Oscillations dans les systèmes mécaniques et circuits électriques

[MTH1115] - Groupe 2 - Heures 15, 16

I.El Hallaoui, M.El Fassi
issmail.el-hallaoui@polymtl.ca

February 13, 2024

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Plan

Introduction:

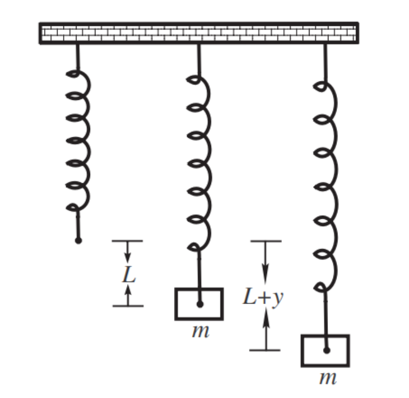
✍ Reprenons, en termes plus physiques, l'étude des **équations linéaires du deuxième ordre avec des coefficients constants**, qui apparaissent fréquemment lors de la modélisation de processus physiques classiques, tels que **les oscillations d'un système mécanique masse-ressort** et **la circulation d'un courant électrique dans un circuit branché en série**. Ces phénomènes peuvent être décrits par la résolution d'un problème de valeur initiale de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(t), \; y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'. \qquad (1)$$

✍ Une fois que l'on a résolu le problème de valeur initiale (1), il suffit d'interpréter les constantes a, b et c, ainsi que les fonctions y et g, afin d'obtenir les solutions à divers problèmes de nature physique.

Système masse-ressort:

Considérons un objet de masse m suspendu à l'extrémité d'un ressort vertical. Le poids de l'objet induit un étirement initial L du ressort vers le bas (la direction positive du déplacement).



Système masse-ressort:

✍ Quand la masse est au repos. Deux forces agissent au point où la masse est attachée au ressort. **La force gravitationnelle** est donée par mg, tandis que **la force exercée par le ressort**, quand l'étirement L est petit, est proportionnelle à L:

$$F_r = -kL$$

où la constante $k(>0)$ est **le coefficient de raideur du ressort**. On a donc, à l'équilibre:

$$mg = kL \tag{2}$$

✍ Supposons que l'objet est déplacé à l'instant $t = 0$. Soit $y(t)$ le déplacement de l'objet par rapport à son point d'équilibre à l'instant t. Par **la deuxième loi du mouvement de Newton**, on peut écrire que l'accélération $y"(t)$ de l'objet satisfait à l'équation

$$my"(t) = f(t) \tag{3}$$

où $f(t)$ est la force nette qui agit sur cet objet à l'instant t.

Système masse-ressort (suite):

Pour établir la nature de f, on doit considérer quatre forces distinctes :

1. Le poids de l'objet, $P = mg$, qui agit toujours vers le bas. On a négligé ici la masse du ressort par rapport à la masse de l'objet qui y est attaché.
2. La force appliquée par le ressort (tension du ressort)
$$F_r = -k(L + y(t))$$
3. La force d'amortissement F_d agit toujours dans la direction opposée à celle du mouvement de l'objet (vers le haut) et vaut
$$F_d = -\gamma y'(t)$$
où γ est une **constante d'amortissement**.
4. Une force externe $F(t)$ dirigée soit vers le bas, soit vers le haut (la force externe $F(t)$ est alors respectivement positive ou négative).

Système masse-ressort (suite):

✍ En considérant ces forces, on peut réécrire la loi de Newton (3) comme suit :

$$my''(t) = mg - k(L + y(t)) - \gamma y'(t) + F(t) \tag{4}$$

Puisque $mg - kL = 0$ selon l'équation (2), il s'ensuit que l'équation décrivant le mouvement de l'objet est

$$my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F(t) \tag{5}$$

où les constantes m, γ et k sont positives.

