels à une structure unique	Cauchy-Schwartz (N+S)	Cauchy-Schwartz (N)
Linéaire	Chaque variogramme s'exprime comme une combinaison de modèles de base	Matrices des coefficients positive définie (N+S)	Matrices des coefficients positive définie (N+S)
Quelconque	Par ajustement séparé sur chacune des covariances ou chacun des variogrammes	Spectres directs et spectre croisé forment une matrice positive définie à chaque fréquence (N+S)	Spectres directs et spectre croisé forment une matrice positive définie à chaque fréquence (N+S)
Déterministe	Modèle ajusté pour une des variables et modèles déduits des relations déterministes pour les autres	Aucune (OK par construction)	Aucune (OK par construction)

Note: N: nécessaire, S: suffisant.

# 4. Modèles admissibles

## Programme informatique : TASC3D

Dans TASC3D, la stratégie suivante est suivie :

1. La condition CS est vérifiée en premier. Si elle n'est pas respectée, le modèle n'est pas admissible.
2. La matrice d'effet pépité est vérifiée pour la définition positive. Si elle n'est pas définie positive, le modèle n'est pas admissible.
3. L'utilisateur spécifie les fréquences où le test d'admissibilité est effectué.
4. Toutes les plages sont normalisées à la plage maximale globale trouvée sur toutes les composantes de toutes les paires de variables.
5. La plus petite valeur propre de toute la matrice spectrale est considérée comme négative uniquement lorsque  $\lambda_{min} < -10^{-9}$ . Dès qu'une valeur propre négative est trouvée, le modèle est identifié comme non admissible.

Table 1. 3D spectral densities of some common unit sill covariance functions (note:

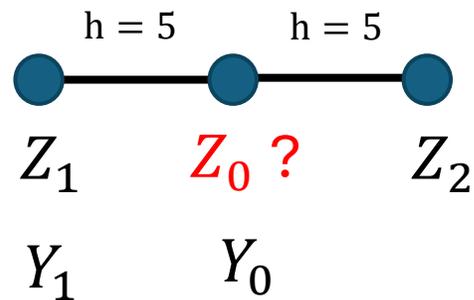
$a_g^3 = a_x a_y a_z$ ;  $h_\alpha = \sqrt{(h_x/a_x)^2 + (h_y/a_y)^2 + (h_z/a_z)^2}$ ;  $s_\alpha = \sqrt{a_x^2 s_x^2 + a_y^2 s_y^2 + a_z^2 s_z^2}$  and  $I(h_\alpha) = 1$  when  $h_\alpha < 1$  and 0 otherwise).

Covariance	Definition $C_a(h)$	3D radial spectral density $f(s_\alpha)$
Exponential	$e^{-h_\alpha}$	$\frac{a_g^3}{\pi^2(1+s_\alpha^2)^2}$
Gaussian	$e^{-h_\alpha^2}$	$\frac{a_g^3}{8\pi^{3/2}} e^{-(1/4)s_\alpha^2}$
Spherical	$(1 - 1.5h_\alpha + 0.5h_\alpha^3) I(h_\alpha)$	$\frac{3a_g^3}{4\pi s_\alpha^3} J_{3/2}^2(s_\alpha/2)$
Cubic	$(1 - 7h_\alpha^2 + \frac{35}{4}h_\alpha^3 - \frac{7}{2}h_\alpha^5 + \frac{3}{4}h_\alpha^7) I(h_\alpha)$	$\frac{210a_g^3}{\pi^2 s_\alpha^{10}} (6s_\alpha \cos(s_\alpha/2) + (s_\alpha^2 - 12) \sin(s_\alpha/2))^2$
Penta	$(1 - \frac{22}{3}h_\alpha^2 + 33h_\alpha^4 - \frac{77}{2}h_\alpha^5 + \frac{33}{2}h_\alpha^7 - \frac{11}{2}h_\alpha^9 + \frac{5}{6}h_\alpha^{11}) I(h_\alpha)$	$\frac{27720a_g^3}{\pi^2 s_\alpha^{14}} ((s_\alpha^3 - 60s_\alpha) \cos(s_\alpha/2) + (120 - 12s_\alpha^2) \sin(s_\alpha/2))^2$
Cauchy	$(1 + h_\alpha^2)^{-\alpha}$ with $\alpha > 1/2$  note: with $0 < \alpha \leq 1/2$ the spectral density could not be computed	$\frac{a_g^3 s_\alpha^{\alpha-3/2}}{\pi^{3/2} 2^{\alpha+1/2}} K_{3/2-\alpha}(s_\alpha)$
K-Bessel (Matern)	$\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} h_\alpha^\nu K_\nu(h_\alpha)$ with $\nu \geq 0$	$\frac{a_g^3 \Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu) \pi^{3/2} (1+s_\alpha^2)^{\nu+3/2}}$

# 4. Modèles admissibles

## Exemple de calcul : Modèle linéaire de corégionalisation

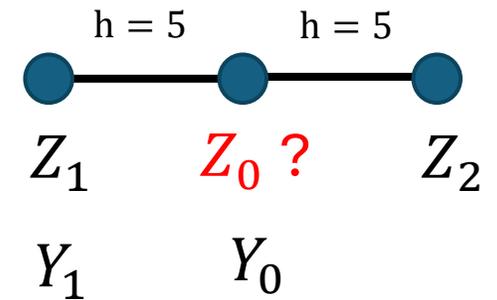
$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$



