# MTH2120
# Analyse appliquée
# Devoir # 4

Date de remise: Mercredi le 20 mars 2024.

( Lors de la remise, deux questions seront choisies au hasard pour être corrigées. )

Barême : 6 pts/10 au total pour la correction des deux questions choisies.
4 pts/10 si les autres questions ont été rédigées.

Directives particulières:

- N'oubliez pas de joindre la page couverture du devoir qui est disponible sur Moodle;
  ( sinon une pénalité de 2 points sera appliquée)
- Lire attentivement les directives pour la remise du devoir qui sont disponibles sur Moodle.

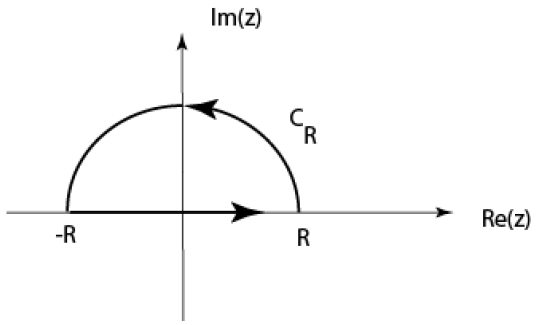
---

**Exercice 1**

*Soit la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$

*et la courbe* $C = C_R \cup [-R, R]$ *illustrée à la figure ci-dessous.*




*a) Montrez que* $\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| = 0.$

*b) En utilisant la méthode des résidus, évaluez*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+9}\, dz.$$

*Montrez tous les détails menant à votre réponse.*

**Solution 1**

a) Nous avons

$$|z^2+9| \geq |z^2| = |z|^2$$

Alors sachant que sur la courbe $C_R$, nous avons $|z| = R$, par conséquent

$$\left|\frac{1}{z^2+9}\right| \leq \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{R^2}$$

En paramètrisant la courbe $C_R$, nous avons $z = Re^{i\theta}, dz = iRe^{i\theta}$ alors

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}|f(z)|\,|dz| \leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{R^2}\,R\,d\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R} = 0$$

b) Puisque les singularités de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$ sont $\pm 3\,i$ qui sont deux pôles d'ordre $m = 1$ et que seulement $3i$ est dans le demi-disque alors en sachant que

$$\underbrace{\oint_C \lim f(z)\,dz}_{①} = \underbrace{\int_{\underbrace{[-R,R]}_{segment}} f(z)dz}_{\text{Ici } z=x+i\cdot 0} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

En développant ① et en utilisant le résultat:

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\,\pi\,i\cdot\sum_{i=1}^{n}\text{Rés}\,(f(z)\,;z=z_i)}$$

et en prenant la limite de chaque côté de l'équation, nous avons

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,dz}_{\oint_C f(z)\,dz} = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz}_{=0} \tag{1}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2+9}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{i=1}^{n=1}\text{Rés}(f(z);z=z_i) = 2\pi i\lim_{z\to 3i}(z-3i)^1\frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{2\pi i}{6i} = \frac{\pi}{3}$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2+9}\,dz = \frac{\pi}{3}}$$

**Exercice 2**

*Soit la fonction $f(t) = \cos(t)\;u(t)$ où $u$ désigne la fonction Heaviside. Calculez le produit de convolution $(f*f)(t)$ .*

**Solution 2**

Rappel

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\ \cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

$$\cos^2(A) = \frac{1+\cos(2A)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2(A) = \frac{1-\cos(2A)}{2}$$

