Le planimètre

MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

23 octobre 2024

Contexte

Considérons le problème suivant : étant donné une courbe fermée irrégulière du monde physique, comment déterminer l'aire délimitée par cette courbe ? Par exemple,

- étant donné une carte géographique, déterminer la superficie d'un lac dont on connaît le contour.

Contexte

Considérons le problème suivant : étant donné une courbe fermée irrégulière du monde physique, comment déterminer l'aire délimitée par cette courbe ? Par exemple,

- étant donné une carte géographique, déterminer la superficie d'un lac dont on connaît le contour.
- sur une photographie, déterminer l'aire d'une région d'intérêt.

Contexte

Considérons le problème suivant : étant donné une courbe fermée irrégulière du monde physique, comment déterminer l'aire délimitée par cette courbe ? Par exemple,

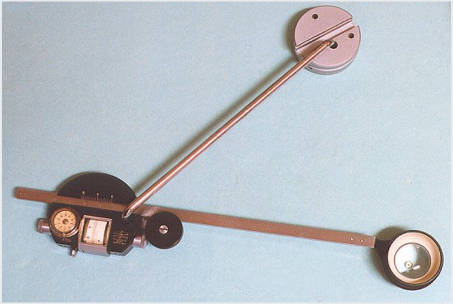
- étant donné une carte géographique, déterminer la superficie d'un lac dont on connaît le contour.
- sur une photographie, déterminer l'aire d'une région d'intérêt.
- lors de la construction d'un navire, calculer l'aire réelle d'une section de la coque à partir de son contour.

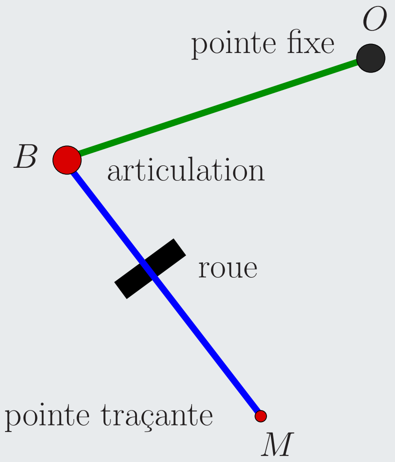
Contexte

Considérons le problème suivant : étant donné une courbe fermée irrégulière du monde physique, comment déterminer l'aire délimitée par cette courbe ? Par exemple,

- étant donné une carte géographique, déterminer la superficie d'un lac dont on connaît le contour.
- sur une photographie, déterminer l'aire d'une région d'intérêt.
- lors de la construction d'un navire, calculer l'aire réelle d'une section de la coque à partir de son contour.
- ...

Fonctionnement du planimètre (1)





Fonctionnement du planimètre (2)

- Un planimètre est formé de deux bras reliés par une articulation.

Fonctionnement du planimètre (2)

- Un planimètre est formé de deux bras reliés par une articulation.
- L'une des extrémités est fixe tandis que l'autre est mobile.

Fonctionnement du planimètre (2)

- Un planimètre est formé de deux bras reliés par une articulation.
- L'une des extrémités est fixe tandis que l'autre est mobile.
- Une roue est attachée au deuxième bras. Son axe est parallèle à ce bras, de sorte que la roue roule seulement lors d'un mouvement perpendiculaire au deuxième bras.

Fonctionnement du planimètre (2)

- Un planimètre est formé de deux bras reliés par une articulation.
- L'une des extrémités est fixe tandis que l'autre est mobile.
- Une roue est attachée au deuxième bras. Son axe est parallèle à ce bras, de sorte que la roue roule seulement lors d'un mouvement perpendiculaire au deuxième bras.
- Pour calculer l'aire entourée par une courbe quelconque, on déplace la pointe mobile le long de la courbe.

Fonctionnement du planimètre (2)

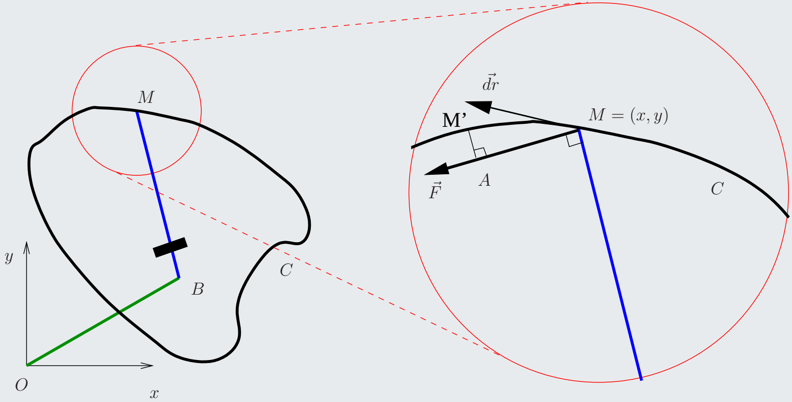
- Un planimètre est formé de deux bras reliés par une articulation.
- L'une des extrémités est fixe tandis que l'autre est mobile.
- Une roue est attachée au deuxième bras. Son axe est parallèle à ce bras, de sorte que la roue roule seulement lors d'un mouvement perpendiculaire au deuxième bras.
- Pour calculer l'aire entourée par une courbe quelconque, on déplace la pointe mobile le long de la courbe.
  Le nombre de tours faits par la roue est proportionnel à l'aire entourée, qui est lue sur un compteur fixé au planimètre.