# 4. Modèles admissibles

## Exemple de calcul : cokrigage simple

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$



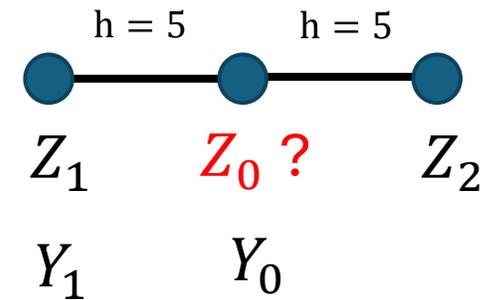
	$Z_1$	$Z_2$	$Y_1$	$Y_0$		$Z_0$
$Z_1$	?	?	?	?	$\begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$	?
$Z_2$	?	?	?	?		?
$Y_1$	?	?	?	?		?
$Y_0$	?	?	?	?		?



# 4. Modèles admissibles

## Exemple de calcul : cokrigage simple

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$

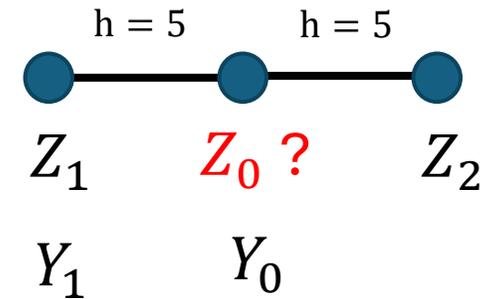


	$Z_1$	$Z_2$	$Y_1$	$Y_0$		$Z_0$
$Z_1$	3	1.04	2.4	1.81	$\begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.50 \\ 1.81 \\ 2.4 \end{bmatrix}$	
$Z_2$	1.04	3	1.24	1.81		
$Y_1$	2.4	1.24	5	3.01		
$Y_0$	1.81	1.81	3.01	5		

# 4. Modèles admissibles

## Exemple de calcul : cokrigage simple

$$\begin{bmatrix} C_{zz}(h) & C_{zy}(h) \\ C_{yz}(h) & C_{yy}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(h) + \begin{bmatrix} 2 & 2.4 \\ 2.4 & 4 \end{bmatrix} \text{Sphérique}(a = 30m, C = 1)$$



$$\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{array} \begin{array}{cc} Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 \\ Y_1 & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 \end{array} \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{array} \begin{bmatrix} \lambda_{1,z} \\ \lambda_{2,z} \\ \lambda_{1,y} \\ \lambda_{0,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5046 \\ 1.5046 \\ 1.8056 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

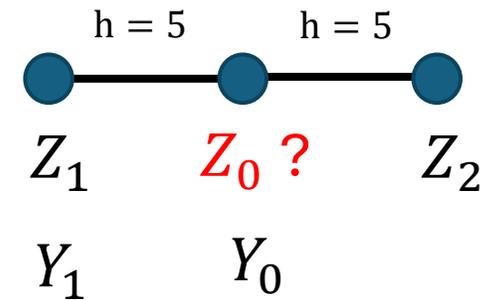
$$\lambda_{1,z} = 0.2294, \lambda_{2,z} = 0.2336, \lambda_{1,y} = \underline{0.0072}, \lambda_{0,y} = \underline{0.3085} \text{ et } \sigma_{ck}^2 = 1.5500$$

Note ) Variance de krigage simple : 1.88

# 4. Modèles admissibles

## Exemple de calcul : cokrigage ordinaire

$$\begin{array}{c}
 Z_1 \\
 Z_2 \\
 Y_1 \\
 Y_0
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Z_1 & Z_2 & Y_1 & Y_0 & 1 & 0 \\
 3 & 1.037 & 2.4 & 1.8056 & 1 & 0 \\
 1.037 & 3 & 1.2444 & 1.8056 & 1 & 0 \\
 2.4 & 1.2444 & 5 & 3.0093 & 0 & 1 \\
 1.8056 & 1.8056 & 3.0093 & 5 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \lambda_{1,z} \\
 \lambda_{2,z} \\
 \lambda_{1,y} \\
 \lambda_{0,y} \\
 \mu_z \\
 \mu_y
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 Z_0 \\
 1.5046 \\
 1.5046 \\
 1.8056 \\
 2.4 \\
 1 \\
 0
 \end{array}$$



$$\lambda_{1,z} = 0.5494, \lambda_{2,z} = 0.4506, \lambda_{1,y} = \underline{-0.1678}, \lambda_{0,y} = \underline{0.1678},$$