✍ La formulation complète de ce problème d'oscillation demande qu'on précise deux conditions initiales: la position initiale y_0 et la vitesse initiale v_0 de l'objet. On a

$$y(0) = y_0, \; y'(0) = v_0 \tag{6}$$

Oscillations libres non amorties:

✍ Si aucune force externe ne s'applique et qu'il n'y a aucun amortissement, c'est-à-dire $F(t) = 0$ et $\gamma = 0$ dans l'équation (5), on parle **d'oscillations libres non amorties**. Alors, l'équation du mouvement (5) est réduite à

$$my'' + ky = 0 \tag{7}$$

L'équation caractéristique correspondant à l'équation (7) est

$$mr^2 + k = 0$$

et ses racines sont $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Oscillations libres non amorties (suite):

✍ La solution générale de cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants est

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \tag{8}$$

où

$$\omega_0^2 := \frac{k}{m}$$

est dite **la fréquence naturelle** de l'oscillation mesurée en radians par unité de temps. La **période** du mouvement est alors

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

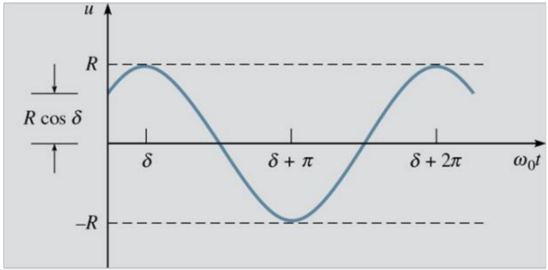
Oscillations libres non amorties (suite):

- En utilisant la formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ on peut réécrire la solution (8) sous la forme

$$y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

où la constante $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ est telle que $c_1 = R\cos\delta$ et $c_2 = R\sin\delta$. De là, on déduit que $\tan\delta = \frac{c_2}{c_1}$. L'écart maximal R est dite **l'amplitude** du mouvement et le paramètre adimensionnel δ est **la phase** (ou l'angle de phase).

- Mouvement harmonique simple:



Oscillations libres amorties:

✍ En présence d'une force d'amortissement et en l'absence d'une force externe, on parle d'**oscillations libres amorties**. L'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet est

$$my'' + \gamma y' + ky = 0 \tag{9}$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$mr^2 + \gamma r + k = 0 \tag{10}$$

✍ Selon le signe de $\gamma^2 - 4km$, la solution $y(t)$ a l'une des formes suivantes:

1. $\gamma^2 - 4km > 0$
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{11}$$
2. $\gamma^2 - 4km = 0$
$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \tag{12}$$
3. $\gamma^2 - 4km < 0$

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}[c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t], \text{où } \mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} \tag{13}$$

Oscillations libres amorties (suite):

✍ Lorsque $\gamma^2 - 4km > 0$: Les deux racines r_1 et r_2 sont négatives, et par conséquent, $y(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. De plus, **il n'y a pas d'oscillations** dans ce cas. On dit que le mouvement est **suramorti**.

✍ Lorsque $\gamma^2 - 4km = 0$: Comme ci-dessus, la fonction $y(t)$ tend vers zéro, lorsque tend t vers l'infini, **sans oscillations**. L'amortissement correspondant à $\gamma = 2\sqrt{km}$ est dit **critique.**

✍ Lorsque $\gamma^2 - 4km < 0$: C'est le cas le plus important, qui survient lorsque la force d'amortissement est faible. Si on pose $c_1 = R\cos\delta$ et $c_2 = R\sin\delta$, alors on obtient

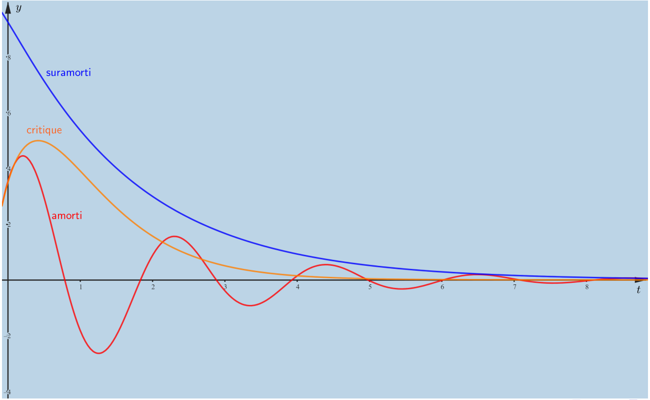
$$y(t) = Re^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\mu t - \delta)$$

