

THÉORIE DE L'ÉCHANTILLONNAGE DES MATIÈRES MORCELÉES (P. GY)	1
1. INTERPRÉTATION DE LA FORMULE DE GY	3
<i>Explication de l'influence des différents paramètres</i>	3
2. EXEMPLES D'APPLICATION DE LA FORMULE DE GY	5
3. PROCÉDURES D'ÉCHANTILLONNAGE MULTISTADES (PLAN D'ÉCHANTILLONNAGE)	6
4. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES	7
5. EXTENSION À LA THÉORIE DE GY	7

Théorie de l'échantillonnage des matières morcelées (P. Gy)

Réf.: P.M. Gy, 1992. Sampling of heterogeneous and dynamic material systems, theories of heterogeneity, sampling and homogenizing. Elsevier, Amsterdam, 653p.

P. Gy est un ingénieur des mines qui s'est penché sur le problème de l'échantillonnage en adoptant un point de vue statistique. Il a développé une formule permettant de prédire la précision relative d'un échantillon pour représenter la teneur d'un lot donné en fonction de la taille des fragments, de la masse de l'échantillon et du lot, et de différents paramètres minéralogiques et granulométriques. Cette formule cependant est valide à la condition que l'échantillon soit un échantillon probabiliste.

Définition : Selon P. Gy, un **échantillon probabiliste** d'un lot donné est un échantillon tel que chaque fragment du lot a une probabilité non-nulle d'être sélectionné. Il est sans-biais si chaque fragment a une probabilité égale d'être sélectionné.

Un exemple d'échantillon non-probabiliste est l'échantillonnage du godet d'une chargeuse-navette. Il est impossible alors d'échantillonner le bas du godet dans lequel se retrouve une plus grande proportion de particules fines (ségrégation).

Soit une certain lot de minerai. Supposons que l'on concasse ce minerai jusqu'à ce que la taille des plus gros fragments soit "d" (en cm). On peut prendre $d=d_{5\%}$ comme taille des plus gros fragments, i.e., la taille du tamis ne retenant que 5% du poids total des fragments. Si on prélève un échantillon de masse M_e (habituellement faible en rapport avec la masse M_L du lot qu'il représente), alors la variance relative (donc sans unités) de l'erreur d'échantillonnage peut s'écrire:

$$s_r^2 = \frac{s^2}{a_L^2} = K l \frac{d^3}{M_e} \left(1 - \frac{M_e}{M_L} \right) \approx K l \frac{d^3}{M_e} \quad (1)$$

où :

- M_e , la masse de l'échantillon est donné en grammes.
- M_L , la masse du lot échantillonné est habituellement beaucoup plus grand que M_e
- "l" est le facteur de libération: soit d_0 la taille de libération du minerai, i.e. la dimension que l'on devrait atteindre pour permettre que le constituant d'intérêt soit entièrement libéré de la gangue qui l'entoure:

$$d > d_0 \Rightarrow l = (d_0/d)^{0.5}$$

$$d < d_0 \Rightarrow l = 1$$

"l" est sans unité"

- la "constante" K (dont les unités sont des g/cm^3) est définie par

$$K = (\mu\delta) fg \quad (2)$$

où:

- "f" est un facteur de forme défini comme le rapport du volume d'un fragment sur le volume du plus petit cube qui contient entièrement le fragment. Pour une sphère, $f=0.524$; pour une fibre comme l'amiante ou pour un minéral tabulaire comme le mica, $f=0.1$ à 0.2 . Gy recommande de prendre $f=0.5$ pour la plupart des minerais. "f" est sans dimension.
- "g" est un facteur de distribution décrivant l'uniformité de la taille des fragments. "g" est relié au rapport du diamètre retenant 5% ($d_{5\%}$) du poids des fragments et du diamètre retenant 95% ($d_{95\%}$).

$g=0.25$ si aucune calibration des fragments n'est effectuée.

$g=0.40$ si $d_{5\%}/d_{95\%} > 4$.

$g=0.5$ si $4 > d_{5\%}/d_{95\%} > 2$.

$g=0.75$ si $2 > d_{5\%}/d_{95\%} > 1$.

$g=1$ si $d_{5\%}/d_{95\%} = 1$.

"g" est sans unité.