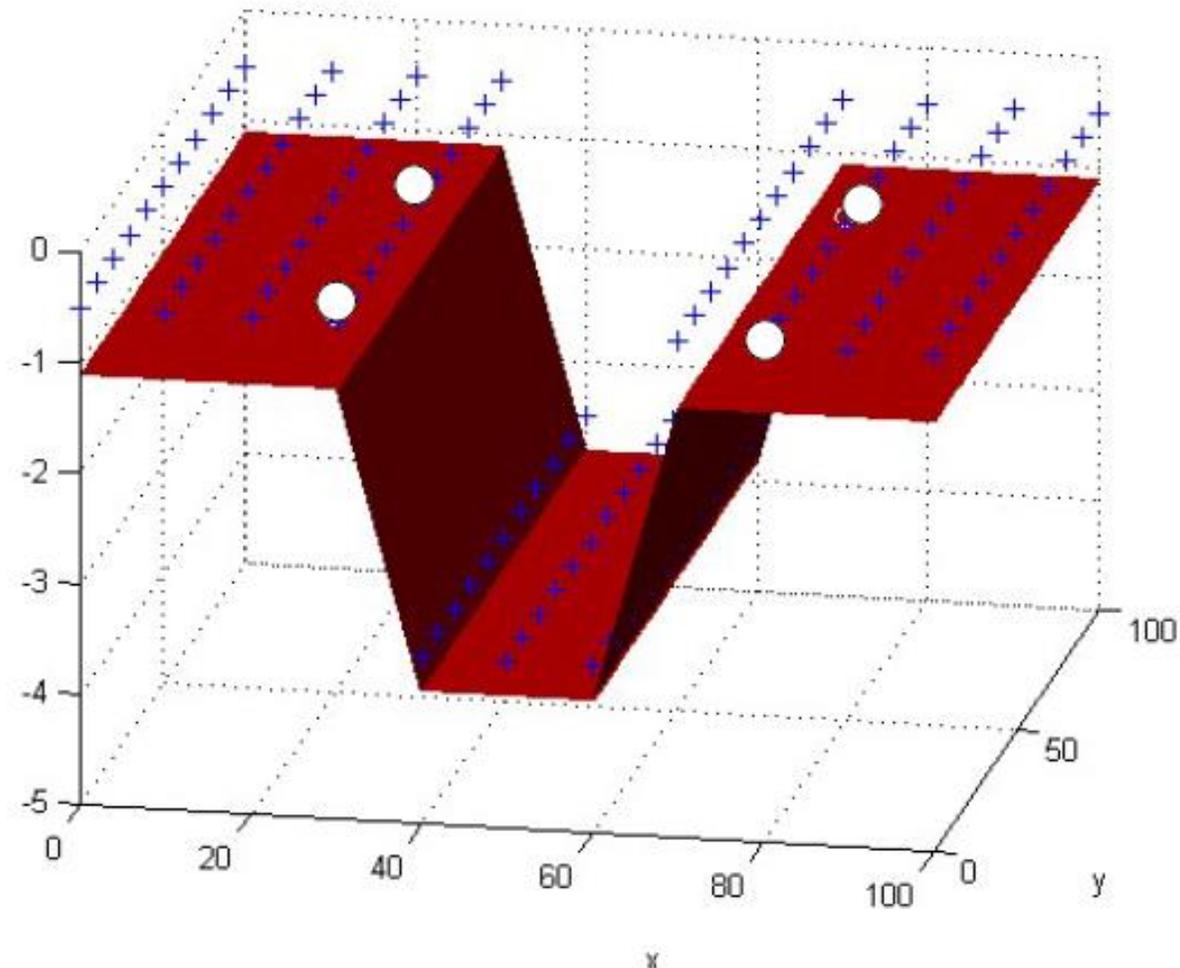
$$\mu_z = -0.5111, \mu_y = 0.2603 \text{ et } \sigma_{ck}^2 = 1.907$$

