

MTH1102(D) - Exercices du TD13

Applications du théorème de flux-divergence

1. Démontrez les identités suivantes. Vous pouvez supposer que toutes les hypothèses du théorème de flux-divergence sont satisfaites. La surface S est fermée et E est la région bornée par S .

(a) Si \vec{a} est un champ vectoriel constant alors $\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = 0$.

(b) $\iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$.

(c) $\text{vol}(E) = \frac{1}{3} \iint_S (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \cdot d\vec{S}$.

2. (**Devoir 12 Q1**) Soit B un solide borné par une surface S et dont la densité est proportionnelle au carré de la distance au plan $z = 0$. On suppose que le solide est entièrement situé au-dessus du plan des (x, y) .

(a) Montrez que la masse de B peut être calculée à l'aide de la formule

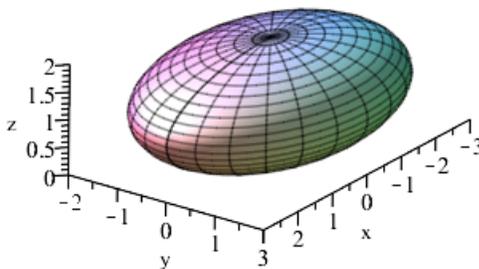
$$m = \frac{k}{3} \iint_S z^3 \vec{k} \cdot d\vec{S},$$

où k est une constante de proportionnalité.

(b) Utilisez la formule trouvée en a) pour calculer la masse du solide délimité par l'ellipsoïde paramétré par

$$\vec{R}(u, v) = [3 \sin(u) \cos(v)] \vec{i} + [2 \sin(u) \sin(v)] \vec{j} + [1 + \cos(u)] \vec{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

si ce solide a une densité proportionnelle au carré de la distance au plan $z = 0$. Le solide B est représenté ci-dessous.



3. Pour cet exercice, vous pouvez utiliser un logiciel pour évaluer les intégrales.

Soit B un solide de densité constante δ et de masse m , délimité par une surface S .

(a) Montrez que le centre de masse de B est donné par les formules suivantes :

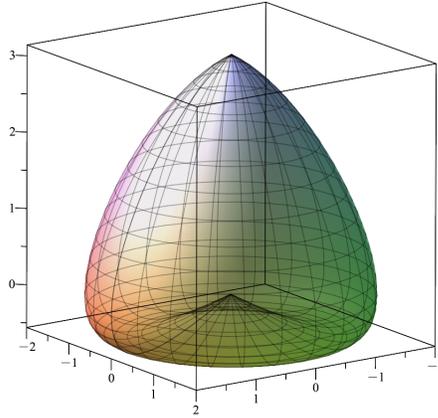
$$\bar{x} = \frac{\delta}{2m} \iint_S x^2 \vec{i} \cdot d\vec{S}, \quad \bar{y} = \frac{\delta}{2m} \iint_S y^2 \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad \bar{z} = \frac{\delta}{2m} \iint_S z^2 \vec{k} \cdot d\vec{S}.$$

(b) Utilisez les formules en a) pour déterminer le centre de masse du solide B délimité par la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = 2 \sin(u) \cos(v) \vec{i} + 2 \sin(u) \sin(v) \vec{j} - u \cos(u) \vec{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Supposez que $\delta = 1$ et utilisez $m = 8\pi^2/3$. Le centre de masse est-il situé à l'intérieur de B ?

La surface S est représentée ci-dessous.



4. Montrez que le flux à travers une surface fermée d'un champ vectoriel de la forme

$$\vec{F}(x, y, z) = [ax + A(y, z)]\vec{i} + [by + B(x, z)]\vec{j} + [cz + C(x, y)]\vec{k},$$

où a, b, c sont des constantes et A, B, C des fonctions, est proportionnel au volume de la région à l'intérieur de la surface.

5. **(Devoir 12 Q2a)** Exercice 10.5.39 du livre.
6. **(Devoir 12 Q2b)** Exercice 10.5.42 du livre. *Utilisez le résultat de l'exercice précédent.*
7. Exercice 10.5.41 du livre.

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.
10.5 nos. 23, 37.