La conservation de l'énergie

MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

28 janvier 2024

Contexte

On considère un champ de forces $\vec{F}$ agissant sur un objet de masse m.

Contexte

On considère un champ de forces $\vec{F}$ agissant sur un objet de masse m.

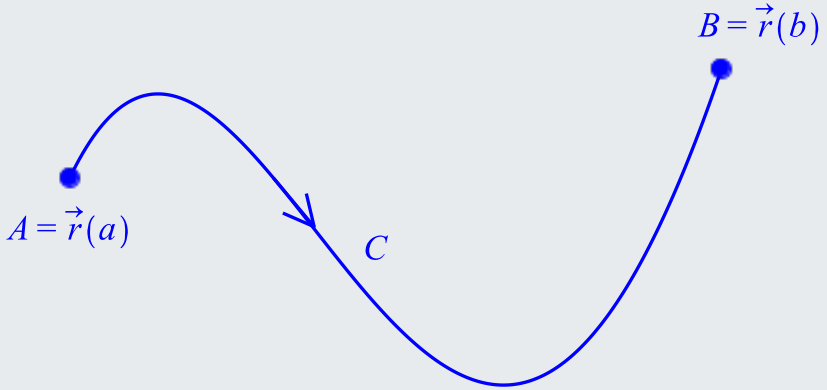
Sous l'action de $\vec{F}$, l'objet se déplace le long d'une trajectoire qui est une courbe C paramétrée par $\vec{r}(t)$, où $t \in [a, b]$ est le temps et $\vec{r}(t)$ est la position de l'objet à l'instant t.

Contexte

On considère un champ de forces $\vec{F}$ agissant sur un objet de masse m.

Sous l'action de $\vec{F}$, l'objet se déplace le long d'une trajectoire qui est une courbe C paramétrée par $\vec{r}(t)$, où $t \in [a, b]$ est le temps et $\vec{r}(t)$ est la position de l'objet à l'instant t.

Posons $A = \vec{r}(a)$, la position initiale de l'objet, et $B = \vec{r}(b)$, sa position finale.

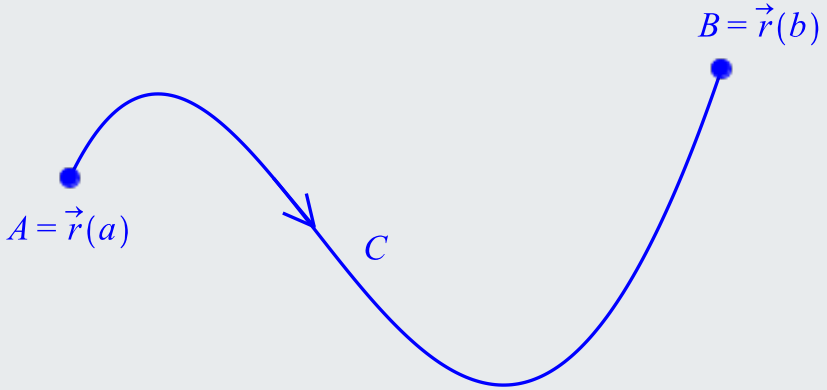


Contexte

On considère un champ de forces $\vec{F}$ agissant sur un objet de masse m.

Sous l'action de $\vec{F}$, l'objet se déplace le long d'une trajectoire qui est une courbe C paramétrée par $\vec{r}(t)$, où $t \in [a, b]$ est le temps et $\vec{r}(t)$ est la position de l'objet à l'instant t.

Posons $A = \vec{r}(a)$, la position initiale de l'objet, et $B = \vec{r}(b)$, sa position finale.



Le mouvement de l'objet est régi par la loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$, ce qui donne

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{r}''(t).$$

Calcul du travail

Exercice 1

En substituant l'équation précédente dans la formule de calcul de l'intégrale curviligne d'un champ, montrez que le travail est

$$W = \frac{m}{2}\left(||\vec{v}(b)||^2 - ||\vec{v}(a)||^2\right).$$

Énergie cinétique

Définition

On définit l'**énergie cinétique**, notée K, de l'objet au temps t par

$$K(t) = \frac{m}{2}||\vec{v}(t)||^2.$$

De façon équivalente, on peut écrire $K(\vec{r}(t)) = \frac{m}{2}||\vec{v}(t)||^2$, l'énergie cinétique au point $\vec{r}(t)$.

Énergie cinétique

Définition

On définit l'**énergie cinétique**, notée K, de l'objet au temps t par

$$K(t) = \frac{m}{2}||\vec{v}(t)||^2.$$

De façon équivalente, on peut écrire $K(\vec{r}(t)) = \frac{m}{2}||\vec{v}(t)||^2$, l'énergie cinétique au point $\vec{r}(t)$.

Formule pour le travail

Le résultat de l'exercice 1 s'exprime donc comme suit : le travail est

$$\boxed{W = K(B) - K(A),}$$

la variation d'énergie cinétique entre les points A et B.

Énergie potentielle

Définition

Si maintenant on considère un champ conservatif $\vec{F}$ alors $\vec{F} = \nabla f$, où f est un potentiel pour le champ.

Énergie potentielle

Définition

Si maintenant on considère un champ conservatif $\vec{F}$ alors $\vec{F} = \nabla f$, où f est un potentiel pour le champ.

On définit l'**énergie potentielle** de l'objet au point $\vec{r}(t)$ par

$$P(\vec{r}(t)) = -f(\vec{r}(t)).$$

Calcul du travail pour un champ conservatif

Exercice 2

En utilisant le TFIC, montrez que

$$\boxed{W = P(A) - P(B),}$$

la différence d'énergie potentielle entre les points A et B.

Conservation de l'énergie

Exercice 3

En égalant les deux formules pour le travail, montrez que

$$K(A) + P(A) = K(B) + P(B).$$

Conclusion

Conservation de l'énergie

L'énergie totale (cinétique et potentielle) est **conservée** si $\vec{F}$ est **conservatif** :

$$\boxed{K(A) + P(A) = K(B) + P(B).}$$