MTH2120
Analyse appliquée
Devoir # 3

Date de remise: mercredi le 21 février 2024.

(Lors de la remise, deux questions seront choisies au hasard pour être corrigées.)

Ce devoir sera corrigé sur **10 points** avec la répartition suivante des points :

- Pour joindre la page couverture du devoir (qui est disponible sur Moodle) ; **1 point**
- Pour la correction des deux questions choisies ; **6 points**
- Si les autres questions non choisies ont été bien rédigées. **3 points** .

Lire attentivement les directives pour la remise du devoir qui sont disponibles sur Moodle.

Exercice 1

Pour cette question, l'usage d'un logiciel mathématique est permis pour les calculs intermédiaire comme : la substitution, simplification, factorisation, etc.

a) Évaluez l'intégrale

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta$$

b) De a) déduire

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 2 Évaluez l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x-i)^{30}} dx$$

Exercice 3

Vérifiez que la suite de fonctions

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N},$$

est une suite d'approximations de la distribution de Dirac $\delta(x)$.

Rappel: La suite $\delta_n(x)$ est considérée comme une suite d'approximation de $\delta(x)$ si les 3 conditions suivantes sont respectées:

$$1. \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Pour la démonstration de 3., pensez au changement de variable $x = \frac{X}{n}$ et au fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{X}{n}\right) = f(0)$$

Exercice 4 En utilisant le principe d'induction mathématique, montrez que

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \delta(x)}{x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Rappel:

- $\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

-

Principe de récurrence (induction mathématique)

Soit à démontrer une expression que l'on note $E(n)$ dans laquelle n représente la variable. Ce principe repose sur 4 étapes qui sont:

1. Vérifier que l'expression $E(n)$ est vraie pour une valeur n_0 donnée.
2. Supposer que l'expression $E(n)$ est vraie pour $n = k$ où k est une valeur non fixée. Ici il s'agit de remplacer n par k dans l'expression $E(n)$ afin d'obtenir $E(k)$.
3. Vérifier que l'expression $E(n)$ est vraie pour $n = k + 1$. Ici, il s'agit d'obtenir l'expression $E(k + 1)$ en se basant uniquement sur l'expression $E(k)$ de l'étape 2.
4. Conclure sur la validité de l'expression $E(n)$.