MEC6212 : MODULE GÉOMÉTRIE

Introduction

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
16 janvier 2025

Table des matières

Historique

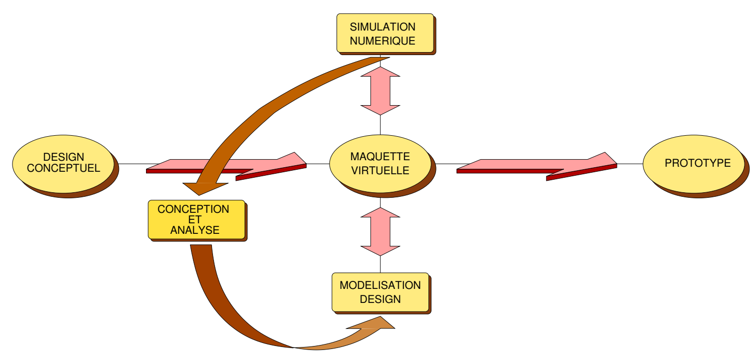
Dans la géométrie classique, les courbes et surfaces sont caractérisées par des équations analytiques, d'où l'élégance de leur représentation et une certaine efficacité.

- *Dans la pratique courante les exigences dépassent largement les possibilités offertes par les modèles de la géométrie classique.*
- *Pour palier aux limites de ces formes élémentaires, l'ingénieur a développé des méthodes semi-analytiques qui étaient une combinaison de techniques graphiques et de formules analytiques.*

Bien que longs et fastidieux, ce type de calculs à permis des développements considérables dans les domaines de l'automobile, la onstruction navale et l'aéronautique.

La maquette virtuelle

Pour automatiser le passage de l'information géométrique au travers des différentes phases du processus de développement d'un produit (conception préliminaire, design détaillé, maquette, construction de prototype ....), on adopte une représentation et des manipulations qui se prêtent aux exigences de chacune de ces étapes.



La Modélisation Géométrique

1. *La modélisation géométrique désigne l'ensemble des méthodes utilisées pour la définition et la représentation informatique de la géométrie des objets du point de vue de leurs formes et de leurs propriétés géométriques.*
2. *Dans un contexte de simulation numérique, la description d'un problème comprend l'analyse et la synthèse des formes géométriques. Ce qui implique d'autres fonctions telles que le calcul d'intersections, des projections, ou de discrétisation, d'ordonnancement des diverses entités etc.. qui utilisent des informations contenues dans les modèles géométriques.*

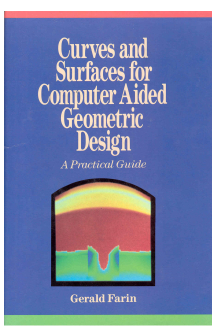
Stuctures de données

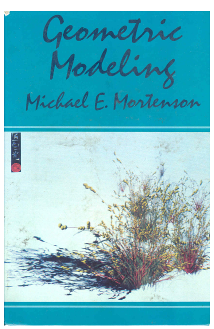
Le processus de génération de maillages dépend fortement sur la modélisation géométrique pour la définition et la représentation informatique de la géométrie des domaines de calcul.

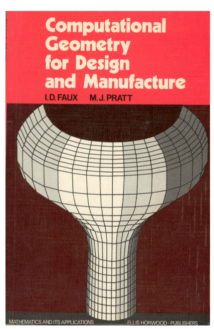
1. *L'ensemble de ces informations servent à l'élaboration des structures de données pour l'implémentation des algorithmes de calcul.*
2. *Les techniques de stockage et de traitement des données géométriques sont relativement indépendantes des applications particulières.*
3. *Des méthodes génériques peuvent donc être utilisées pour construire des modèles d'objets les plus divers, dans des champs d'applications les plus variés.*

Bibliographie

- *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design : A Practical Guide* Gerald Farin, Academic Press Inc. (Londres) 1988.
- *Geometric Modeling* Michael E. Mortenson. John Wiley and Sons, 1985.
- *Computational Geometry for Design and Manufacture* I.D. Faux and M.J. Pratt Ellis Horwood Limited, Chichester, 1979.