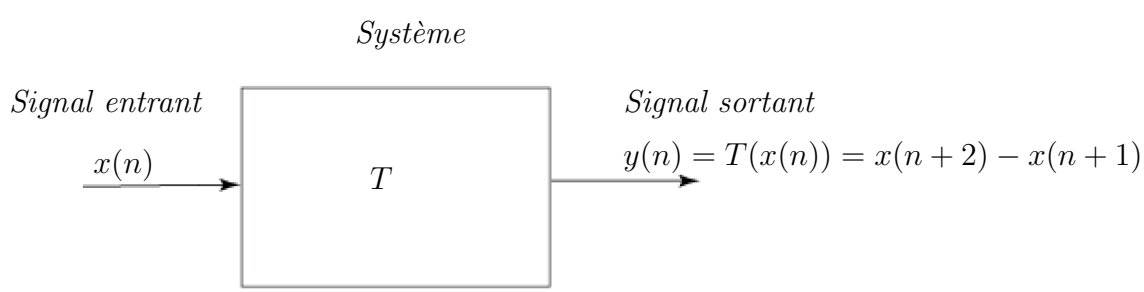
$$u(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \geq 0 \\ 0, & si \quad t < 0 \end{cases} \iff u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & si \quad t-\tau \geq 0 \iff t \geq \tau \\ 0, & si \quad t-\tau < 0 \iff t < \tau \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
(f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ f(t-\tau)\ d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau)\ u(\tau)\ \cos(t-\tau)\ u(t-\tau)\ d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} \cos(\tau)\ \cos(t-\tau)\ u(t-\tau)\ d\tau \\
&= \int_{0}^{t} \cos(\tau)\ \cos(t-\tau)\ d\tau \\
&= \int_{0}^{t} \cos(\tau)\ [\cos(t)\ \cos(\tau) + \sin(t)\sin(\tau)]\ d\tau \\
&= \cos(t)\int_{0}^{t} \cos^2(\tau)\ d\tau + \sin(t)\int_{0}^{t} \cos(\tau)\sin(\tau)\ d\tau \\
&= \cos(t)\int_{0}^{t} \frac{1+\cos(2\tau)}{2}\ d\tau + \sin(t)\int_{0}^{t} \cos(\tau)\sin(\tau)\ d\tau \\
&= \cos(t)\left[\frac{t}{2}\frac{\sin(2t)}{4}\right] + \sin(t)\frac{\sin^2(t)}{2} \\
&= \frac{t\ \cos(t) + \sin(t)}{2}
\end{aligned}$$

**Exercice 3**

*Soit le système de différence avant, représenté à la figure ci-dessous.*




*a) Montrez que l'opérateur $T$ est linéaire.*

*b) Montrez la stationnarité.*

*c) Calculez la réponse impulsionnelle.*

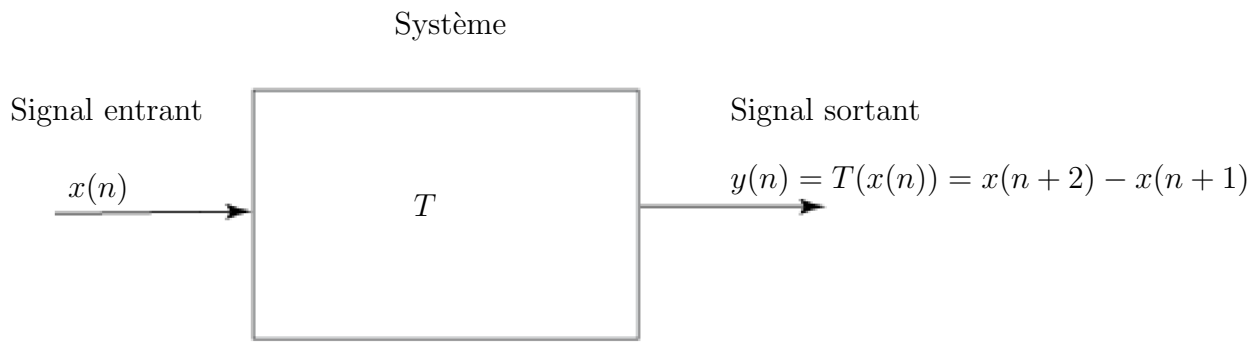
*d) Vérifiez que $T(x(n) = (h_T * x)(n)$.*

*e) Le système est-il causal ? Est-il stable ?*

*f) Déterminez la fonction de transfert.*

**Solution 3**

Soit le système




a) Est-ce que le système est linéaire ?

Rappel: Un système $T$ est dit **linéaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $T(x_1(n) + x_2(n)) = T(x_1(n)) + T(x_2(n))$
2. $T(\alpha\, x(n)) = \alpha\, T(x(n)), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

En pratique, les 2 conditions se résument à vérifier que :

$$T((\alpha\, x_1 + \beta\, x_2)(n)) = \alpha\, T(x_1(n)) + \beta\, T(x_2(n)) \qquad \text{et qui soit valable} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Fin du rappel.

Montrons la linéarité.