- Le terme "mu-delta" combine les effets de la teneur et des masses spécifiques de la gangue et du minéral d'intérêt. Il est défini comme:

$$\mu\delta = \frac{(1-a_L)}{a_L} [(1-a_L)\delta_A + a_L\delta_G]$$

où d_A et d_G sont respectivement les masses spécifiques (en g/cm^3) du composant d'intérêt (A) et de la gangue (G).

a_L est la concentration du composant d'intérêt exprimé sous forme de fraction (i.e. 10%=0.10, 10ppm=0.00010).

mu-delta possède les unités d'une masse spécifique (g/cm^3).

Note: Le constituant d'intérêt est habituellement le minéral renfermant le métal d'intérêt. Ainsi, pour le Cu, ce pourrait être la chalcopryrite, pour le Zn, la sphalérite, pour l'or, la pyrite. Si l'analyse rapporte le %Cu et que le cuivre provient de la chalcopryrite, alors il faut dans la formule précédente convertir le %Cu en %chalcopryrite.

ex. 5% Cu.

La formule de la chalcopryrite est $CuFeS_2$. La proportion poids du Cu dans une molécule de chalcopryrite est:

$Cu/(Cu+Fe+S_2)=0.35$

5% de Cu correspond donc à $5\%/(.35)=14\%$ chalcopryrite.

1. Interprétation de la formule de Gy.

La formule précédente est valide pour un échantillon probabiliste, i.e. que dans le lot échantillonné, il faut que chaque fragment ait une probabilité égale d'être sélectionné. Des déviations par rapport à ce modèle augmentent la variance relative d'estimation et peuvent même introduire des biais sérieux.

Si, après broyage à la taille "d" on prélève une certaine masse M_e pour analyse, on commet une erreur dont l'importance, **relativement à la teneur**, augmente lorsque les fragments sont isométriques (facteur « f »), augmente avec l'homogénéité de la distribution des tailles des fragments (facteur « g »), augmente avec la taille de libération du constituant d'intérêt (facteur « l ») et diminue avec la concentration du constituant d'intérêt (facteur $\mu\delta$). Plus la variance de l'erreur est grande, moins l'échantillon est représentatif du lot qu'il est censé représenter.

Cette formule est valable dans le cas où tout le métal se retrouve dans un seul minéral (le constituant d'intérêt). Elle exprime que la précision obtenue (en terme de variance) est proportionnelle à la masse de l'échantillon et inversement proportionnelle au cube de la taille des fragments les plus gros (ou à $d^{2.5}$ lorsque la taille des fragments est supérieure à la taille de libération. En effet dans ce cas, $l=(d_0/d)^{0.5}$ et donc $s_r^2 \propto d^3 d^{-0.5}$).

Explication de l'influence des différents paramètres

La formule de Gy a été élaborée originalement, pour l'essentiel, à partir de la loi de distribution discrète hypergéométrique qui décrit la probabilité de tirer "x" boules blanches parmi "n" quand le lot en contient N1 blanches parmi N (tirage sans remise). Cette loi hypergéométrique, quand N est grand peut être approchée par une loi binomiale. Ainsi, la moyenne et la variance de x/n (concentration mesurée) sont alors $N1/N$ (concentration réelle) et $(N1/N)*(1-N1/N)/n$. La variance relative sera $(1-N1/N)/(n*N1/N)$. Cette formule indique que la concentration du lot ($N1/N$) et le nombre de fragments dans l'échantillon (n) jouent chacun un rôle primordial dans la variance d'échantillonnage. Ainsi, plus la concentration est élevée, plus la variance relative diminue. De même, plus le nombre de fragments dans l'échantillon augmente, plus la variance diminue. Or le nombre de fragments est directement proportionnel à la masse de l'échantillon, inversement proportionnel au cube du diamètre, et il est aussi relié à la forme et la densité des fragments (pour une même masse d'échantillon, plus la densité est élevée, moins il y aura de fragments). Tous ces éléments se retrouvent dans la formule de Gy. Il a aussi réussi à incorporer dans sa formule l'influence du fait que les fragments peuvent être composés de gangue et du minéral d'intérêt (facteur de libération "l") et le fait que les fragments ne sont pas tous de la même grosseur (facteur granulométrique "g").