Note ) Variance de krigage ordinaire : 2.01

# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Géophysique

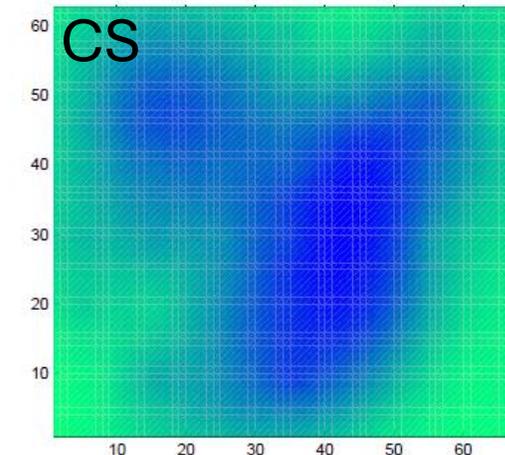
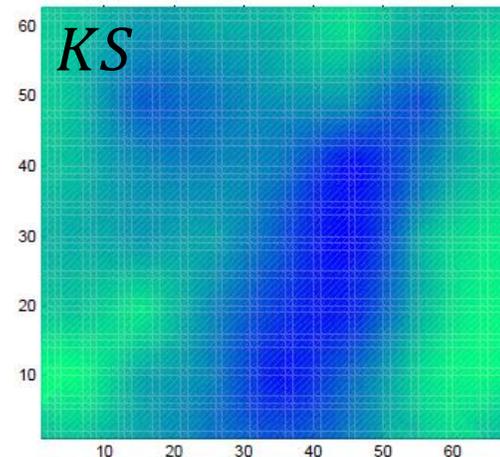
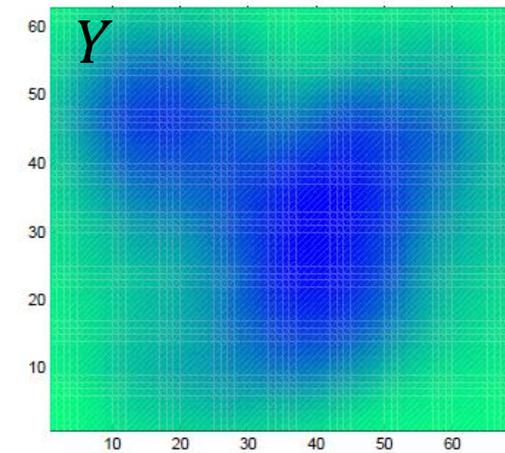
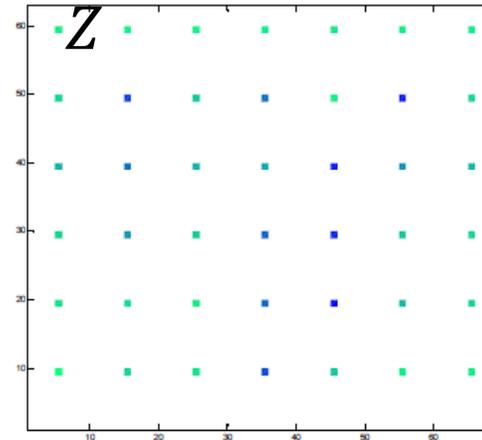
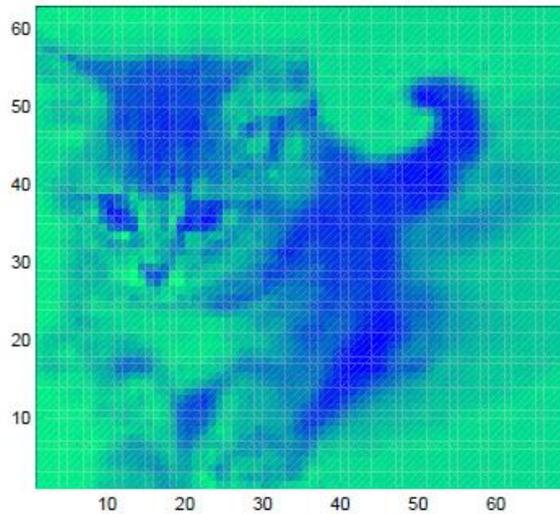
Données d'élévation estimées par géoradar ( $Y$ ) et quelques observations de l'élévation aux forages ( $Z$ )



# 5. Cas où le cokrigeage peut être utile

## Géophysique

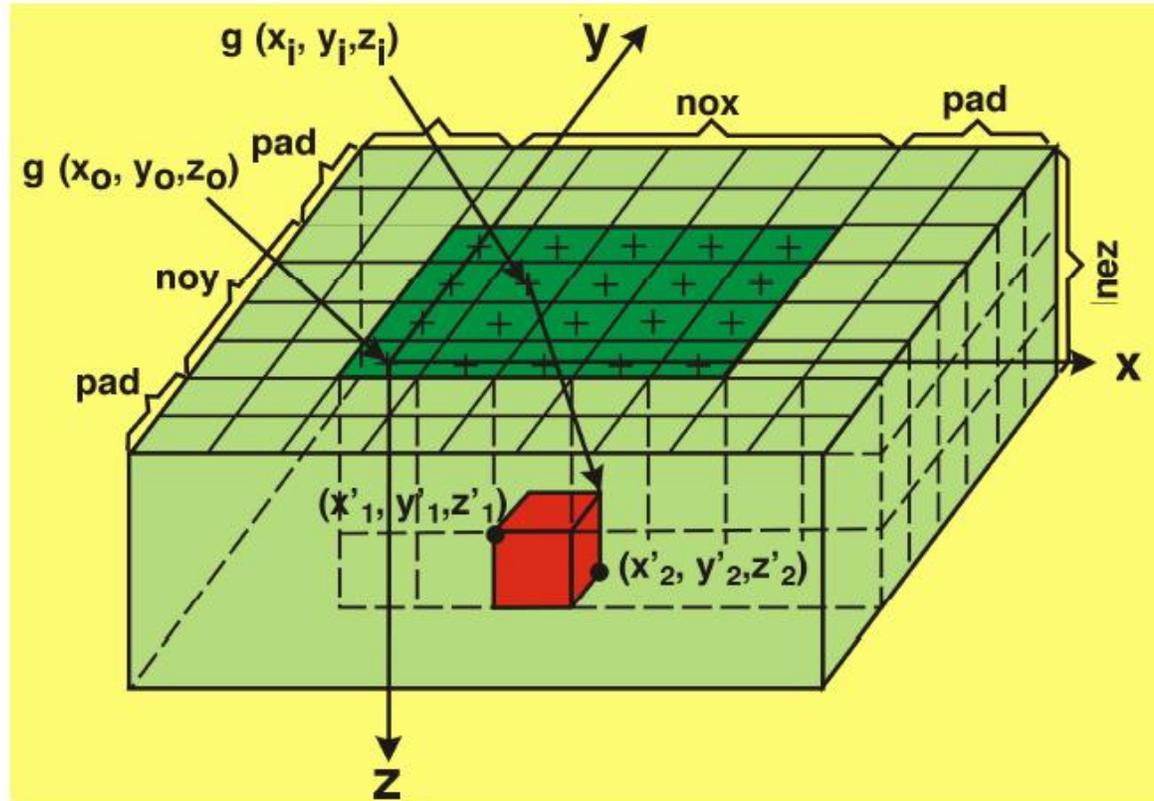
Données régionales lisses estimées par géophysique ( $Y$ ) et quelques observations de la propriété estimée ( $Z$ )



