DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH1115/D : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
EXAMEN FINAL

10 décembre 2023

Directives : *Vous avez deux heures et trente minutes pour compléter cet examen. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{1}{20}$) (a) Déterminer si la fonction $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x)$ est paire, impaire ou ni paire ni impaire. **Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.**

($\frac{2}{20}$) (b) Soit

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < \pi; \\ \cos(t) & \text{si} \quad \pi \le t < 2\pi; \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Écrire la fonction $g(t)$ en termes de fonctions de Heaviside et calculer $G(s)$ sa transformée de Laplace.
Note : $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$.

($\frac{2,5}{20}$) (c) Soit

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad 0 < x < 1, \\ x - 1 & \text{pour} \quad 1 \le x < 2. \end{cases}$$

On désigne par $S_F(x)$ la série de Fourier correspondant au prolongement impair, périodique de période 4 de la fonction $h(x)$. **Sans calculer** les coefficients de $S_F(x)$, donner les valeurs de $S_F(-2)$ et $S_F(125)$. **Justifier vos réponses.**

($\frac{3,5}{20}$) 2. Résoudre le problème de valeurs initiales

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \delta(t-2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

et en déduire la valeur de $y(1)$.

($\frac{4}{20}$) 3. Soit le problème de valeurs initiales

$$(2x^2 - 3)y'' - 2xy' + xy = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 5.$$

On cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme de la série autour de $x_0 = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

($\frac{1,5}{20}$) (a) Déterminer une borne inférieure du rayon de convergence de la série.

($\frac{2,5}{20}$) (b) Trouver les 3 premiers termes non nuls de la solution du problème de valeurs initiales.

4. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta^2 v(x,t) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad t > 0; \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0; \\[2ex] v(x,0) = h(x) = u_{\frac{1}{4}}(x) - u_{\frac{1}{2}}(x) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1}$$

où α, β sont des constantes positives et $u_a(x) = u(x-a)$ est la fonction unité échelon (ou la fonction de Heaviside) au point a.

$(\frac{1}{20})$ (a) Soit

$$v(x,t) = F(x)G(t).$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \tag{2}$$

et la fonction $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$G'(t) + \left(\beta^2 - \alpha^2 \lambda\right) G(t) = 0,$$

où λ est une constante de séparation.

$(\frac{3,5}{20})$ (b) Déterminer les conditions limites associées à l'équation différentielle (2) et résoudre le problème de fonctions et de valeurs propres associé à la fonction $F(x)$.
On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

$(\frac{2,5}{20})$ (c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), trouver la solution du problème (1).

Les professeurs du cours MTH1115