Examinons ces facteurs à tour de rôle:

Masse de l'échantillon : Plus la masse de l'échantillon augmente, plus il y a de fragments et moins la variance d'échantillonnage est grande (loi binomiale)

Masse du lot : Plus la masse du lot à échantillonné est faible et s'approche de celle de l'échantillon, plus la variance relative d'échantillonnage diminue. à la limite, si l'échantillon représente 100% du lot, il n'y a pas d'erreur d'échantillonnage.

Diamètre des fragments : Plus les fragments sont gros, moins il y en a dans l'échantillon et plus la variance relative augmente.

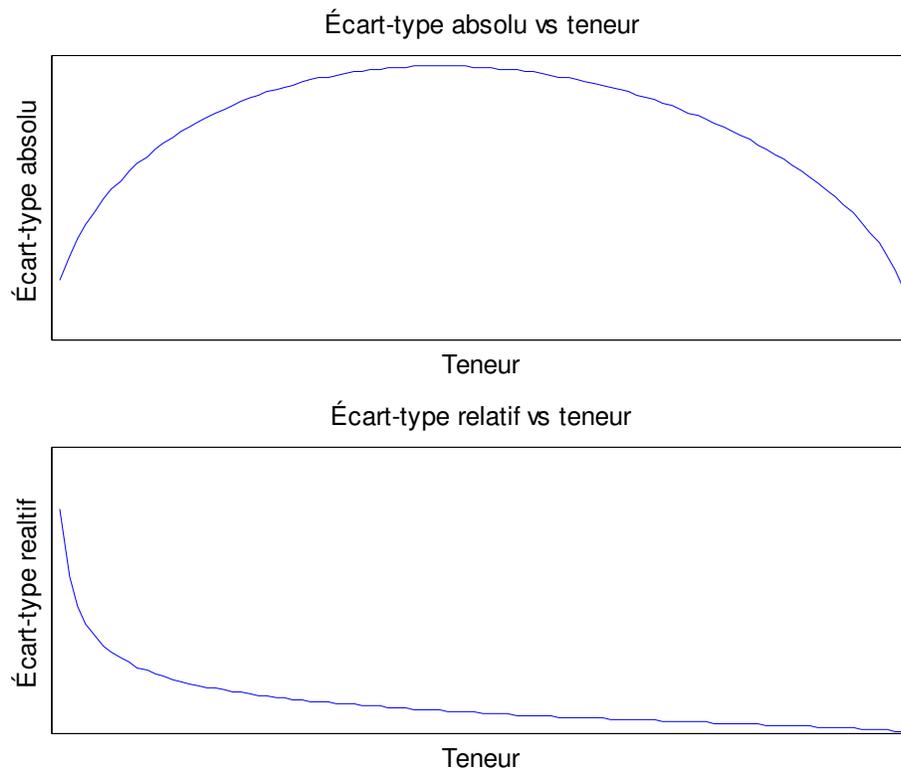
Forme des fragments (facteur « f ») : Pour une même distribution granulométrique, des fragments plats ou allongés montreront un volume plus faible. À densité égale, une masse donnée d'échantillon comprendra donc plus de fragments s'ils sont plats ou allongés que s'ils sont cubiques.

Taille des fragments homogène vs hétérogène (facteur « g ») : Les calculs de la formule de GY sont faits en considérant les plus gros fragments. Si la courbe granulométrique est très étalée il y aura plus de fragments au total que si elle est très resserrée.

Taille de libération du minéral d'intérêt (facteur « l ») : Si le minéral d'intérêt est entièrement libéré, l'hétérogénéité entre chaque grain est maximale (minéral d'intérêt ou gangue). S'il n'est pas entièrement libéré, les grains sont plus homogènes entre eux et donc un même échantillon devrait être plus précis. À la limite, si chaque fragment avait une concentration exactement égale, il n'y aurait pas de variance d'échantillonnage. Donc la libération maximale est un facteur défavorable toutes autres choses étant égales.

Concentration du constituant d'intérêt (facteur $\mu\delta$) : À densité constante, si la concentration du minéral d'intérêt augmente (a_L), il y a plus de fragments du minéral d'intérêt et l'écart relatif entre la vraie proportion et la proportion dans l'échantillon tend à diminuer (voir loi binomiale). De plus, pour une même concentration, si la densité de la gangue et du minéral d'intérêt augmentent alors il y aura moins de fragments. De même si seule la densité du minéral d'intérêt (δ_A) augmente, ceci implique une moins grande proportion volumique de fragments du minéral d'intérêt et donc une plus variance relative d'échantillonnage (loi binomiale).