Problématique

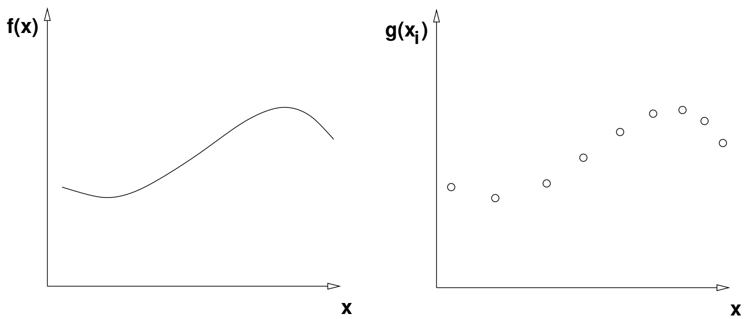
La représentation informatisée (discrète) des frontières dans les problèmes de génie se base sur un nombre fini d'informations (c-à-d généralement des points) plutôt que sur une relation analytique.
Contrairement à un modèle continu, il faut donc utiliser une forme d'interpolation pour restituer la géométrie à des positions autres que ces points.

1. *Comment restituer l'information manquante dans la représentation discrète ?*
2. *Comment mesurer la qualité de l'approximation ?*

Représentation numérique

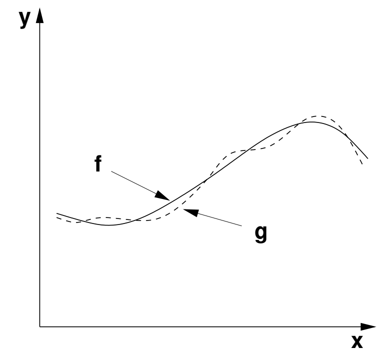
À l'aide d'un nombre fini de points x_i, on construit une approximation,

$$f(x) \approx g(x_i)$$



Mesure de l'erreur

Les critères de qualité de l'approximation d'une fonction $f(x)$ par une fonction approximante $g(x)$ s'apparentent à la notion de distance exprimée mathématiquement par une norme.



A partir de l'erreur d'approximation,

$$e = \mid f(x) - g(x) \mid$$

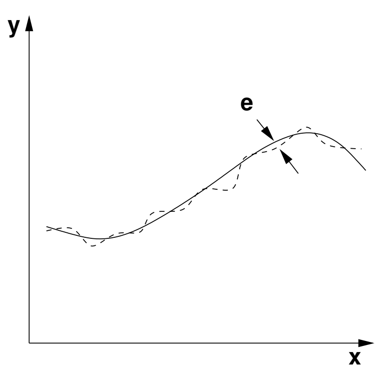
sur l'intervalle $x_0 \leq x \leq x_n$,, on caractérise l'erreur globale avec les normes :

dans l'espace continu	**dans l'espace discret**
$\int_{x_0}^{x_n} \mid f(x) - g(x) \mid^2 dx$	$\sum_{i=0}^{n} \mid f(x_i) - g(x_i) \mid^2$

Autres critères

1. Les méthodes traditionnelles utilisent des polynômes de collocation dont le degré est égal au nombre de points moins un (pour une courbe).
2. Les caractéristiques de ces polynômes sont telles qu'ils oscillent entre les points de collocation.

- *On peut obtenir une erreur plus faible en resserrant le critère d'erreur et en augmentant le nombre de points.*
- *À cause du caractère oscillatoire des polynômes d'approximation, la fonction approximante ne rend pas correctement l'allure de la courbe.*



Définitions

Courbe/surface : un ensemble de points dont les coordonnées, (x, y), vérifient une relation.

$$F(\vec{x}) = 0$$

Représentation : ensemble des informations et structures informatiques qui décrivent une courbe.

Il existe plusieurs types de représentation de courbes :

- explicite
- implicite
- paramétrique

Représentation explicite

Pour un point $\vec{P} = (x, y, z)$ sur la courbe, une des coordonnées est exprimé explicitement en fonction des autres coordonnées :

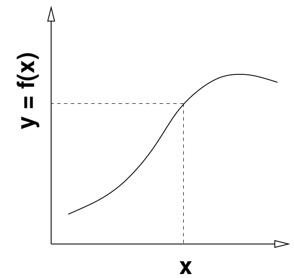
$$y = f(x)$$

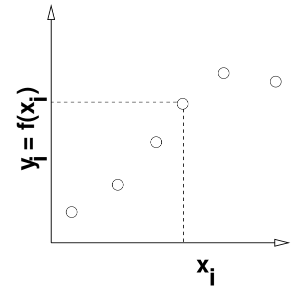
En variant x, on engendre y, et ainsi l'ensemble des points constituant la courbe.