Puisque

$$\begin{aligned}
T(x_1(n)) &= x_1(n+2) - x_1(n+1) \\
T(x_2(n)) &= x_2(n+2) - x_2(n+1) \\
\text{alors} \qquad T((\alpha x_1 + \beta x_2)(n)) &= (\alpha\, x_1 + \beta x_2)(n+2) - (\alpha\, x_1 + \beta x_2)(n+1) \\
&= \alpha\, \underbrace{(x_1(n+2) - x_1(n+1))}_{=T(x_1(n))} + \beta\, \underbrace{(x_2(n+2) - x_2(n+1))}_{=T(x_2(n))} \\
&= \alpha\, T(x_1(n)) + \beta\, T(x_2(n))
\end{aligned}$$

b) Montrons la stationnarité.

Rappel. Un système est dit **stationnaire** si

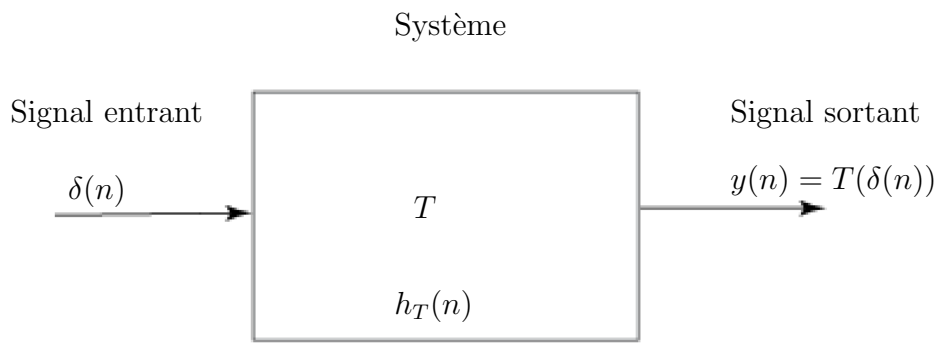
$$x(n-n_0) \;\Rightarrow\; y(n-n_0) \qquad\qquad \text{ici } \; y(n-n_0) = T(x(n-n_0))$$

Fin du rappel.

Ainsi

$$\begin{aligned} T(x(n-n_0)) &= x(n-n_0+2) - x(n-n_0+1) \\ &= x(n+2-n_0) - x(n+1-n_0) \\ &= y(n-n_0) \end{aligned}$$

c) Calculons la réponse impulsionnelle $T(\delta(n))$.




Rappel:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n-k = 0 \iff k = n \\ 0 & \text{si} \quad n-k \neq 0 \iff k \neq n \end{cases}$$

De même

$$\delta(n-k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n-k+1 = 0 \iff k = n+1 \\ 0 & \text{si} \quad n-k+1 \neq 0 \iff k \neq n+1 \end{cases}$$

Rappelons que $(\delta * h_T)(n) = h_T(n) = y(n)$

Ainsi la réponse impulsionnelle est

$$\boxed{T(\delta(n)) = h_T(n) = \delta(n+2) - \delta(n+1)}$$

d) Vérifions que

$$T(x(n)) = (h_T * x)(n)$$

Notons que par #2c) La réponse impulsionnelle est $h_T(n) = \delta(n+2) - \delta(n+1) \qquad (1)$.

**Solution**

En sachant que toute suite $x(n)$ peut s'écrire sous la forme

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k) \qquad \text{ainsi} \quad x(n+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k+1)$$

alors

$$\begin{aligned}
(h_T * x)(n) &= (x * h_T)(n) \qquad \text{(obtenue par commutativité)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h_T(n-k) \qquad \text{(par définition du produit de convolution)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,[\delta(n-k+2) - \delta(n-k+1)] \qquad \text{(obtenue par la relation (1))} \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k+2)}_{=x(n+2)} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k+1)}_{=x(n+1)} \qquad \text{(obtenue par distributivité)} \\
&= x(n+2) - x(n+1) = T(x(n))
\end{aligned}$$

e) Est-ce que le système est **causal** ?

Rappel. Le système est dit **causal** si le signal d'entré est borné alors le signal de sortie est borné.

Puisque nous n'avons pas d'information sur le signal d'entré $x(n)$ alors nous ne pouvons rien conclure.

Par exemple, prenons :

- $x(n) = 2^n \Rightarrow |x(n)| = |2^n| = 2^n \nleq M, \forall n$ ainsi le signal d'entré n'est pas causal.
- $x(n) = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow |x(n)| = |1 - \frac{1}{2^n}| \leq 1,\ \forall n$ ainsi le signal d'entré est causal.

f) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du système ?