Le déplacement y se situe entre les courbes $y = \pm Re^{-\frac{\gamma}{2m}t}$. Il décrit alors une onde cosinusoïdale d'amplitude décroissante. On appelle ce mouvement une **oscillation amortie**.

Remarque:

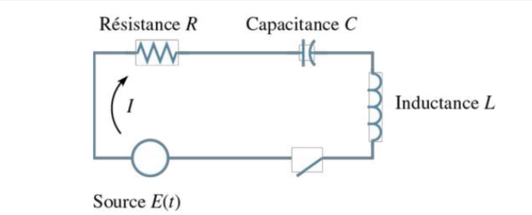
Dans les trois cas considérés ci-dessus, la fonction $y(t)$ tend vers zéro, soit la valeur qui correspond au point d'équilibre, lorsque t tend vers l'infini. Cependant, en pratique, l'objet devrait revenir à son point d'équilibre en un temps fini.

✍ On peut rassembler les résultats sur le graphique suivant:



Les circuits électriques:

- Un deuxième exemple dans lequel apparaissent des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants est un modèle du flux d'un courant électrique dans un **circuit RLC** branché en série



- Le courant $\boldsymbol{I}$ (en ampères) et la tension résultante $\boldsymbol{E}$ (en volts) sont deux fonctions du temps. La résistance $\boldsymbol{R}$ (en ohms), la capacitance $\boldsymbol{C}$ (en farads) et l'inductance $\boldsymbol{L}$ (en henrys) sont toutes positives.
- La charge totale $\boldsymbol{Q}$ (en coulombs) du condensateur au temps est

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{14}$$

Deuxième loi de Kirchhoff:

Dans un circuit fermé, la tension résultante est égale à la somme des chutes de tension dans le reste du circuit.

Les circuits élecriques (suite):

✍ Selon les lois élémentaires de l'électricité, on sait que :

1. la chute de tension aux bornes de la résistance est de IR.
2. la chute de tension aux bornes du condensateur est de $\frac{Q}{C}$.
3. la chute de tension aux bornes de l'inducteur est de $L\frac{dI}{dt}$.

✍ D'après la deuxième loi de Kirchhoff, on a

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) \tag{15}$$

En substituant l'expression de l'équation (14) dans l'équation (15), on obtient l'équation différentielle

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{16}$$

Les circuits élecriques (suite):

✍ Si on dérive l'équation (16) en fonction de t, puis on substitue I à $\frac{dQ}{dt}$, on obtient autrement une équation différentielle pour le courant I

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \tag{17}$$

avec les conditions initiales

$$I(t_0) = I_0, \quad I'(t_0) = I'_0 \tag{18}$$

A partir de (15), on trouve

$$I'_0 = \frac{E(t_0) - I_0 R - \frac{Q_0}{C}}{L}$$

Remarque:

Le flux du courant dans le circuit RLC est décrit par un problème de valeur initiale ayant précisément la même forme que le problème décrivant le mouvement d'un système masse-ressort. On a donc les correspondances suivante entre les systèmes mécaniques et électriques :

Oscillations mécaniques	**Oscillations électriques**
Position y	Charge Q dans le condensateur
Masse m	Inductance L de l'inducteur
Coeff de raideur du ressort k	$\frac{1}{C}$, l'inverse de la capacitance
Constante d'amortissement γ	Résistance électrique R
Force extérieure $F(t)$	Tension $E(t)$

Plan

Les oscillations mécaniques et les circuits électriquess

Les oscillations forcées

Exercices

Les oscillations forcées:

Dans cette partie, nous étudierons le cas où **une force externe périodique est appliquée à un système masse-ressort**. Nous commencerons par le cas où il y a de l'amortissement, puis nous examinerons le cas idéal où on suppose qu'il n'y a pas d'amortissement ($\gamma = \mathbf{0}$).

