La loi de Gauss

MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

3 avril 2024

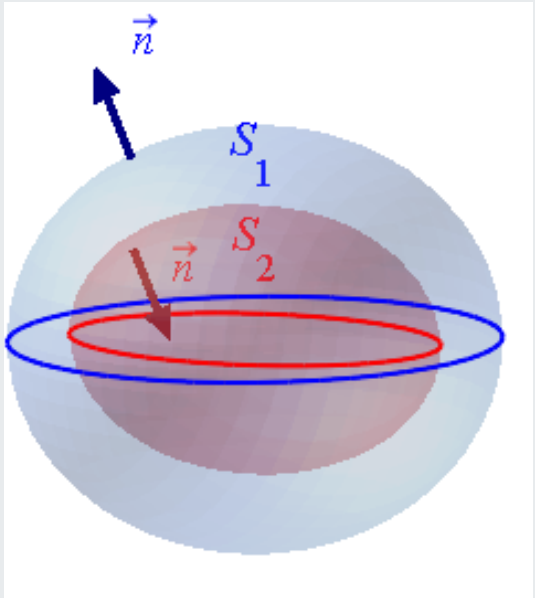
Contexte

La loi de Gauss donne une relation entre la charge et le flux électrique à travers une surface entourant cette charge.

Théorème de flux-divergence généralisé

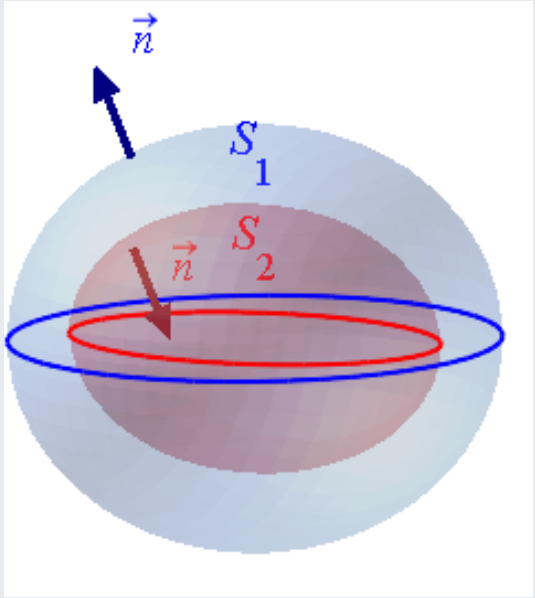
Soit deux surfaces S_1 et S_2 disjointe et telles que S_2 est entièrement contenue dans la région bornée par S_1.

Notons $S = S_1 \cup S_2$ et E la région située entre les deux surfaces.



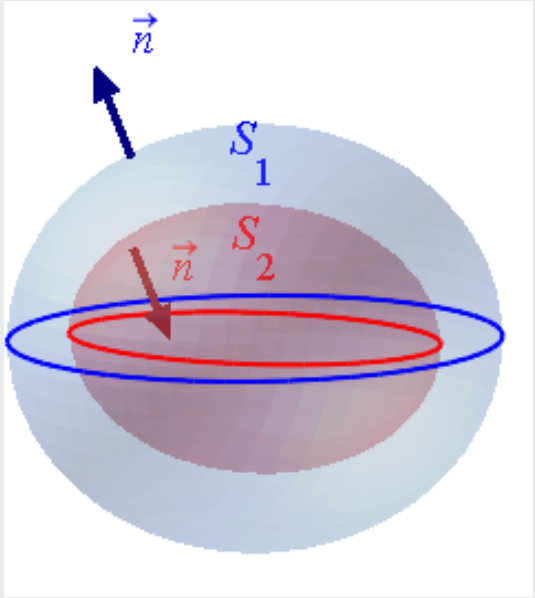
Théorème de flux-divergence généralisé (2)

L'orientation positive de S est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur de E et correspond



Théorème de flux-divergence généralisé (2)

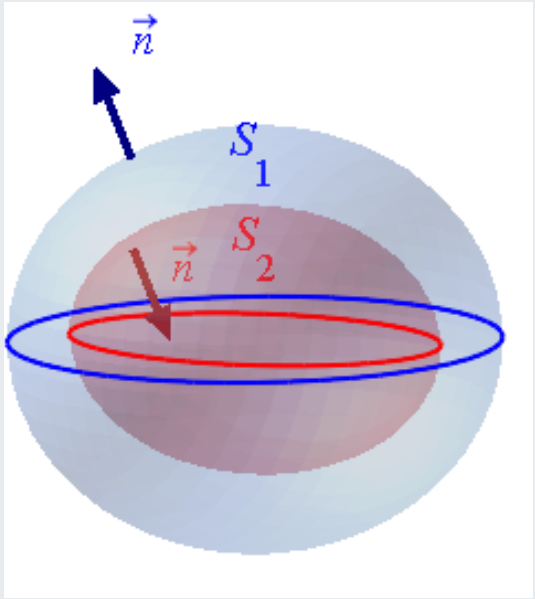
L'orientation positive de S est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur de E et correspond



- sur S_1, à un vecteur normal pointant vers *l'extérieur* de S_1, donc à $\vec{n}_1$.

Théorème de flux-divergence généralisé (2)

L'orientation positive de S est donnée par un vecteur normal pointant vers l'extérieur de E et correspond



- sur S_1, à un vecteur normal pointant vers *l'extérieur* de S_1, donc à $\vec{n}_1$.
- sur S_2, à un vecteur normal pointant vers *l'intérieur* de S_2, donc à $-\vec{n}_2$.

Théorème de flux-divergence généralisé (2)

Théorème

Étant donné la situation décrite ci-dessus,

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2\, dS.$$

Le champ électrique

Définition

Le champ électrique d'une charge Q située à l'origine est

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\varepsilon Q}{||\vec{x}||^3}\vec{x},$$

où ε est une constante et $\vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est le vecteur position du point (x, y, z).

Le champ électrique (2)

Exercice 1

1. Écrivez une expression explicite pour le champ $\vec{E}$.
2. Calculez la divergence de $\vec{E}$.

La loi de Gauss

Soit S_1 une surface quelconque entourant une charge Q située à l'origine et S_2 une sphère de rayon a suffisamment petit pour que S_2 soit contenue dans l'intérieur de S_1.

Exercice 2

Utilisez le théorème de flux-divergence généralisé pour montrer que

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

La loi de Gauss

Soit S_1 une surface quelconque entourant une charge Q située à l'origine et S_2 une sphère de rayon a suffisamment petit pour que S_2 soit contenue dans l'intérieur de S_1.

Exercice 2

Utilisez le théorème de flux-divergence généralisé pour montrer que

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Exercice 3

Montrez que le flux électrique à travers S_2 est égal à $4\varepsilon Q$.

La loi de Gauss (2)

Conclusion

En combinant les résultats des exercices 2 et 3, on obtient la **loi de Gauss** :

Le flux électrique à travers n'importe quelle surface entourant une charge Q est égal $4\varepsilon Q$.