Simlairement, pour un espace discret, un point $\vec{P}_i$,

$$y_i = f(x_i)$$

En variant l'indice i,dans x_i, on engendre y_i constituant ainsi une représentation discrète de la courbe.





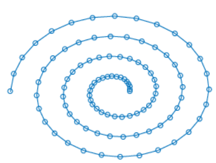
✔ Cette représentation est bien adaptée à la production de graphes, pour laquelle cette simplicité procure plusieurs avantages.

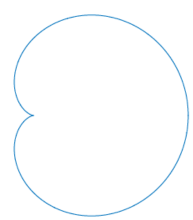
$$\boxed{y = f(x) \rightarrow y_i = f(x_i)}$$

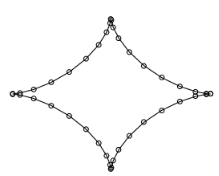
✘ Par contre, pour certain type de courbes, cette construction présente quelques difficultés :

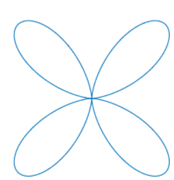
Par exemple,

- courbes fermées ;
- intersections de la courbe avec elle-même ;
- points de rebroussement ;
- pente infinie.









Représentation implicite

Ensemble des points dont les coordonnées vérifient une relation de la forme suivante :

$$C = \{\mathbf{P}(x, y) \text{ tel que } F(x, y) = 0\}$$

Cette façon de définir une courbe est,

✔ *qualitative ou restrictive, c'est-à-dire que les points de la courbe sont les points du plan qui vérifient une certaine condition ;*

✔ *très utile pour déterminer l'appartenance d'un point à la courbe ou bien pour identifier l'intérieur ou l'extérieur d'un objet.*

Bien que cette forme contourne les difficultés de la forme explicite,

✘ *elle présente une certaine lourdeur pour la construction des points de la courbe.*

✘ *et, les calculs sont difficiles et généralement pas possible par des méthodes directes. On doit recourir à des techniques itératives.*

Représentation paramétrique

Ensemble de relations (une par coordonnée) qui expriment chaque coordonnée explicitement par une fonction d'un paramètre :

$$\vec{P} = (x, y, z) \text{ où } \begin{aligned} x &= f(u) \\ y &= g(u) \\ z &= h(u) \end{aligned}$$

Le paramètre u varie sur l'intervalle de définition que l'on prend, sans perte de généralité :

$$0 \leq u \leq 1$$

En parcourant la plage du paramètre, on associe trois coordonnées, x, y et z à chaque valeur de u ; ce qui engendre l'ensemble des points de la courbe.

Contrairement à la représentation implicite, qui ne donne que la relation que doivent vérifier les coordonnées, la définition d'une courbe paramétrique est constructive :

- *cette représentation donne la méthode pour calculer les coordonnées de l'ensemble des points, c-à-d comment construire de la courbe ;*
- *la forme explicite est également constructive, mais peut être ambigue.*

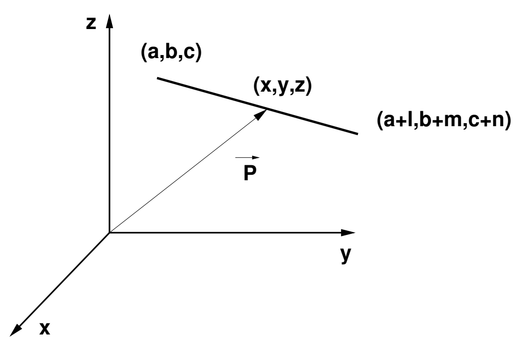
La forme paramètrique évite toutes les difficultés associées à la forme explicite ou à la forme implicite :

- de courbes fermées ;
- des points de rebroussement ;
- de pente infinie.

Une droite

La représentation paramètrique d'une droite est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{P_0} + u(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \\ \text{avec} \quad x &= a + lu \\ y &= b + mu \\ z &= c + nu \end{aligned}$$

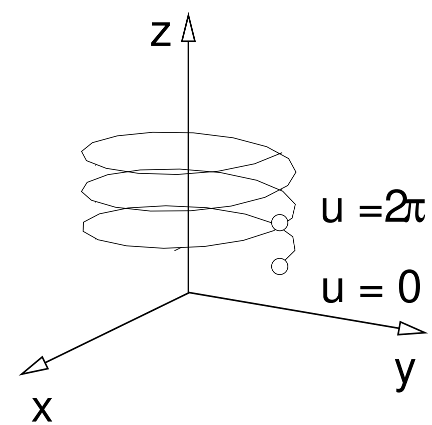


où $\vec{P_0} = (a, b, c)$ indique le début de la droite, correspondant au paramètre $u = 0$, et $\vec{P_1} = (a + l, b + m, c + n)$ indique l'autre extrémité correspondant à $u = 1$.

