Exemple fonction potentielle dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z) = \overset{f_x}{\boxed{y^2}}\,\vec{i} + \overset{f_y}{\boxed{\left(2xy + e^{3z}\right)}}\,\vec{j} + \overset{f_z}{\boxed{3y\,e^{3z}\,\vec{k}}}$$

Integrat° en x

$$f(x,y,z) = \boxed{xy^2 + g(y,z)}$$

dérivation en y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)$$

par identification, on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{3z}$$

intégration en y

$$g(y,z) = y\,e^{3z} + h(z)$$

Etat actuel du problème:

$$f(x,y,z) = xy^2 + y\,e^{3z} + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 3y\,e^{3z} + h'(z)$$

par identification, $h'(z) = 0$

donc $h(z) = K, \ \forall K \in \mathbb{R}$

Les fonctions potentielles de $\vec{F}$ sont donc toutes les fonctions:

$$f(x,y,z) = xy^2 + y\,e^{3z} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Autre exemple :

$$\vec{F}(x,y,z) = \underbrace{\boxed{(y^2 z + 2xz^2)}}_{f_x}\,\vec{i} + \underbrace{\boxed{2xyz}}_{f_y}\,\vec{j} + \underbrace{\boxed{(xy^2 + 2x^2 z)}}_{f_z}\,\vec{k}$$

intégration en x :

$$f(x,y,z) = xy^2 z + x^2 z^2 + h(y,z)$$

dérivation en y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xyz + 0 + \frac{\partial h}{\partial y}(y,z)$$

→ par identification : $\frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = 0$

$$\Rightarrow h(y,z) = g(z)$$

Etat du problème :

$$f(x,y,z) = xy^2 z + x^2 z^2 + g(z)$$

dérivation en z

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy^2 + 2x^2 z + g'(z)$$

Par identification, $g'(z) = 0$ donc les solutions sont de la forme :

$$f(x,y,z) = xy^2 z + x^2 z^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}$$