Krigeage :  $MAE = 26.3$  ;  $\rho = 0.73$   
Cokrigeage :  $MAE = 22.1$  ;  $\rho = 0.81$

# 5. Cas où le cokrigeage peut être utile

## Inversion de données gravimétrique



$$\frac{g_i}{\rho_j} = -\gamma \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \mu_{pqs} \left[ x'_p \ln(y'_q + r_{pqs}) + y'_q \ln(x'_p + r_{pqs}) - z'_s \arctan\left(\frac{x'_p y'_q}{z'_s r_{pqs}}\right) \right] \rightarrow g_i = G_{ij} \times \rho_j$$

# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Inversion de données gravimétrique

Sous forme matricielle :

$$g = G\rho$$

$g$  : vecteur des anomalies gravimétriques ( $n \times 1$ )

$G$  : matrice géométrique ( $n \times m$ )

$\rho$  : vecteur des contrastes de densité de blocs ( $m \times 1$ )

On peut déduire les covariances à partir de l'équation ci-haut :

$$C_{gg} = G C_{\rho\rho} G^T$$

$C_{gg}$  : matrice des covariances gravité-gravité ( $n \times n$ )

$C_{\rho\rho}$  : matrice des covariances densité-densité ( $m \times m$ )

$$C_{g\rho} = G C_{\rho\rho}$$

$C_{g\rho}$  : matrice des covariances gravité-densité ( $n \times m$ )

$G$  : matrice géométrique ( $n \times m$ )

# 5. Cas où le cokrigeage peut être utile

## Inversion de données gravimétrique

Lorsque l'on résout le système de cokrigeage, on obtient

$$\rho^* = \Lambda' g$$

$$\Lambda = C_{gg}^{-1} C_{g\rho}$$

$\Lambda$  : matrice contenant les poids de cokrigeage (n x m)

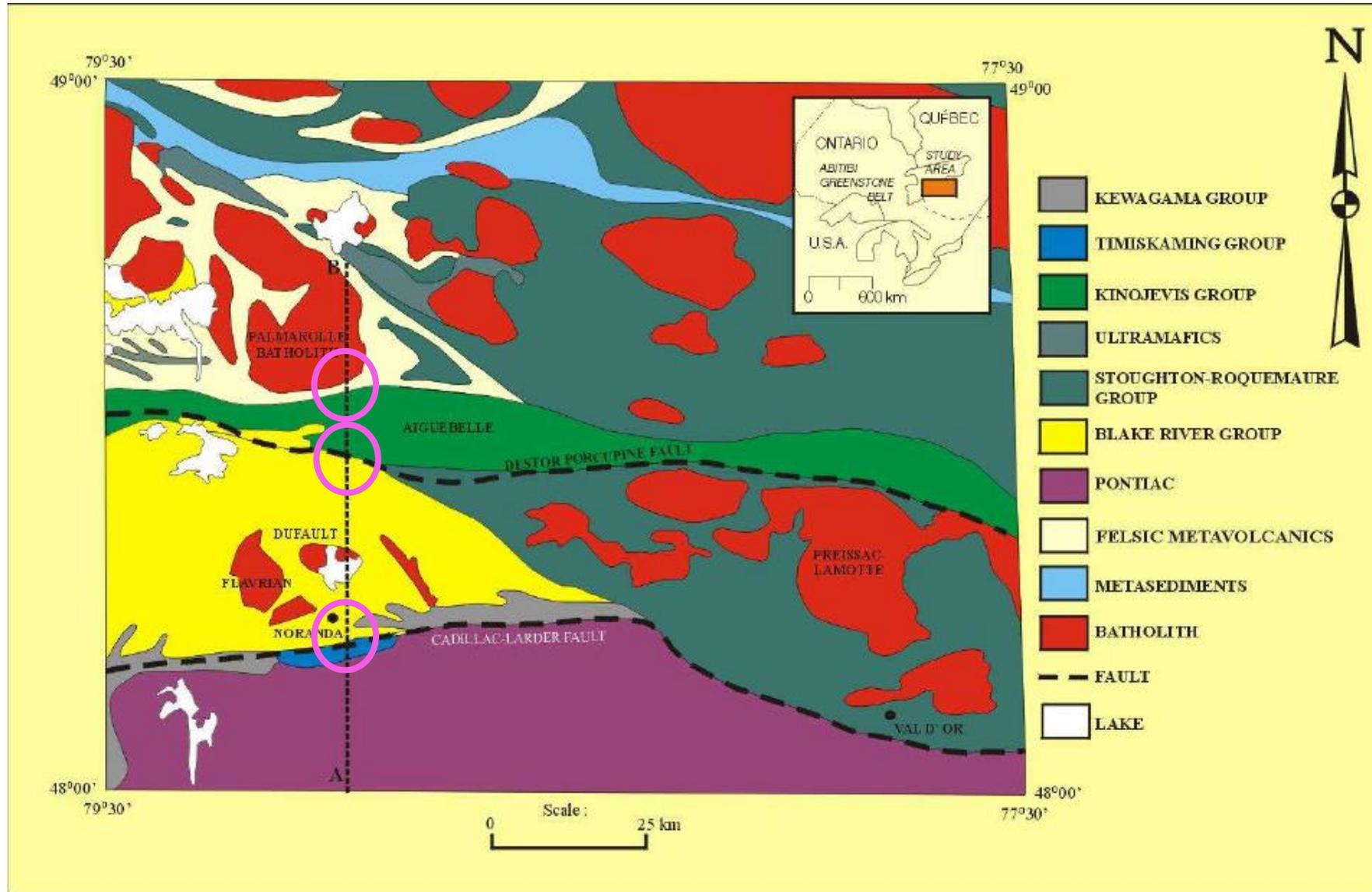
Reproduis exactement l'anomalie gravimétrique observée :