La fonction de transfert $H(z)$ d'un système étant définie par

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_T(k) z^{-k} \qquad \text{et comme} \quad h_T(n) = \delta(n+2) - \delta(n+1)$$

Alors

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_T(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(k+2) - \delta(k+1)]\, z^{-k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k+2)\, z^{-k}}_{\text{si } k=-2,\ \delta(k+2)=1} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k+1) z^{-k} \\
&= z - 1
\end{aligned}$$

Conclusion. La fonction de transfert $H(z)$ demandé est :

$$\boxed{H(z) = z - 1}$$

---

Remarque. Ici il fallait se rappeler que

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \delta(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k+1 = 0 \iff k = -1 \\ 0 & \text{si} \quad k+1 \neq 0 \iff k \neq -1 \end{cases}$$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

**Exercice 4**

*Soit les suites $f(n)$ et $g(n)$ dont les valeurs sont inscrites au tableau suivant. Calculez le produit de convolution : $(f * g)(n)$ de ces suites pour $n = -1, 0, 1, 2$. Notez que pour $n \neq -1, 0, 1, 2$, $f(n) = g(n) = 0$.*

| $n$ | *-1* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | *1* | *2* | *0* | *-3* |
| $g(n)$ | *0* | *1* | *1* | *1* |
| $(f * g)(n)$ | | | | |

*Calculez le produit de convolution : $(f * g)(n)$ de ces suites pour $n = -1, 0, 1, 2$ à l'aide de*

*a) La définition :*

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

*b) La méthode tabulaire.*

*Inscrivez vos réponses dans un tableau semblable à celui ci-dessus.*
*Justifiez vos réponses.*

**Solution 4**

a) Basons nous sur la formule générale :

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=-1}^{2} f(k)\, g(n-k)$$

Note: Puisque $n$ varie de -1 à 2, alors pour $k$ on doit sommer de -1 à 2 également.
Ainsi

$$\begin{aligned}(f*g)(-1) &= \sum_{k=-1}^{2} f(k)\,g(n-k) = \underbrace{f(-1)}_{=1}\underbrace{g(-1+1)}_{=g(0)=1} + \underbrace{f(0)}_{=2}\underbrace{g(-1-0)}_{=g(-1)=0} \\ &\quad + \underbrace{f(1)}_{=0}\underbrace{g(-1-1)}_{=g(-2)=0} + \underbrace{f(2)}_{=-3}\underbrace{g(-1-2)}_{=g(-3)=0} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f*g)(0) &= \sum_{k=-1}^{2} f(k)\,g(n-k) = \underbrace{f(-1)}_{=1}\underbrace{g(0-(-1))}_{=g(1)=1} + \underbrace{f(0)}_{=2}\underbrace{g(0-0)}_{=1} \\ &\quad + \underbrace{f(1)}_{=0}\underbrace{g(0-1)}_{=g(-1)=0} + \underbrace{f(2)}_{=-3}\underbrace{g(0-2)}_{=g(-2)=0} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f*g)(1) &= \sum_{k=-1}^{2} f(k)\,g(n-k) = \underbrace{f(-1)}_{=1}\underbrace{g(1-(-1))}_{=g(2)=1} + \underbrace{f(0)}_{=2}\underbrace{g(1-0)}_{=1} \\ &\quad + \underbrace{f(1)}_{=0}\underbrace{g(1-1)}_{=1} + \underbrace{f(2)}_{=-3}\underbrace{g(1-2)}_{=g(-1)=0} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f*g)(2) &= \sum_{k=-1}^{2} f(k)\,g(n-k) = \underbrace{f(-1)}_{=1}\underbrace{g(2-(-1))}_{=g(3)=0} + \underbrace{f(0)}_{=2}\underbrace{g(2-0)}_{=1} \\ &\quad + \underbrace{f(1)}_{=0}\underbrace{g(2-1)}_{=1} + \underbrace{f(2)}_{=-3}\underbrace{g(2-2)}_{=1} = -1\end{aligned}$$

Donc

| $n$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 2 | 0 | -3 |
| $g(n)$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $(f*g)(n)$ | 1 | 3 | 3 | -1 |

b) Faire un tableau comme vu en classe