DIFFÉRENTES TECHNIQUES GÉOMÉTRIQUES UTILES

0- Quelques rappels

L'angle d'inclinaison d'un plan par rapport au plan horizontal est le pendage. L'inclinaison d'une droite par rapport au plan horizontal est la plongée. Les deux sont mesurés en angles positifs ($\leq 90^o$) vers le bas. Cependant les coordonnées cartésiennes sont repérées dans un système main droite, i.e. x croît vers l'est, y vers le nord et z vers le haut.

Un plan est défini par sa **direction** et son **pendage**. La direction est donnée en **azimut** (sens horaire à partit du nord de 0-360^o) et correspond à l'angle que fait une droite horizontale du plan avec le nord. Le pendage est donné par un angle positif vers le bas. La direction du **vecteur pendage** est celle du plan+90^o. La plongée du vecteur pendage est le pendage du plan. Le pôle du plan (normale au plan) a la même direction que le vecteur pendage et une plongée inférieure de 90^o.

Une droite peut être définie par un vecteur unitaire en coordonnées cartésiennes. Un plan peut être défini par son pôle. Les coordonnées cartésiennes d'un vecteur d'azimut α et de plongée γ sont :

$$a=\cos(\gamma)\sin(\alpha)$$
$$b=\cos(\gamma)\cos(\alpha)$$
$$c=-\sin(\gamma)$$

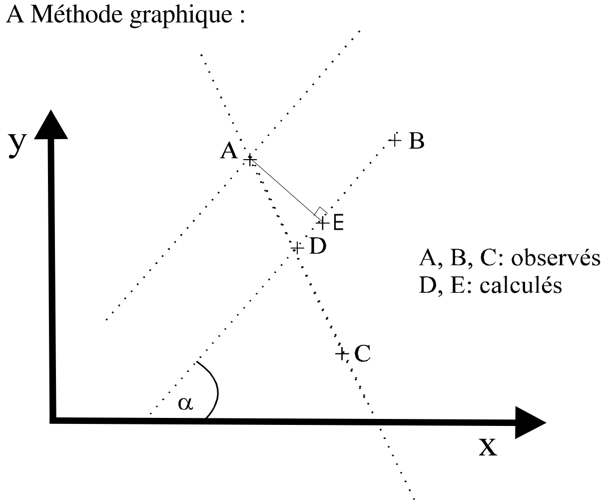
Un plan d'azimut α * et de plongée γ * a un pôle de direction $\alpha = \alpha^* + 90^o$ et de plongée $\gamma = \gamma^* - 90^o$.

L'équation cartésienne d'un plan est donnée par ax+by+cz+d=0, où a, b et c sont les cosinus directeurs de la normale au plan (i.e. pôle du plan) et d= - ($ax_0+by_0+cz_0$) et (x_0, y_0, z_0) est un point quelconque du plan.

Une droite peut être vue comme l'intersection de deux plans. Comme la droite est orthogonale aux pôles des deux plans, elle peut être obtenue par produit vectoriel des deux pôles en coordonnées cartésiennes (i.e. u= (a_1, b_1, c_1) x (a_2, b_2, c_2)). Rappel : le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs dont les composantes sont : $(b_1c_2 - c_1b_2,\ c_1a_2 - a_1c_2,\ a_1b_2 - b_1a_2)$.

1- Détermination de la direction et du pendage d'un plan à partir de trois points quelconques du plan.

A Méthode graphique :



Soit:

	x	y	z
A	300	2000	1000
B	600	2200	800
C	400	1400	600

a) On détermine par interpolation linéaire sur AC, les coordonnées x et y du point D tel que $z_D=z_B=800$.

$$x_D = x_A + \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right)(x_C - x_A)$$

$$y_D = y_A + \left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right)(y_C - y_A)$$

Ici, on obtient: $x_D = 350$; $y_D = 1700$

b) La direction (trigonométrique (i.e. anti-horaire par rapport à x) est donnée par l'angle BDx.

$$\alpha = arctan\left(\frac{(y_B - y_D)}{(x_B - x_D)}\right)$$

Ici, on obtient: $\alpha = \arctan(500/250) = 63.4^0$

c) On effectue une rotation du système d'axes d'un angle α de façon à rendre les axes parallèles à la direction du plan.