Une spirale

La représentation paramètrique d'une spirale circulaire de rayon r est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \sin u \\ z &= bu \end{aligned}$$



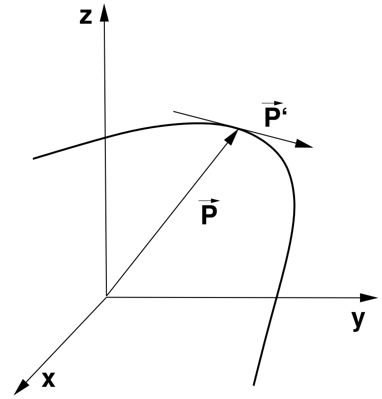
où le paramètre u peut s'interpréter comme l'angle du vecteur position avec l'axe des x et donne un pas égal à b pour :

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

Le vecteur tangent

Le vecteur tangent à une courbe est obtenu par la dérivée du vecteur position par rapport à u :

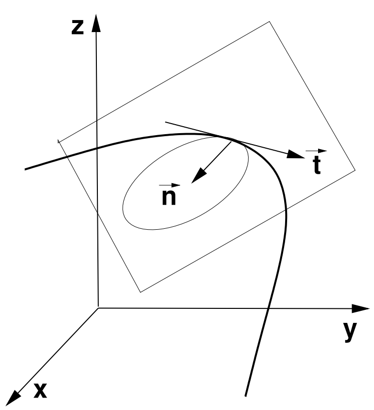
$$\begin{aligned} \vec{P}'(u) &= \frac{d\vec{P}(u)}{du} \\ &= (\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}) \end{aligned}$$



Le vecteur normal

La normale $\vec{n}$ est un vecteur dirigé vers le centre du cercle tangent.

- En 2-d, la normale à la courbe est bien définie.
- Par contre, en 3-d, il existe une infinité de possibilités ; tout vecteur perpendiculaire au vecteur tangent sera une normale à la courbe.



En particulier, pour tout vecteur $\vec{t}$,

$$\begin{aligned} \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{du} &= 0 \\ \vec{t} &\perp \frac{d\vec{t}}{du}. \end{aligned}$$

Donc, on peut définir sans ambiguité la normale principale,

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{du}$$

La courbure

Le rayon ρ d'un cercle tangent à la courbe donne la courbure :

$$k = \frac{1}{\rho}$$

En utilisant une paramétrisation basée sur la longueur d'arc $u = s$,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}$$

Vecteur binormal

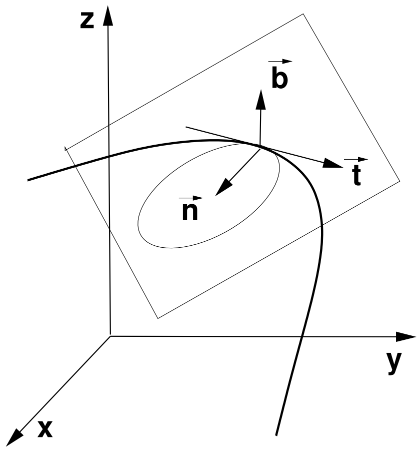
Le plan d'<u>osculation</u> est le plan sur lequel repose le cercle tangent et qui est défini par les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ qui sont orthogonaux.

La rotation du plan d'osculation est appellée la <u>torsion</u>.

$$\vec{t} \perp \vec{n}$$

On définit alors le vecteur binormal $\vec{b}$ perpendiculaire au plan d'osculation

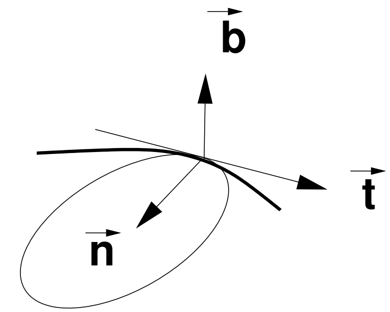
$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$



Relations de Frénet

La relation du triade $\vec{t}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$ selon s le long d'une courbe est donnée par,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= k\vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau\vec{b} - k\vec{t} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau\vec{n} \end{aligned}$$



