Le principe d'Archimède

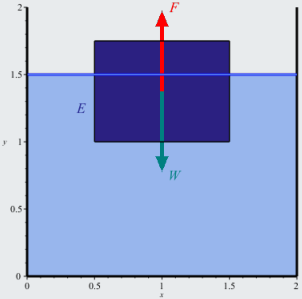
MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

22 novembre 2024

Contexte

Lorsqu'un solide est plongé dans un liquide, il subit une force vers le haut qui est égale au poids du liquide déplacé. Dans cet exemple, nous utilisons le théorème de flux-divergence pour démontrer ce principe.



Préliminaires

Si $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ est une fonction vectorielle alors on définit

- L'intégrale de $\vec{F}$ sur la région E de l'espace par

$$\iiint_E \vec{F}\,dV = \iiint_E P\,dV\,\vec{i} + \iiint_E Q\,dV\,\vec{j} + \iiint_E R\,dV\,\vec{k}.$$

- L'intégrale de $\vec{F}$ sur la surface S dans l'espace par

$$\iint_S \vec{F}\,dS = \iint_S P\,dS\,\vec{i} + \iint_S Q\,dS\,\vec{j} + \iint_S R\,dS\,\vec{k}.$$

- Ces intégrales sont obtenues en intégrant la fonction $\vec{F}$ composante à composante et le résultat est un vecteur.
- La deuxième intégrale n'est **pas** l'intégrale de flux vue au cours.

Préliminaires

Exercice 1

Considérons $\vec{F}(x, y, z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + \vec{k}$.

1. Soit E la région de l'espace bornée par les surfaces d'équations $z = 4 + x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 0$. Calculez
$$\iiint_E \vec{F}\,dV.$$
2. Soit S la partie de la surface d'équation $z = 4 + x^2 - y^2$ située « à l'intérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ (c'est-à-dire là où $x^2 + y^2 \leq 4$). Calculez
$$\iint_S \vec{F}\,dS.$$

Une application du théorème de flux-divergence

Exercice 2

Supposons que S et E satisfont aux hypothèses du théorème de flux-divergence et que f est une fonction scalaire ayant des dérivées partielles continues.

On désigne par $\vec{n} = n_1\,\vec{i} + n_2\,\vec{j} + n_3\,\vec{k}$ le vecteur normal unitaire de la surface S. Notez que $\vec{n}$ n'est pas un vecteur constant.

Démontrez l'égalité

$$\iint_S f\,\vec{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

en suivant les étapes ci-dessous.

Une application du théorème de flux-divergence

Exercice 2 (suite)

1. Soit $\vec{c}$ un vecteur *constant* quelconque et $\vec{F} = f\,\vec{c}$. Calculez la divergence de $\vec{F}$.
2. Appliquez le théorème de flux-divergence pour calculer
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$
3. Examinez maintenant le cas particulier du résultat de la partie (2) lorsque $\vec{c} = \vec{i}$. Vous obtiendrez une expression pour l'intégrale
$$\iint_S f n_1\, dS.$$
4. Faites comme en (3) avec $\vec{c} = \vec{j}$ puis avec $\vec{c} = \vec{k}$.
5. Utilisez les résultats des parties (3) et (4) pour terminer la démonstration.

Le principe d'Archimède

On considère un solide occupant une région E de l'espace et S sa surface.

Le solide est immergé dans un liquide de densité constante δ.

On choisit un système de coordonnées de telle sorte que la surface du liquide corresponde au plan des (x, y) et que les valeurs de z positives soient vers le *bas* du liquide.

La pression du liquide à la profondeur z est $p = \delta g z$, où g est l'accélération due à la gravité. La poussée verticale total sur le solide causée par la pression est

$$\vec{F} = -\iint_S p\vec{n}\, dS.$$

Le principe d'Archimède

Exercice 3

En utilisant le résultat de l'exercice 2, démontrez le principe d'Archimède : la poussée (vers le haut) exercée sur le solide est égale au poids W du liquide déplacé.