La rotation est effectuée par:

$$(x_r, y_r) = (x, y)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ici, on obtient:

$$\begin{array}{l} point\ A \\ point\ B \\ point\ D \end{array}\begin{pmatrix} 300 & 2000 \\ 600 & 2200 \\ 350 & 1700 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .448 & -.894 \\ .894 & .448 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1922.6 & 627.3 \\ 2235.8 & 448.6 \\ 1676.8 & 448.2 \end{pmatrix}$$

Le pendage est alors donné par: $\arctan[(z_A-z_B)/(y_{rA}-y_{rB})]$

i.e. $\arctan[200/(627.3-448.2)] = 48.2^0$

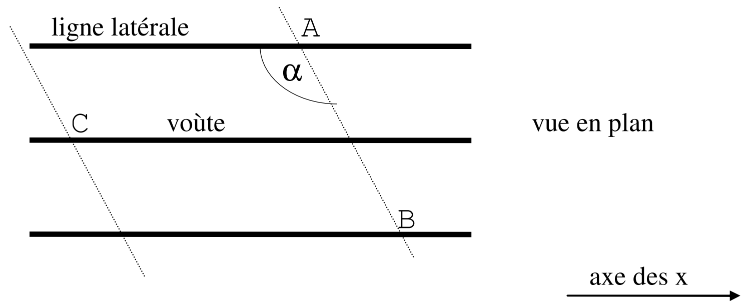
Autre approche:

a) Trouver l'angle α entre la droite BD et l'axe x tel que précédemment, trouver également le point d'intersection avec l'axe x (x_{BD}).
b) Trouver l'angle β entre la droite AC et l'axe x et trouver également le point d'intersection de AC avec l'axe x (x_{AC}).
c) Trouver l'angle γ opposé au segment AE (perpendiculaire À BD à partir du point A. Cet angle est β-α lorsque $x_{BD}<x_{AC}$ et α-β lorsque $x_{BD}>x_{AC}$.
d) Calculer $\|AE\|=\|AD\|*\sin(\gamma)$
e) Calculer le pendage $\varphi=\arctan(|z_B-z_A|/\|AE\|)$

Ex. Pour le cas précédent, on a trouvé $\alpha=63.4^o$. Le point d'intersection x_{BD} est: -501.67.
L'angle β est 99.46^o, le point d'intersection x_{AC} est 333.33.
L'angle γ vaut donc $99.46-63.4=36.06^o$
$\|AD\|=304.14$ $\|AE\|=179.03$
Le pendage vaut $\arctan(200/179.03)= 48.2^o$

On peut aussi simplement mesurer directement la longueur du segment AE et le pendage est obtenu alors en prenant $\arctan(200/\|AE\|)$.

2. Méthode des trois points dans le cas particulier d'un tunnel circulaire ou les points sont relevés aux lignes latérales et à la voûte.

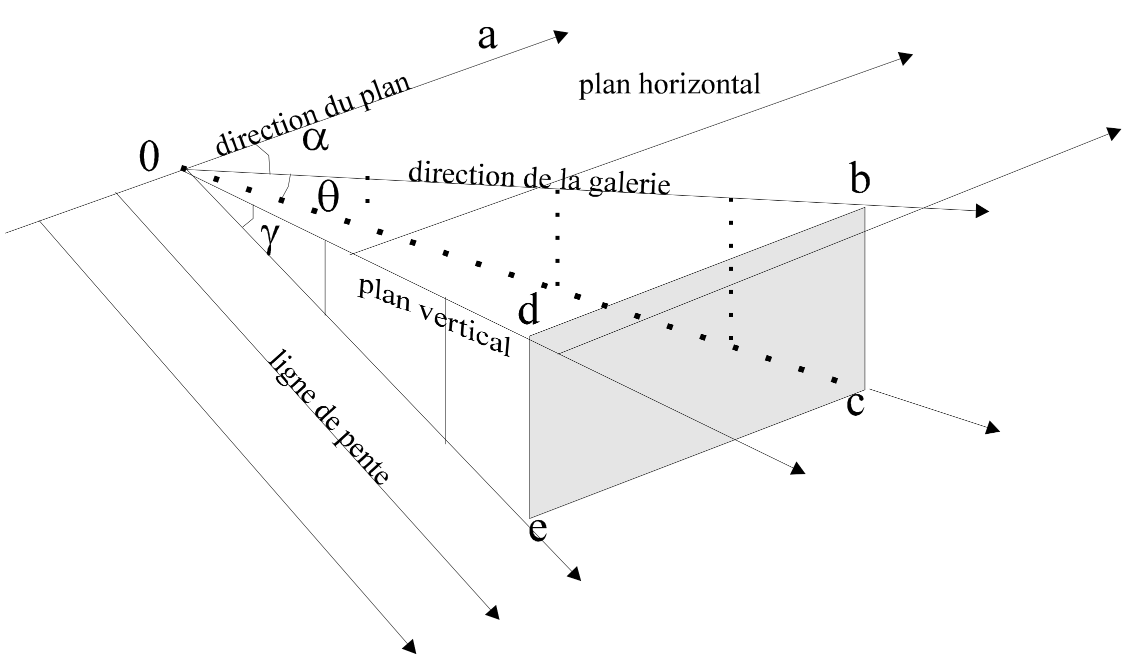


a) L'étape a) ci-haut est inutile, les points sur les lignes latérales étant au même niveau.

b) Les étapes b) et c) sont identiques.