Représentation intrinsèque

Si on choisi comme paramètre, la longueur s mesurée le long de la courbe, on dit que la paramètrisation est intrinsèque.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \right) du^2$$

La longueur de l'arc de $u = u_0$ à $u = u$ est obtenue en évaluant l'intégrale,

$$s = \int_0^s ds = \int_u^{u_0} \left(\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \right)^{1/2} du$$

Ceci permet d'établir une relation entre s et u

$$\vec{P} = (x(u), y(u), z(u)) = (x(s), y(s), z(s))$$

MEC6212 : MODULE GÉOMÉTRIE

Représentation polynomiale

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
16 janvier 2025

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

Table des matières

Représentation polynômiale

Le choix des fonctions approximantes dans la représentation de courbes est très vaste et, en principe, arbitraire. De façon générale, on construit une approximation comme une combinaison linéaire de fonctions de base telles que les polynômes, les fonctions trigonométriques, etc...

$$f(u) = \sum_{i=0}^{n} c_i g_i(u)$$

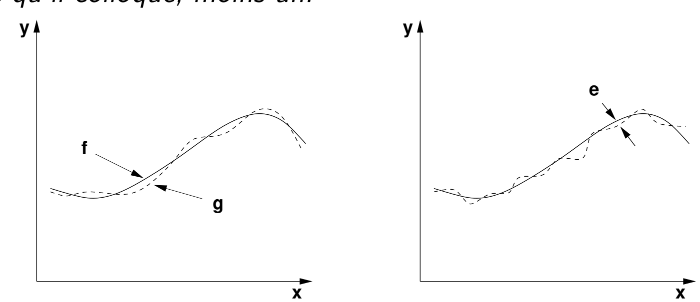
En dernière analyse, le choix des $g(u_i)$ dépendra :

- *de la facilité dans les manipulations de ces fonctions de base lors des développements ;*
- *du coût des calculs pour les évaluations.*

Dans cette optique, les polynômes présentent plusieurs avantages.

Une fonction polynomiale approxime une courbe par un nombre fini de points. Pour une bonne approximation,

- *ce polynôme aura nécessairement un degré élevé, égal au nombre de points qu'il colloque, moins un.*



- *Ceci implique des oscillations dans la courbe générée.*

Interpolation de Lagrange

Soit un ensemble de $n+1$ points,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

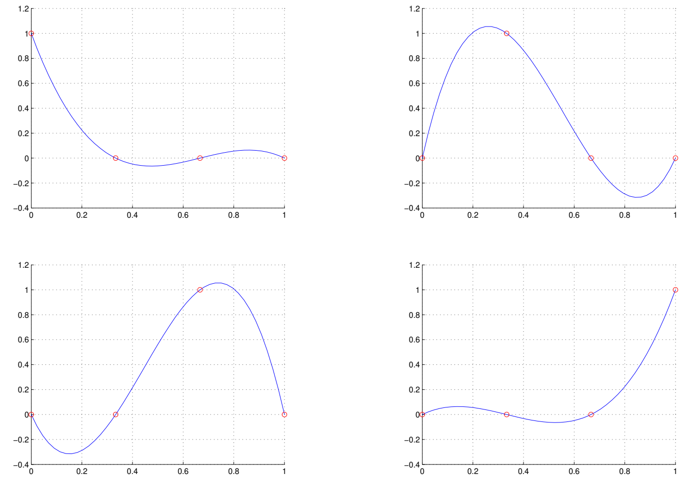
On cherche un polynôme $p_n(x)$, de degré n interpolant ces $n+1$ points (x_i, y_i), de la forme,

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x).$$

1. *Cette approximation s'interprètre comme une combinaison linéaire les polynômes de Lagrange L_k, pondérés par les valeurs des données y_k.*
2. *Le k-ème polynôme de Lagrange L_k est **l'unique** polynôme qui vérifie,*