Principe mathématique (1)

Pour simplifier, on suppose que les deux bras du planimètre ont une longueur égale à 1.

Principe mathématique (1)

Pour simplifier, on suppose que les deux bras du planimètre ont une longueur égale à 1.



Principe mathématique (2)

- Soit $M = (x, y)$ un point de la courbe, $\overrightarrow{BM}$ le segment reliant M à l'articulation du planimètre et $\vec{F}(x, y)$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$ au point M.

Principe mathématique (2)

- Soit $M = (x, y)$ un point de la courbe, $\overrightarrow{BM}$ le segment reliant M à l'articulation du planimètre et $\vec{F}(x, y)$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$ au point M.
- Lorsque la point traçante du planimètre se déplace le long d'un petit arc MM', la distance parcourue le long de la courbe est environ égale à la norme du petit déplacement

$$\vec{dr} = \vec{r}'(t)\, dt.$$

Principe mathématique (3)

- La distance parcourue perpendiculairement à $\overrightarrow{BM}$ est donc approximativement égale à la composante de $\vec{dr}$ dans la direction de $\vec{F}$, c'est-à-dire à $\vec{F} \cdot \vec{dr}$.

Principe mathématique (3)

- La distance parcourue perpendiculairement à $\overrightarrow{BM}$ est donc approximativement égale à la composante de $\vec{dr}$ dans la direction de $\vec{F}$, c'est-à-dire à $\vec{F} \cdot \vec{dr}$.
- Puisque la roue ne peut rouler que dans la direction perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$, par construction, $\vec{F} \cdot \vec{dr}$ est la distance roulée le long du petit arc MM' et la distance roulée totale est

$$\boxed{d = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}.}$$

Calculs (1)

- Soit $a(x, y)$ et $b(x, y)$ les coordonnées de l'articulation.

Calculs (1)

- Soit $a(x, y)$ et $b(x, y)$ les coordonnées de l'articulation.
- On a
$$\overrightarrow{BM} = (x - a(x, y))\,\vec{i} + (y - b(x, y))\,\vec{j}.$$

Calculs (1)

- Soit $a(x, y)$ et $b(x, y)$ les coordonnées de l'articulation.
- On a
$$\overrightarrow{BM} = (x - a(x, y))\,\vec{i} + (y - b(x, y))\,\vec{j}.$$

Exercice 1

À partir de l'expression ci-dessus, trouvez un vecteur unitaire $\vec{F}(x, y)$ perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$ pour tous (x, y).

Calculs (1)

- Soit $a(x, y)$ et $b(x, y)$ les coordonnées de l'articulation.
- On a
$$\overrightarrow{BM} = (x - a(x, y))\,\vec{i} + (y - b(x, y))\,\vec{j}.$$

Exercice 1

À partir de l'expression ci-dessus, trouvez un vecteur unitaire $\vec{F}(x, y)$ perpendiculaire à $\overrightarrow{BM}$ pour tous (x, y).

Exercice 2

Soit P et Q les composantes de $\vec{F}$ trouvées à l'exercice 1. Montrez que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - \frac{\partial a}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Calculs (2)

Puisque chacun des bras est de longueur 1, on peut écrire

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = & 1 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 & = & 1. \end{cases}$$

Calculs (2)

Puisque chacun des bras est de longueur 1, on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

En dérivant ces deux équations par rapport à x, on obtient les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\dfrac{\partial a}{\partial x}+b\dfrac{\partial b}{\partial x} & = & 0 \\ (x-a)\dfrac{\partial a}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial b}{\partial x} & = & x-a. \end{array}\right.$$

Calculs (3)

Résolvant ce système pour $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial x}$, on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{b(x-a)}{bx-ay}.$$

(La valeur de $\frac{\partial b}{\partial x}$ n'est pas pertinente ici).

Calculs (3)

Résolvant ce système pour $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial x}$, on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{b(x-a)}{bx-ay}.$$

(La valeur de $\frac{\partial b}{\partial x}$ n'est pas pertinente ici).

Exercice 3 (facultatif)

Résoudre le système pour obtenir la solution ci-dessus.

Calculs (4)

De façon semblable, on peut déterminer $\frac{\partial b}{\partial x}$. On obtient

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{b(x-a)}{bx-ay}.}$$

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{a(y-b)}{ay-bx}.}$$

Exercice 4

À l'aide de ces deux formules, montrez que

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.}$$

Calculs (5)

À l'aide du résultat précédent et du théorème de green, on trouve finalement

$$d = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 1 \, dA = \text{aire}(D),$$

Calculs (5)

À l'aide du résultat précédent et du théorème de green, on trouve finalement

$$d = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA = \iint_D 1 \, dA = \text{aire}(D),$$

donc

$$\boxed{d = \text{aire}(D).}$$

Calculs (5)

À l'aide du résultat précédent et du théorème de green, on trouve finalement

$$d = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D 1 \, dA = \text{aire}(D),$$

donc

$$\boxed{d = \text{aire}(D).}$$

La distance roulée est égale (proportionnelle) à l'aire délimitée par C.

Conclusion

En choisissant adéquatement le champ $\vec{F}$, le théorème de Green permet de montrer que le planimètre donne une mesure de l'aire d'une région dont on peut tracer le contour.