---

3. Conversion pendage apparent - pendage vrai (pour un plan).



Soit α: angle entre la direction du plan et la direction de la galerie.
θ: pendage apparent mesuré sur le mur de la galerie.
γ: pendage vrai du plan.

Avec, $0 \leq \alpha,\theta,\gamma \leq 90$

Selon le schéma ci-haut, on a:

θ = arctan(bc/ob)
γ = arctan(de/od)
bc= de
od= sin(α) ob

Utilisant ces relations, on trouve:

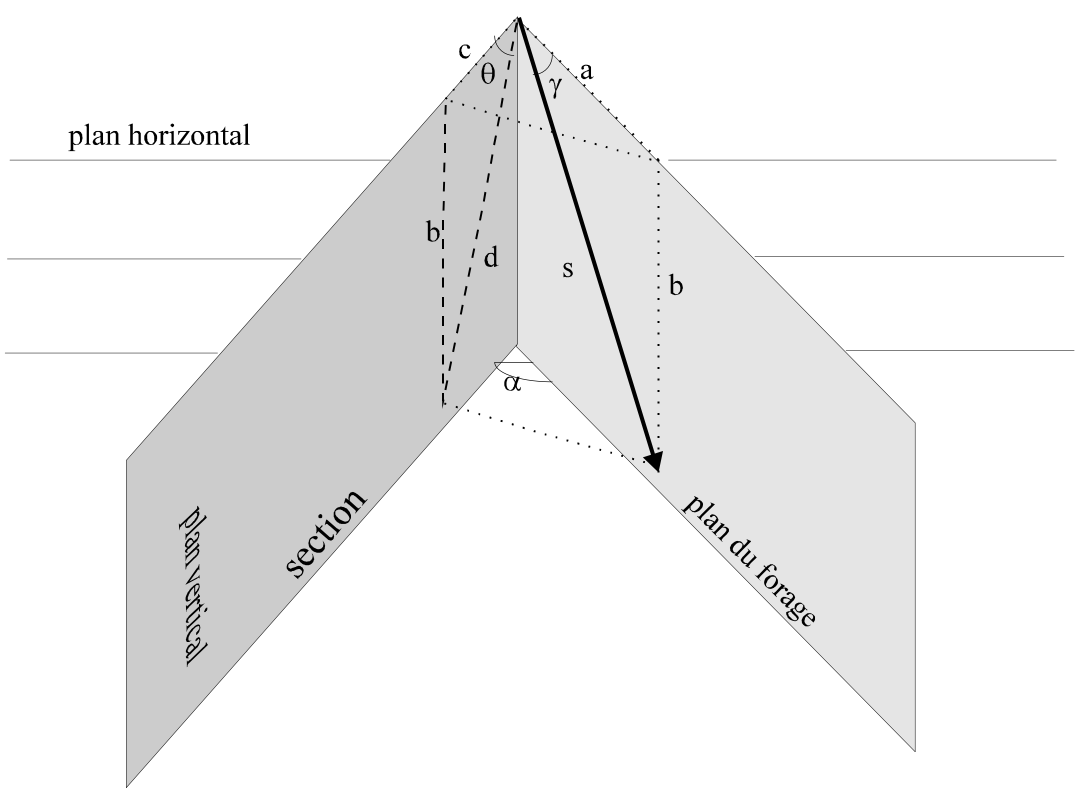
$$tan(\theta) = tan(\gamma)\ sin(\alpha)$$

d'où finalement

$$\theta = arctan\left(tan(\gamma)\ sin(\alpha)\right)$$

$$\gamma = arctan\left(\frac{tan(\theta)}{sin(\alpha)}\right)$$

4. Tracé d'un forage en plan et en section verticale



Soit α: angle entre la direction du forage et le plan de la section verticale.
θ: inclinaison du forage dans la section verticale (inclinaison apparente)
γ: inclinaison vraie du forage.

Avec, $0 \le \alpha, \theta, \gamma \le 90$

On a:

α: $\cos(\gamma)$ s
b: $\sin(\gamma)$ s
c: $\cos(\alpha)$ a
d: $(b^2+c^2)^{1/2}$

et $\theta = \arctan(b/c)$

Substituant, on trouve:

$$tan(\theta) = \frac{tan(\gamma)}{cos(\alpha)}$$

d'où

$$\theta = arctan\left(\frac{tan(\gamma)}{cos(\alpha)}\right)$$

et de même,

$$\gamma = arctg(\tan(\theta)\cos(\alpha))$$

5. Conversion épaisseur apparente-épaisseur vraie

5.1 Épaisseur apparente mesurée sur un mur vertical (e.g. galerie de mine)

On mesure l'épaisseur apparente d'une veine sur le mur vertical d'une galerie. L'épaisseur est mesurée perpendiculairement aux épontes. Sachant la direction et le pendage de la veine et sachant la direction de la galerie, quelle est l'épaisseur vraie de la veine?