Les oscillations forcées avec amortissement:

✍ L'équation du mouvement d'un système masse-ressort général soumis à une force externe $F(t)$ est représentée par l'équation

$$my" + \gamma y' + ky = F(t) \tag{19}$$

✍ On Supposons que la force externe (parfois appelée fonction de contrainte) soit donnée par

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{20}$$

où F_0 et ω sont des constantes positives resp. l'**amplitude** et la **fréquence de la force** (ou la fréquence de contrainte)

✍ L'équation (19) devient

$$my" + \gamma y' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{21}$$

La solution générale à l'équation (21) doit être de la forme

$$y(t) = \underbrace{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)}_{\text{solu. générale } y_c(t) \text{ à l'équation homogène}} + \underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{\text{solu. particulière } y_p(t)}$$

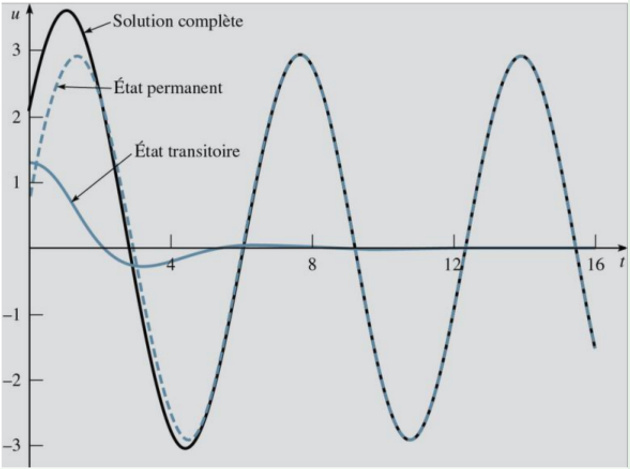
Remarque:

- ✍ Étant donné que m, γ et k sont tous positifs, les racines r_1 et r_2 sont soit réelles et négatives, soit complexes conjuguées avec une partie réelle négative. Dans les deux cas, les fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ tendent vers zéro lorsque $t \to \infty$. Par conséquent, la solution $y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ disparaît lorsque t augmente ; on l'appelle **la solution transitoire**.
- ✍ La solution $y_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ ne disparaissent pas lorsque t augmente, c'est ce qu'on appelle **la solution permanente** ou **la réponse forcé**. Elle représente une **oscillation permanente** ayant la même fréquence que la force externe.

Exemple (suite):

Considérons le problème de valeur initiale

$$u'' + u' + 1.25u = 3\cos t, \;\; u(0) = 2, \;\; u'(0) = 3$$



Les oscillations forcées avec amortissement (suite):

- On réécrit la solution particulière $y_p(t)$ sous la forme

$$y_p(t) = R\cos(\omega t - \delta) \tag{22}$$

où $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan(\delta) = \frac{B}{A}$

- On substitue la solution $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ dans l'équation (21), on obtient

$$[-mA\omega^2 + \gamma B\omega + Ak]\cos\omega t + [-mB\omega^2 - \gamma A\omega + Bk]\sin\omega t$$

$$= F_0 \cos\omega t$$

Les oscillations forcées avec amortissement (suite):

✍ Par identification, on doit avoir $\begin{cases} -mA\omega^2 + \gamma B\omega + Ak = F_0 \\ -mB\omega^2 - \gamma A\omega + Bk = 0 \end{cases}$.