La figure suivante montre l'évolution des écarts-type absolus et relatifs en fonction de la concentration du lot. On note qu'il n'existe pas de relation linéaire entre les écarts-type absolus ou relatifs en fonction de la teneur.



2. Exemples d'application de la formule de Gy.

- i. La mine de Murdochville fait sauter à chaque semaine un volume d'environ 60m x 40m x 10m. Le minerai est contenu dans la chalcopryrite, la masse spécifique de celle-ci est de 4.2g/cm³, la masse spécifique de la roche encaissante de 3g/cm³. Les blocs les plus gros résultant du sautage ont un diamètre d'environ 0.5 m. On déverse le minerai dans un concasseur qui broie les blocs à une taille d'environ 10cm. La taille de libération pour la chalcopryrite est environ 1mm. La teneur du volume sauté devrait être entre 1%Cu et 5%Cu. Quelle masse d'échantillon la mine devrait prélever pour connaître avec une précision relative de 20% (s/a_L) la teneur en Cu du volume sauté si:
- elle échantillonne directement du chargeur avant le concassage
 - elle échantillonne après le concassage, sur le convoyeur amenant le minerai au concentrateur

Solution:

- a) on pose $f=0.5$, $g=0.25$ (il n'y a aucune calibration du matériau)
 $l=(1\text{mm}/500\text{mm})^{0.5}=0.0447$

La teneur en chalcopryrite du volume sauté devrait varier entre 1%/(0.35) et 5%/(0.35), soit entre 2.86% et 14.3% chalcopryrite. Substituant dans l'expression pour μ -delta, on trouve que μ -delta varie entre 141.5 et 24.1. On veut que $s_r=0.2$, i.e. que $s_r^2=0.04$. Substituant dans (2) puis dans (1), on trouve que:

$$.04 = (141.5 \text{ ou } 24.1) * .0447 * 0.5 * 0.25 * 50^3 / M_e$$

d'où:

$$M_e = \text{entre } 2470 \text{ kg et } 421 \text{ kg selon que la teneur est } 1\% \text{ ou } 5\% \text{Cu}$$

- b) Ici, seul d et l changent par rapport à a). On calcule $l=(1\text{mm}/10\text{cm})^{0.5}=0.1$

$$M_e = (141.5 \text{ ou } 24.1) * .1 * .5 * .25 * 10^3 / .04 = \text{entre } 44\text{kg et } 7.5 \text{ kg.}$$

Comme on le constate, il est bien plus économique d'échantillonner le convoyeur que d'échantillonner les points de soutirage de la mine. De plus, notons que lorsqu'on échantillonne les points de soutirage du minerai, il n'est pas possible de retenir les plus gros fragments. Il y a donc un biais de la méthode d'échantillonnage qui se répercute inévitablement sur la teneur obtenue et la variance d'échantillonnage. De plus, l'échantillonnage des points de soutirage est dangereux puisqu'il risque d'interférer avec l'opération de production de la mine.

- ii. Dans un gisement d'or, où l'or est disséminé et se trouve emprisonné dans la structure de la pyrite (densité de la pyrite: 5; densité des roches volcaniques: 3), on prélève des carottes de 1m que l'on divise en 2 demi-carottes. On broie ensuite la demi-carotte en fragments de 2.5 mm et on prélève environ 100g pour analyse. La procédure est-elle adéquate si la demi-carotte a une teneur de 5ppm, une taille de libération (de la pyrite) de 0.1mm, un facteur de forme de 0.5 et un facteur de distribution de 0.75. La concentration moyenne de l'or dans la pyrite est d'environ 50ppm.

Si la carotte renferme 5ppm d'or, elle renferme donc 10% de pyrite. On calcule:
 le facteur μ -delta: 43.2,

le facteur de libération: .2
 le facteur de forme: 0.5
 le facteur de distribution: 0.75

$$s_r^2 = 43.2 * .2 * .5 * .75 * .25^3 / 100 = .0005$$

$$s_r = .02$$

La procédure est excellente, elle permettra une précision de l'ordre de 2%.

- iii. Dans un contexte similaire à la question précédente, si l'or se présente sous forme native (i.e. des pépites d'or), avec une taille de libération de 0.01mm, la procédure est-elle toujours adéquate?