Soit α: angle entre la direction de la veine et la direction de la galerie.
θ: pendage apparent de la veine mesuré sur le mur de la galerie.
γ: pendage vrai de la veine.
d_a: épaisseur apparente.
d_v: épaisseur vraie.

On a les relations suivantes:

$$d_v = \frac{d_a \sin(\gamma) \sin(\alpha)}{\sin(\theta)} \qquad 0 < \theta \le 90$$

$$d_v = d_a \cos(\gamma) \qquad \text{si } \theta = 0$$

et bien sûr,

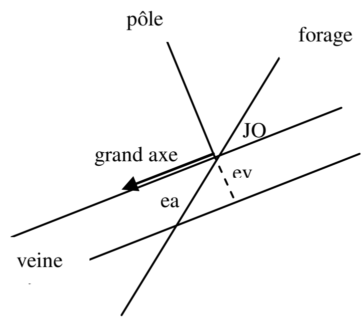
$$d_a = \frac{d_v \sin(\theta)}{\sin(\gamma)\sin(\alpha)} \qquad 0 < \gamma, \alpha \leq 90$$

$$d_a = \frac{d_v}{\cos(\gamma)} \qquad \text{si } \alpha = 0$$

$$d_a = d_v \qquad \text{si } \gamma = 0$$

5.2 Épaisseur apparente mesurée le long d'un forage

Par construction, le grand axe de l'ellipse, le forage et le pôle du plan sont dans un même plan vertical orthogonal au petit axe de l'ellipse. Si l'on représente le plan pôle-forage-grand axe, on voit :



d'où on déduit que $e_v=e_a*\sin(JO)$, une formule remarquablement simple.

6- Détermination de la direction et inclinaison de la droite d'intersection de 2 plans.

1ère méthode : ce problème peut être solutionné facilement avec l'aide du stéréonet.

2e méthode : par les méthodes d'algèbre linéaire (e.g. déterminer l'équation paramétrique de la droite et en déduire le vecteur directeur; autre façon : faire le produit vectoriel des vecteurs pôles).

7- Détermination de l'attitude d'un plan à partir d'une carotte orientée

Ce problème est solutionné à l'aide du stéréonet. On dispose d'un plan de référence qui est le plan vertical contenant le forage. La trace du plan recherché avec le forage est une ellipse. On mesure, dans le plan perpendiculaire à l'axe du forage, l'angle (sens horaire) entre le point bas de l'ellipse et le point bas du forage et l'angle entre la normale à l'ellipse et l'axe du forage. La procédure pour trouver la direction et le pendage du plan implique : 1- rotation pour rendre le forage vertical, 2- positionner la normale à l'ellipse , 3- faire la rotation inverse pour rendre le forage à sa position originale.

Le détail de la procédure peut être trouvé dans :

S.D. Priest , 1985, Hémispherical projection methods in rock mechanics, George Allen et Unwin (ed), Londres, 124 p. (p. 36)

8- Détermination de l'attitude d'un plan à partir de deux forages non-parallèles (carottes non-orientées)

Dans ce cas, on ne dispose que des angles entre la normale à l'ellipse et l'axe du forage pour chaque forage. L'angle que fait la normale à l'ellipse avec l'axe du forage définit un cône. On peut tracer sur stéréonet la trace des deux cônes associé à chaque forage. On peut alors obtenir de 1 à 4 points d'intersection entre ces traces, le cas le plus courant étant 2 intersections. Ces points d'intersection donnent les normales possibles au plan recherché. On détermine la bonne intersection en calculant le pendage apparent du plan dans un plan vertical joignant les deux points dans les forages où l'on a rencontré le plan. Ce pendage apparent est comparé au pendage apparent que l'on aurait pour chacun des plans possibles obtenus sur stéréonet (1-4 intersections).

Pour plus de détails, voir :

S.D. Priest , 1985, Hémispherical projection methods in rock mechanics, George Allen et Unwin (ed), Londres, 124 p. (chap.4)
et
D. M. Ragan, 1973, Structural geology, an introduction to geometrical techniques, 2nd edition, Wiley, 222 p. (chap. 14)

9- Détermination de l'attitude d'un plan à partir de 3 forages non-parallèles

Il suffit de tracer sur stéréonet la trace des 3 cônes associés à chaque forage. Le point d'intersection commun aux 3 cônes définit la direction et le pendage de la normale au plan recherché. Voir Priest (1985) et Ragan (1973) pour plus de détails. On peut aussi calculer la position des 3 points d'intersection et utiliser la méthode des 3 points décrite précédemment.