Puisque $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, les deux équations devient

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\gamma}{m} B\omega = \frac{F_0}{m} \\ B(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\gamma}{m} A\omega = 0 \end{cases}.$$

✍ On a alors

$$\tan(\delta) = \frac{B}{A} = \frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

et

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

Les oscillations forcées avec amortissement (suite):

✍ Posons $T = \frac{\gamma^2}{mk}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{Rk}{F_0} &= \frac{k}{\sqrt{\gamma^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \\ &= \frac{k}{m\sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2}\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \\ &= \frac{\frac{k}{m}}{\sqrt{\frac{k}{m}T\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\end{aligned}$$

Puisque $\omega_0 = \frac{k}{m}$, on obtient

$$\frac{Rk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{T\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2}} \tag{23}$$

Les oscillations forcées avec amortissement (suite):

- ✍ A basse fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \to 0$, il s'ensuit, à partir de l'équation (23), que $\frac{Rk}{F_0} \to 1$ ou $R \to \frac{F_0}{k}$.
- ✍ A haute très fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \to \infty$, l'équation (23) implique $R \to 0$.
- ✍ Pour une valeur intermédiaire de ω, l'amplitude R peut admettre un maximum qui survient lorsque $\omega = \omega_{\max}$, où

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}$$

et

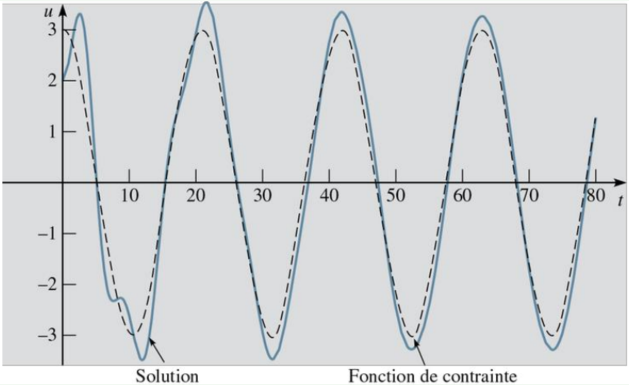
$$R_{\max} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4km}}} \approx \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right)$$

où la dernière expression est une approximation lorsque γ est petit.

Exemple:

✍ Solution à l'équation suivante avec $\omega = 0.3$

$$u" + 0.125u' + u = 3\cos 0.3t,\ \ u(0) = 2,\ \ u'(0) = 0$$



Les oscillations forcées sans amortissement:

✍ Supposons maintenant que $\gamma = 0$ dans l'équation (21). On obtient ainsi l'équation du mouvement d'un **oscillateur forcé non amorti**

$$my" + ky = F_0 \cos \omega t \tag{24}$$

✍ Considérons d'abord le cas $\omega \neq \omega_0$; la solution générale à l'équation (24) est

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \tag{25}$$

Les constantes c_1 et c_2 dans l'équation (25) sont déterminées par

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

et la solution à l'équation (24) est

$$y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \tag{26}$$

Les oscillations forcées sans amortissement (suite):

✍ En utilisant les identités trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

et

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

avec $a = \frac{(\omega+\omega_0)t}{2}$ et $b = \frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$, on peut réécrire l'équation (26) sous la forme

$$y(t) = \left[\underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \sin \frac{(\omega_0-\omega)t}{2}}_{\text{amplitude}}\right] \sin \frac{(\omega_0+\omega)t}{2} \qquad (27)$$

✍ Ce type de mouvement où l'amplitude varie de façon périodique est appelé une **pulsation**. En électronique, la variation de l'amplitude en fonction du temps est appelée **la modulation d'amplitude**.

Exemple:

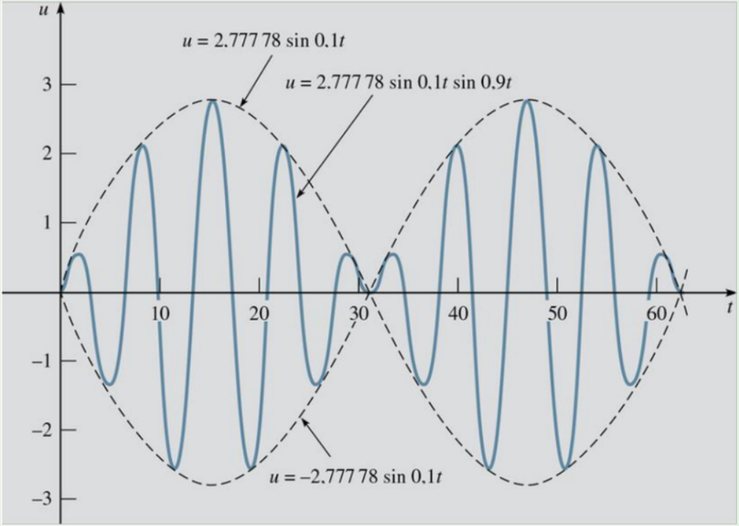
Considérons le problème de valeur initiale

$$u" + u = 0.5\cos 0.8t,\ \ u(0) = 0,\ \ u'(0) = 0$$

Dans ce cas, $\omega_0 = 1$, $\omega = 0.8$ et $F_0 = 0.5$; donc, selon l'équation (27), la solution au problème donné est

$$u(t) = 2.77778 \sin 0.1t \sin 0.9t$$

Exemple (suite):



Les oscillations forcées sans amortissement:

✍ Revenons à l'équation (24) et considérons le cas de **la résonance**, où $\omega = \omega_0$. Ainsi, le terme non homogène $F_0 \cos \omega_0 t$ est une solution à l'équation homogène. Dans ce cas, la solution à l'équation (24) est

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \tag{28}$$

Exemple:

Considérons le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 0.5\cos t,\ \ u(0) = 0,\ \ u'(0) = 0$$

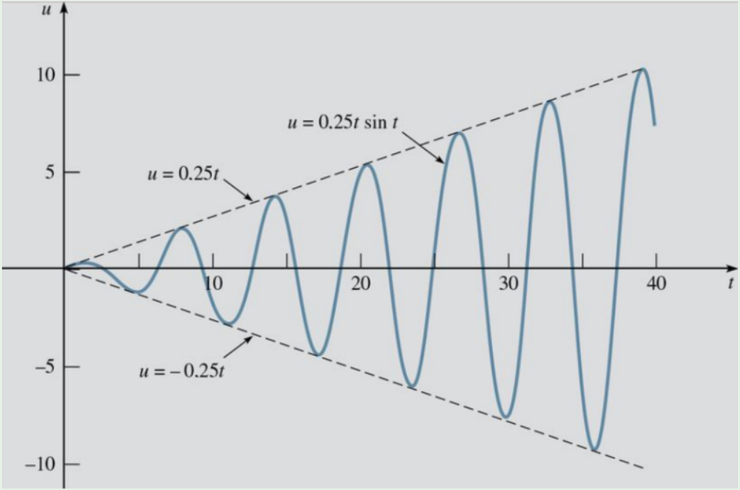
La solution générale à l'équation différentielle est

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 0.25t \sin t$$

et les conditions initiales exigent que $c_1 = c_2 = 0$. Par conséquent, la solution au problème de valeur initiale donné est

$$u = 0.25t \sin t$$

Exemple (suite):



Plan

1. CP-H2010

Les déplacements $y(t)$ d'une masse de 1 kg suspendue à un ressort de constante $k = 16\ (N/m)$, soumise à une force d'amortissement de coefficient positive $\gamma\ (Nm/s)$, sont régis par l'équation,

$$y"(t) + \gamma y'(t) + 16y = 0$$

1. Pour quelles valeurs de γ les déplacements seront du type oscillations amorties ?
2. Sans faire de calculs tracer l'allure générale du graphe d'une oscillation amortie.

2. CP-A2017

En l'absence d'un mécanisme d'amortissemt, le déplacement $y(t)$ d'un objet suspendu à ressort de constante de raideur k et soumis à une force externe périodique de la forme $\sin 2t$ est donné par le problème de valeur initiale suivant:

$$y"(t) + ky(t) = \sin 2t, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Que se produit-il lorsque $k = 4$? **On ne demande pas de résoudre le problème de valeurs initiales**.