

MTH1102(D) - Exercices du TD10

Exercices de routine

10.2 nos. 23, 25, 29, 43.

Applications des intégrales de surface

Résumé des applications

- Aire :

$$A(S) = \iint_S dS.$$

- Masse d'une plaque mince de densité δ :

$$m = \iint_S \delta(x, y, z) dS.$$

- Premiers moments d'une plaque mince de densité δ :

$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x, y, z) dS, \quad M_{xz} = \iint_S y\delta(x, y, z) dS, \quad M_{yz} = \iint_S x\delta(x, y, z) dS.$$

- Centre de masse d'une plaque mince de densité δ :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

- Moment d'inertie d'une plaque mince de densité δ par rapport à un axe :

$$I = \iint_S d^2(x, y, z)\delta(x, y, z) dS,$$

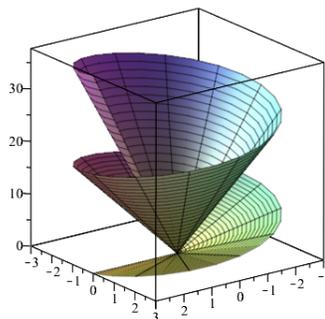
où $d(x, y, z)$ est la distance d'un point à l'axe.

Exercices

1. On considère une plaque mince ayant la forme de la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = v \cos(u)\vec{i} + v \sin(u)\vec{j} + uv\vec{k}$$

avec $0 \leq u \leq 4\pi$ et $0 \leq v \leq 3$ (illustrée ci-dessous). La plaque mince est constituée d'un matériau de densité variable, qui est proportionnelle au carré de la distance à l'axe central, c'est-à-dire l'axe des z . Calculez la masse de la plaque.



2. Soit S la partie du parabolöide d'équation $z = 2x^2 + 2y^2$ située en dessous du plan $z = 6$. Une plaque mince a été courbée de façon à prendre la forme de la surface S . La densité de cette plaque est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$. Déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque. Justifiez soigneusement votre réponse.
3. Soit S l'hélicoïde paramétré par

$$\vec{R}(u, v) = u \cos(v) \vec{i} + u \sin(v) \vec{j} + av \vec{k}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 4\pi],$$

où a est une constante positive. Une plaque mince de densité constante a la forme de la surface S . Pour quelles valeurs de a le centre de masse est-il situé au-dessus du plan $z = 1$?

Indice : le calcul direct n'est pas la meilleure façon de résoudre ce problème.

4. Quelle est la distance moyenne des points de la surface S à l'origine, où S est le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$?
5. Une plaque mince de densité constante a été courbée de façon à prendre la forme de la S surface paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + uv \vec{k}, \quad (u, v) \in D = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Est-il plus facile de faire tourner la plaque autour de l'axe des z ou autour de l'axe des y ?

Indice : un calcul direct n'est pas la meilleure façon de répondre à cette question.

Intégrales de surface d'un champ vectoriel

6. Soit \vec{F} le champ défini par $\vec{F}(x, y, z) = xy \sin(x^2 - 4) \vec{i} + x^2 y \vec{j} + y \ln(z^2 + 1) \vec{k}$ et S la surface du cube $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$. Évaluez l'intégrale

$$J = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

7. Soit S la surface fermée formant la frontière de la région bornée par le parabolöide $z = 9 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$. Calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + (2 + z^2) \vec{k}$ à travers S .
8. Soit H la partie de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ située entre les plans $z = -2$ et $z = 2$. L'aire de S est égale à $\pi(\sqrt{2} \ln(2\sqrt{2} + 3) + 12)$.

- (a) Montrez que H peut être paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = \sqrt{1 + v^2} \cos(u) \vec{i} + \sqrt{1 + v^2} \sin(u) \vec{j} + v \vec{k}$$

avec $0 \leq u \leq 2\pi$ et $-2 \leq v \leq 2$.

- (b) Si la surface H est orientée au point $(1, 0, 0)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{i}$, calculez le flux du champ vectoriel \vec{F} défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = -y \vec{i} + x \vec{j} + z^3 \vec{k}$$

à travers H .

- (c) Si \vec{G} est un champ vectoriel de norme constante et perpendiculaire à la surface H en tout point, que vaut le flux de \vec{G} à travers H ?

- (d) Si $\vec{\Psi}$ est un champ vectoriel tangent à H en chaque point, que vaut le flux de $\vec{\Psi}$ à travers H ?

9. Exercice 10.2.48. Pour une définition du flux thermique, voir la page 448 du livre.

Indice : un calcul explicite avec la formule 10.2.9 du livre n'est pas la meilleure façon de résoudre ce problème. Utilisez plutôt la définition du flux d'un champ à travers une surface.

10. Soit S la surface paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + a(u + v)\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1,$$

où a est un paramètre, et \vec{F} le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + (1 - z^2)\vec{k}.$$

La surface S est orientée « vers le haut ».

- (a) Trouvez l'équation cartésienne de S . De quel type de surface s'agit-il ?
- (b) Pour quelle valeur du paramètre a le flux de \vec{F} à travers S est-il maximal ?

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

10.2 nos. 29, 31, 41, 45.