Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface

MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

20 mars 2024

Contexte

La notion de flux d'un champ vectoriel à travers une surface est applicable à plusieurs situation physiques. Dans cette présentation, nous en examinons deux exemples.

Rappels

- Tout rayon d'une sphère est perpendiculaire à celle-ci.
- L'aire d'une sphère de rayon a est $4\pi a^2$.

Le flux électrique

Loi de Gauss

Si $\vec{E}$ est un champ électrique alors le **flux électrique** de $\vec{E}$ à travers une surface S est

$$\iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S}.$$

Le flux électrique

Loi de Gauss

Si $\vec{E}$ est un champ électrique alors le **flux électrique** de $\vec{E}$ à travers une surface S est

$$\iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S}.$$

La **loi de Gauss** stipule que la charge nette Q à l'intérieur d'une surface fermée S est

$$Q = \epsilon \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S},$$

où $\epsilon \approx 8.8542 \times 10^{-12}$ est une constante (la **permittivité du vide**).

Un exemple

On considère une charge Q située au centre d'une sphère S de rayon a.

Le flux électrique

Un exemple

On considère une charge Q située au centre d'une sphère S de rayon a.

Si on suppose que la sphère est centrée à l'origine alors le champ électrique est

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est le vecteur position du point (x, y, z).

Le flux électrique

Un exemple

On considère une charge Q située au centre d'une sphère S de rayon a.

Si on suppose que la sphère est centrée à l'origine alors le champ électrique est

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est le vecteur position du point (x, y, z).

Calculons le flux électrique à travers S.

Le flux électrique

Un exemple

On considère une charge Q située au centre d'une sphère S de rayon a.

Si on suppose que la sphère est centrée à l'origine alors le champ électrique est

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{||\mathbf{x}||^3}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ est le vecteur position du point (x, y, z).

Calculons le flux électrique à travers S.

Pour un point de la sphère, $||\mathbf{x}|| = a$, donc sur cette surface le champ est

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon Q}{a^3}\mathbf{x},$$

Un exemple

Le vecteur normal unitaire de la sphère S est $\vec{n} = \frac{\mathbf{x}}{a}$

Le flux électrique

Un exemple

Le vecteur normal unitaire de la sphère S est $\vec{n} = \frac{\mathbf{x}}{a}$

Un calcul montre que

$$\vec{E}(\mathbf{x}) \cdot \vec{n} = \frac{\epsilon Q}{a^2}.$$

Exercice 1

En utilisant le résultat précédent et la définition de l'intégrale d'un champ à travers une surface, calculez le flux de $\vec{E}$ à travers S. Que remarquez-vous ?

Le flux thermique

Définition

On considère un solide dont la température en chaque point est donnée par une fonction T.

Le flux thermique

Définition

On considère un solide dont la température en chaque point est donnée par une fonction T.

Le **flux thermique** à travers une surface S contenue dans le solide est le flux du champ vectoriel

$$\vec{F} = -K\nabla T$$

à travers S, où K est une constante (la **conductivité** du matériau dont est constitué le solide).

Le flux thermique

Définition

On considère un solide dont la température en chaque point est donnée par une fonction T.

Le **flux thermique** à travers une surface S contenue dans le solide est le flux du champ vectoriel

$$\vec{F} = -K \nabla T$$

à travers S, où K est une constante (la **conductivité** du matériau dont est constitué le solide).

Explicitement :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = -K \iint_S \nabla T \cdot \vec{dS}.$$

Le flux thermique

Un exemple

La température d'une boule (sphère solide) de rayon a est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculer le flux thermique à travers la surface de cette boule.

Le flux thermique

Un exemple

La température d'une boule (sphère solide) de rayon a est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculer le flux thermique à travers la surface de cette boule.

Pour simplifier, on suppose que la boule est bornée par la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Le flux thermique

Exercice 2

1. Écrivez la fonction de température T pour cette boule.
2. Calculez explicitement le champ $\vec{F} = -K\nabla T$ et exprimez votre réponse sous forme vectorielle.

Le flux thermique

Exercice 3

Calculez le flux thermique à travers S dans cette situation.