$$g^* = G\rho^* = G\Lambda'g = GC_{\rho\rho}G'(GC_{\rho\rho}G')^{-1}g = g$$

Vrai, s'il n'y a pas d'effet de pépité

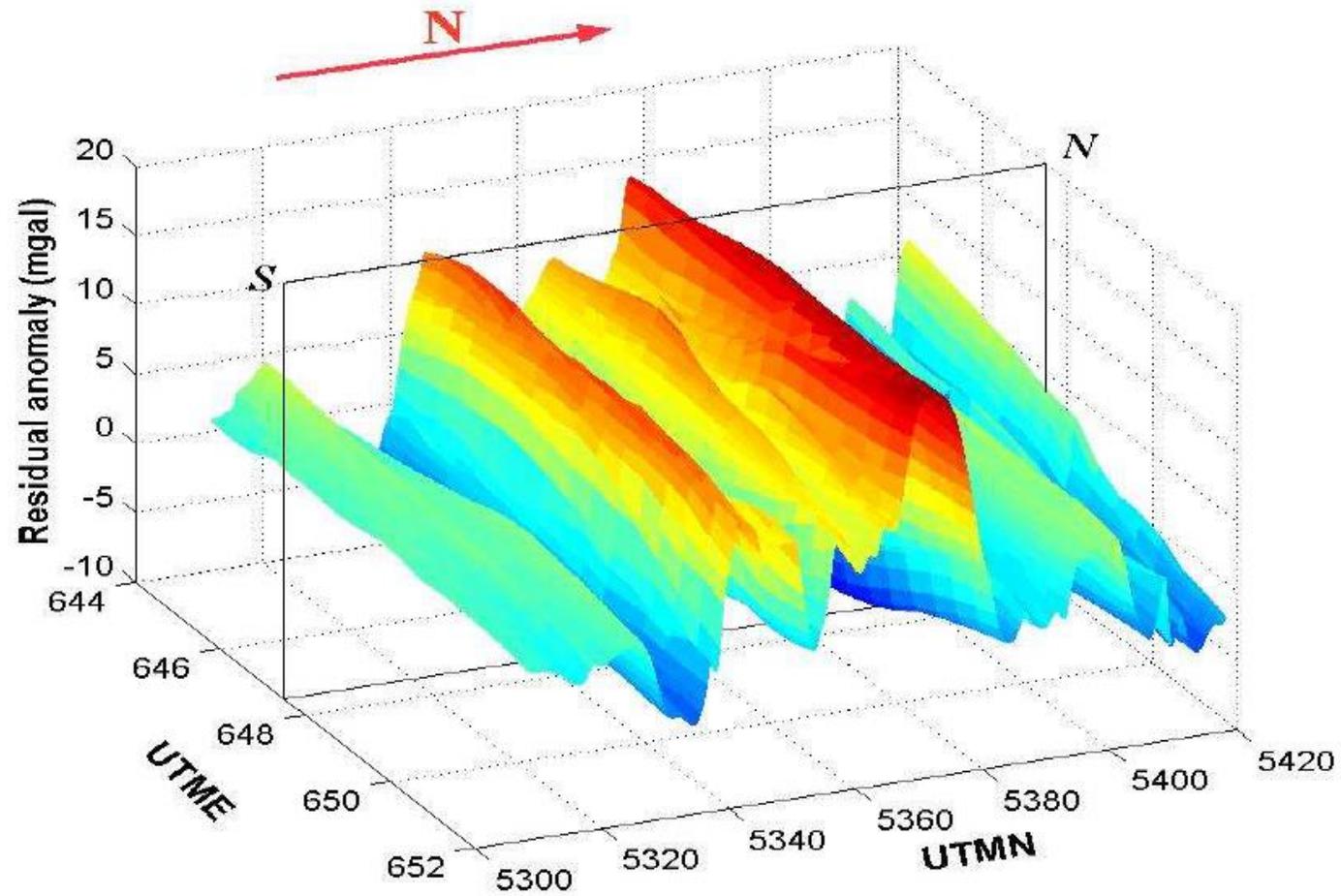
# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Inversion de données gravimétriques