Ici,

le facteur mu-delta est approximativement: $1/5\text{ppm} * 19 = 3.8 * 10^6$ (19: densité de l'or)
 le facteur de libération est: .063
 le facteur de forme: 0.2 (l'or se présente sous forme de paillettes)
 le facteur de distribution: 0.75

$$s_r^2 = 3.8 * 10^6 * .063 * .2 * .75 * .25^3 / 100 = 28.05$$

$$s_r = 5.3$$

La procédure est inadéquate. La teneur obtenue à l'analyse se situera entre 0 ppm et 50 ppm dans 95% des cas alors que la vraie teneur est 5 ppm. Pour avoir une précision acceptable, il faudrait analyser toute la demi-carotte ou broyer beaucoup plus finement que 2.5mm avant de prélever 100g pour former l'échantillon.

3. Procédures d'échantillonnage multistades (plan d'échantillonnage)

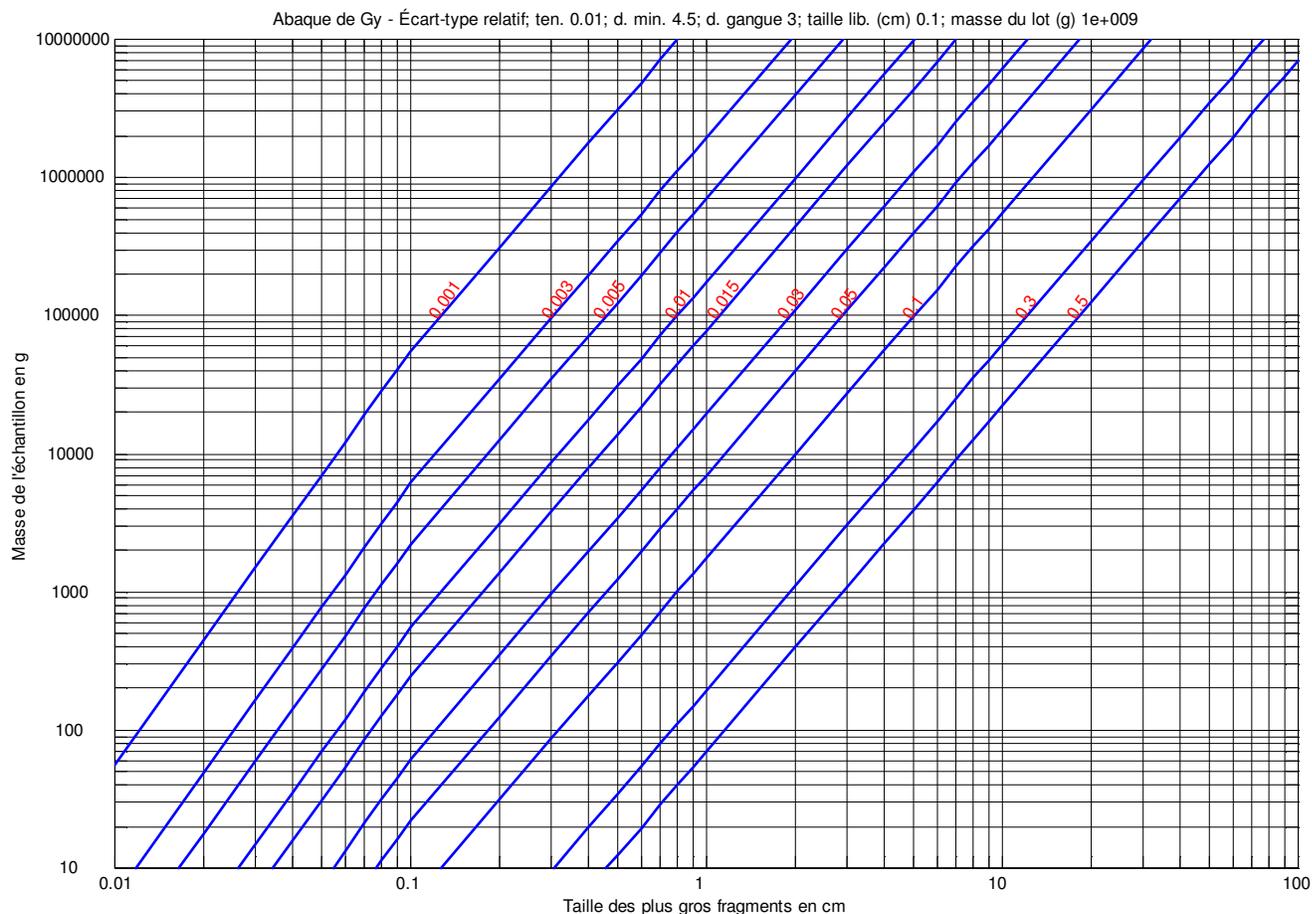
Les procédures d'échantillonnage nécessitent presque toujours plusieurs stages successifs de broyage et d'échantillonnage. Ainsi, la demi-carotte peut être broyée à 2.5mm et 100g sont prélevés. Ce 100g peut être broyée à .5mm et 30g sont prélevés. Finalement, on broie le 30g à 0.1mm et 5g sont prélevés pour être analysés.