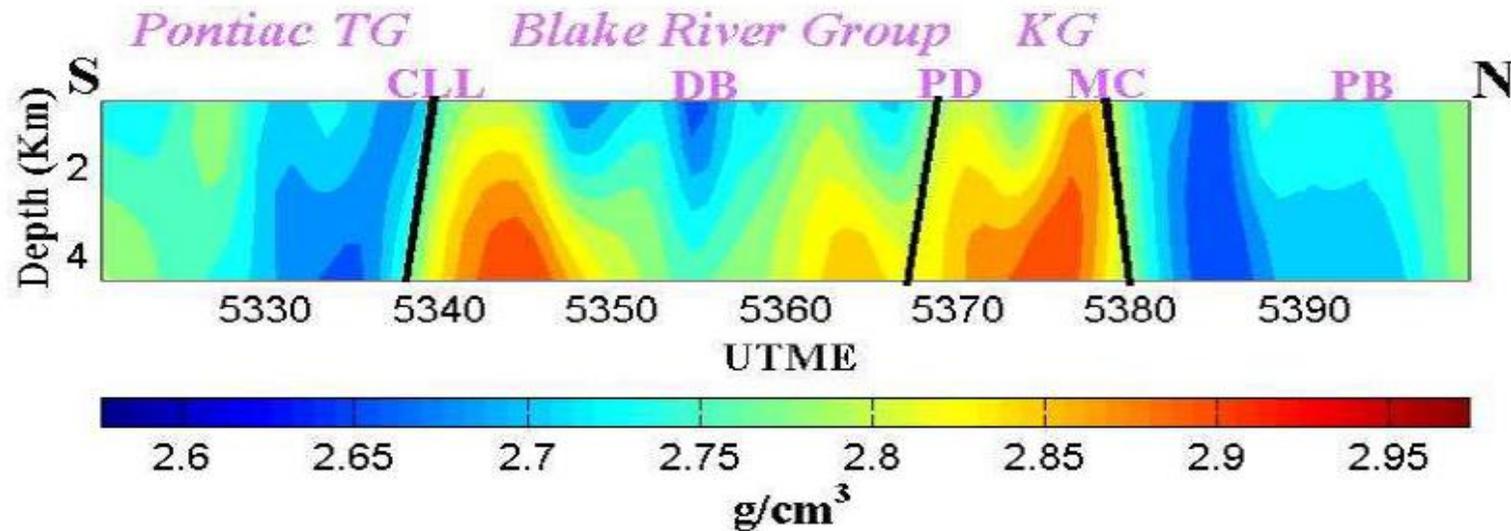
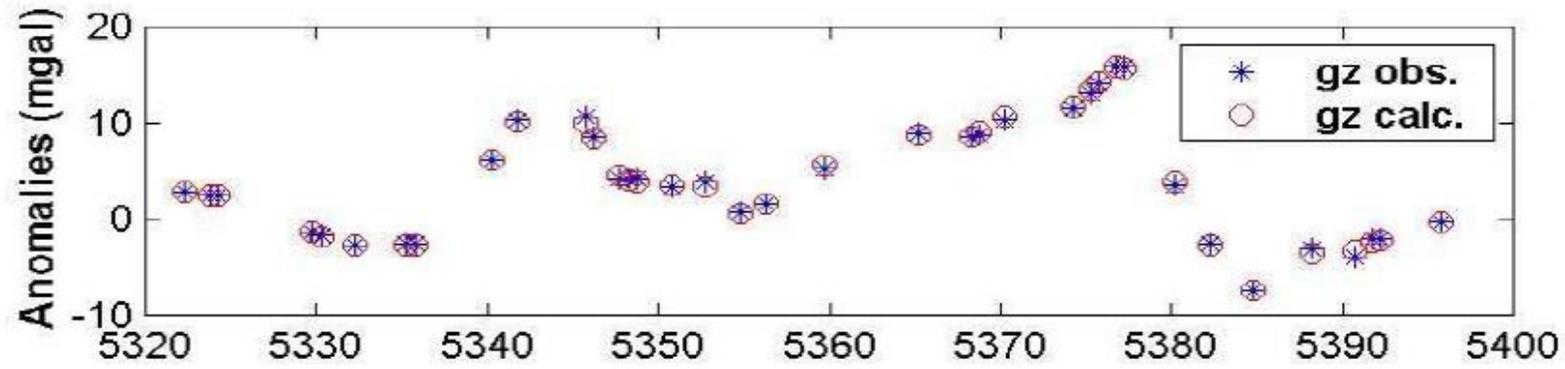
# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Inversion de données gravimétrique



# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Inversion de données gravimétrique







# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Hydrogéologie

Utilisation de points doublons : forcer localement une direction d'écoulement

- En forçant des valeurs égales de charge sur des points rapprochés (sans spécifier les charges, juste dire qu'elles sont égales), on force l'écoulement perpendiculairement au segment liant les deux points.
- On peut voir le doublon comme une variable auxiliaire et le traiter en cokrigage.
- Il suffit de connaître la covariance des charges pour déduire la covariance simple des doublons et la covariance croisée charge-doublon (modèle déterministe)

# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Hydrogéologie : deux domaines

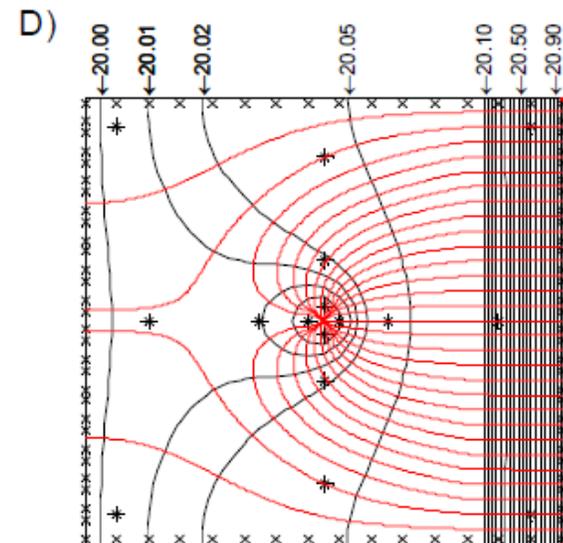
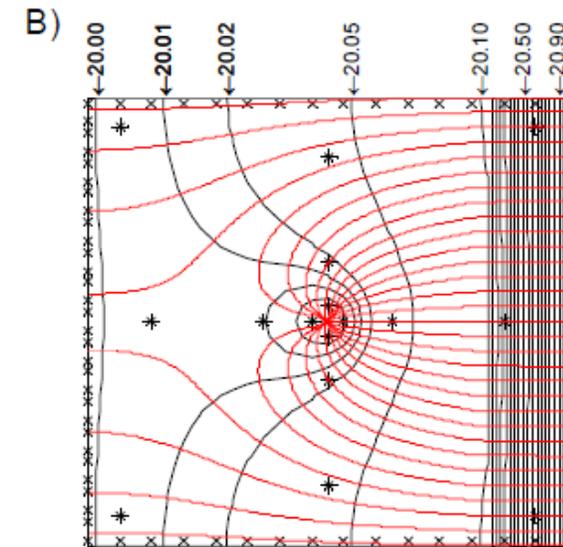
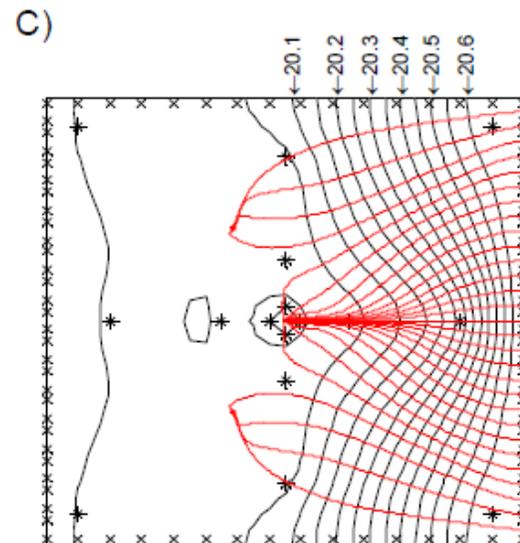
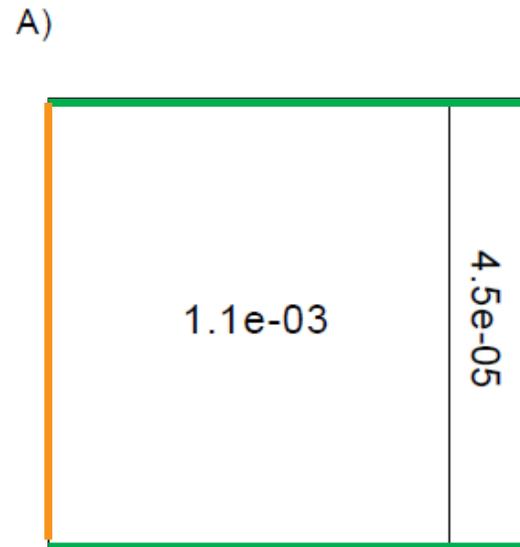
### A) Modèle géologique

- Vert : frontières imperméables
- Orange : Charges constantes

### B) Solution par éléments finis

### C) Solution cokrigage sans doublons et sans informations sur le domaine

### D) Solution cokrigage avec doublons et les informations sur le domaine



# 5. Cas où le cokrigage peut être utile

## Hydrogéologie : pompage

### Modèle géologique

- Vert : frontières imperméables
- A et C : sans pompage
- B et D : avec pompage
- A et B : sans doublons
- C et D : avec doublons

### Problématique

- Frontières imperméables mal représentées
- Une source n'est même pas alimentée par le réseau
- La source est approvisionnée lorsque le pompage n'est pas actif.