On reconnaît trois étapes de broyage (2.5mm, .5mm et .1mm) et trois étapes de sous-échantillonnage (100g, 30g, 5g). Chaque étape de sous-échantillonnage amène une erreur d'échantillonnage dont on peut calculer la variance relative à l'aide des équations précédentes. Les sous-échantillonnages étant réalisés indépendamment, les erreurs seront indépendantes et, par conséquent, **les variances relatives s'additionnent**. On voit donc que dans une procédure d'échantillonnage, c'est le maillon faible, i.e. le sous-échantillonnage entraînant la plus grande erreur, qui sera responsable de la plus grande part de la variance de l'erreur. Il est important de bien identifier ce maillon faible afin d'apporter les corrections nécessaires.

Sur un graphique où l'on porte en « x » la taille des plus gros fragments masse de l'échantillon et en « y » la masse de l'échantillon, on peut représenter chaque étape de concassage ou broyage par un segment horizontal et chaque étape de sous-échantillonnage par un segment vertical. On peut superposer sur ce graphe les variances relatives correspondant à chaque taille et chaque masse d'échantillon (voir section suivante) et ainsi détecter aisément quelles sont les étapes qui nécessiteraient d'être améliorées pour obtenir un échantillon plus représentatif.

4. Représentations graphiques

Les facteurs ayant le plus d'influence sur la variance d'échantillonnage sont nettement la taille des plus gros fragments et la masse de l'échantillon. Sur échelles log-log, la variance d'échantillonnage varie linéairement en fonction de la taille des fragments et de la masse de l'échantillon. On peut donc construire une série de droites, de pente 3 si $d < d_0$, de pente 2.5 si $d > d_0$, assurant la même variance d'échantillonnage à chacune des étapes d'un sous-échantillonnage.



5. Extension à la théorie de Gy

La théorie de Gy indique des masses considérables à prélever pour les échantillons dans les mines d'or. Ces masses sont jugées irréalistes par certains auteurs car elles ne correspondent pas aux précisions obtenues lors d'expériences de rééchantillonnage. Les causes exactes ne sont pas connues. On peut croire qu'une des causes serait le fait que souvent l'or se présente sous deux formes très différentes : en grains pur et en inclusions fines dans des grains de pyrite. Des auteurs (François-Bongarçon 1993, François-Bongarçon et Gy, 2002) ont invoqué la difficulté d'estimer la taille de libération et le facteur de libération.

Lorsque $d > d_0$, l'équation de Gy peut être réécrite :

$$s_r^2 = \frac{s^2}{a_L^2} = K l \frac{d^3}{M_e} \left(1 - \frac{M_e}{M_L} \right) = K d_0^\beta \frac{d^{3-\beta}}{M_e} \left(1 - \frac{M_e}{M_L} \right)$$

où $\beta = 0.5$. D.

D. François-Bongarçon (1993, 2005) a proposé que d'autres valeurs de β pouvaient être plus appropriés pour les gisements d'or. Il a aussi proposé une procédure expérimentale pour estimer $\alpha = 3 - \beta$ et K. Il a validé cette expression sur un bon nombre de gisements d'or. Lorsque $M_e > M_L$, on peut ignorer le dernier terme de l'équation et obtenir :

$$s_r^2 \approx \tilde{K} \frac{d^{3-\beta}}{M_e} \equiv \tilde{K} \frac{d^\alpha}{M_e}$$

avec $\tilde{K} = K d_0^{3-\alpha}$ En prenant le log naturel, on obtient :

$$\ln(M_e s_r^2) \approx \ln(\tilde{K}) + \alpha \ln(d)$$

qui est une régression linéaire.

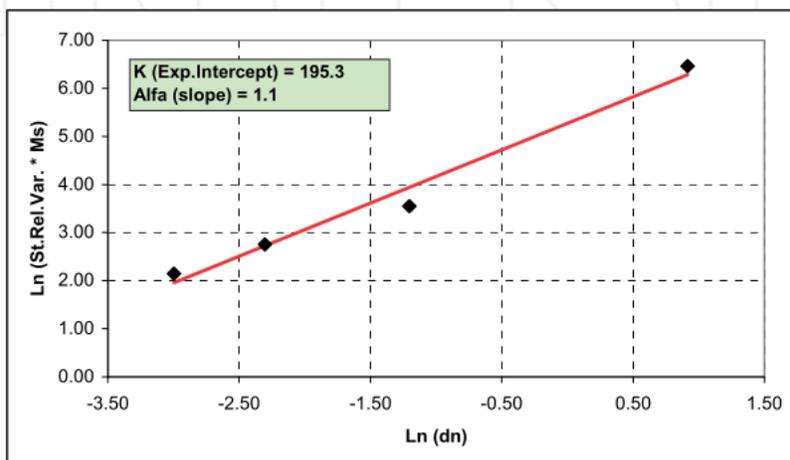
Pour obtenir une estimation de α et \tilde{K} , François-Bongarçon suggère l'expérience suivante :

- Choisir 4 tailles granulométriques d_1, d_2, d_3, d_4 , chacune plus grande que la taille de libération d_0 .
- Prendre un lot de 40-60 kg et le diviser en 4.
- Chaque sous-lot est broyé à sa taille respective d_1 à d_4 .
- Diviser chaque sous-lot en 32 sous-échantillons.
- Pulvériser chaque sous-échantillon ($n = 4 \times 32 = 128$ au total) et analyser chacun.

On a alors 32 échantillons pour chacune des quatre tailles granulométriques. La masse de chaque échantillon est de $60 \text{ kg} / 128 = 0.47 \text{ kg}$. Avec chaque groupe de 32 échantillons, on peut calculer un s_r^2 (la vraie teneur du lot est considérée être la moyenne des 32 échantillons associés à chaque sous-lot) et effectuer la régression linéaire. L'ordonnée à l'origine identifie \tilde{K} et la pente identifie α . La taille de

libération est obtenue comme $d_0 = \left(\frac{\tilde{K}}{K} \right)^{1/\beta}$

Exemple :



L'intérêt de cette procédure est qu'elle permet aussi implicitement d'estimer la taille de libération d_0 et le facteur de libération $l = (d_0 / d)^{3-\alpha}$. De plus, elle s'est avérée donner des performances plus réalistes pour certains types de minéralisation (e.g. Au). Dans certains cas, en effet, il arrivait que les masses d'échantillon prévues par la formule originale de Gy indiquaient que l'on devait échantillonner presque tout le lot. Appliqué sur un bon nombre de mines d'or présentant des minéralisations et des teneurs différentes, des valeurs de α variant entre 0.6 et 1.3 ont été obtenues, loin de la valeur proposée de 2.5 dans la formule originale de Gy (voir Minnit et Assibey-Bonsu, 2010)¹.

Table VI
Calibration values for K and alpha using the DSA method for South African Wits-type gold mining operations

Mine type	Operation	Reef	K	Alpha
Witwatersrand	Bambanani	Basal	36	0.68
Witwatersrand	Tshepong	Basal	275	0.71
Witwatersrand	Kopanang	Vaal	497	0.77
Witwatersrand	Savuka	Carbon leader/VCR	31	0.67
Witwatersrand	Joel	Beatrix	30	0.72
Witwatersrand	Elandsrand	VCR	454	1.28
Witwatersrand	Tau Lekoa	VCR	970	0.63
Witwatersrand	Great Nologwa	Vaal	2849	1.09

Source: V. Chamberlain, AngloGoldAshanti, personal communication, 2004

¹ Minnit et Assibey-Bonsu, 2010. A comparison between the duplicate series analysis method and the heterogeneity test as methods for calculating the sampling constants, K and alpha. SAIMM, 110, 251-268.