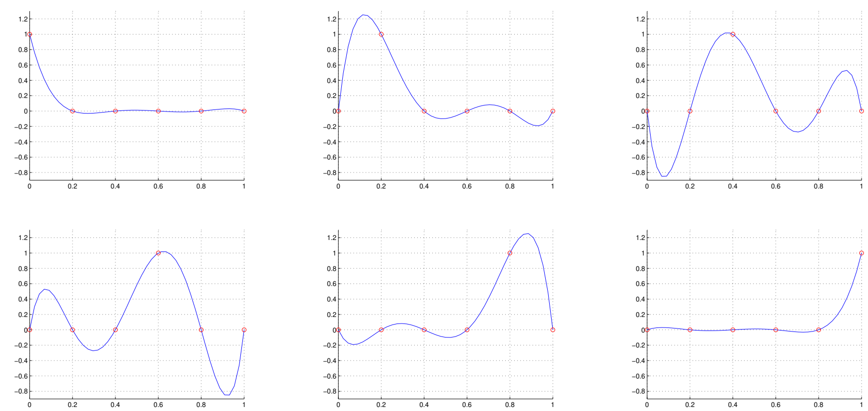
x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n
$L_k(x)$	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0

La caractéristique principale de ce polynôme L_k est qu'il s'annule à tous les points de collocation, sauf au point x_k, où il vaut 1.
Par exemple, pour les 4 polynômes de degré 3, L_k $k = 1 \ldots 4$,



$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ &+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &+ f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

Similairement, pour les 6 polynômes de degré 5, L_k $k = 1 \ldots 6$,



On construit les $n+1$ polynômes de Lagrange

$$L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x).$$

à partir de l'écriture

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_k)\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_n)}$$

On note que le terme

$$\frac{(x-x_k)}{(x_k-x_k)}$$

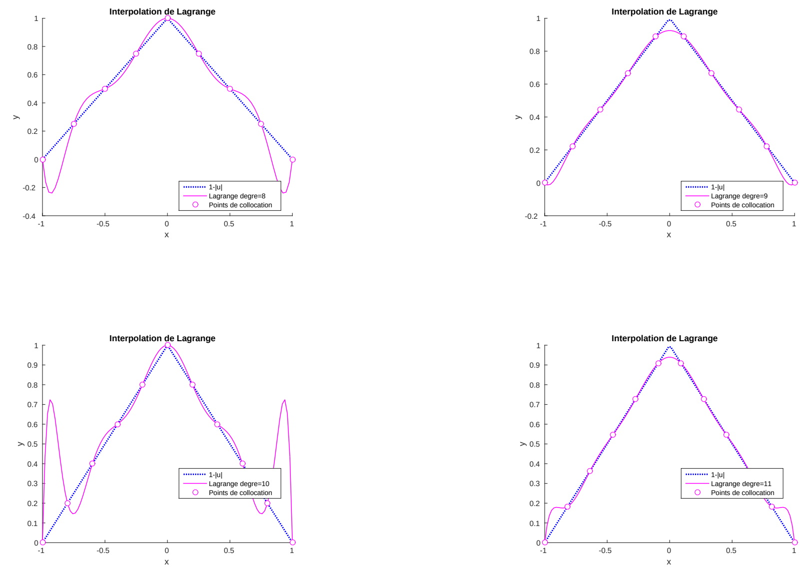
est indéterminé. En le retirant du produit, on obtient un polynôme de degré $(n-1)$, $L_k(x_k)=1$ et pour $i \neq k$, $L_k(x_i)=0$

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Finalement, le polynôme d'interpolation devient,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k * L_k(x)$$

Exemple : $f(x) = 1 - |x|$



Critique

Ce comportement oscillatoire découle de l'ordre généralement élevé du polynôme, et montre que le seul critère basé sur l'écart par rapport à la position ne suffit à caractériser la géométrie dans son ensemble.

Critères qui portent sur l'allure de la courbe : En modélisation géométrique on doit rechercher des techniques d'approximation adaptées à la nature du problème c-à-d qui donnent un meilleur rendu de l'allure générale de la courbe. Par exemple la pente et la courbure.

Analogie avec les méthodes graphiques : On procède avec une combinaison de l'information locale et de l'information globale.
Cette approche utilise des morceaux de courbes qui localement ont des degrés faibles et qui sont raccordés globalement.

Approximation par morceau

✔ *Une autre approche est de construire une approximation par morceaux, c-à-d qu'au lieu d'utiliser un seul polynôme, on en utilisera plusieurs qui seront raccordés selon des critères à déterminer.*

✔ *En utilisant des morceaux qui sont des polynômes de degré faible on pourra éviter le problème des oscillations qui apparaissent avec des polynômes de degré élevé.*

✔ *La disponibilité de puissants ordinateurs et des environnements graphiques évolués permettent l'élaboration de telles constructions et leur manipulation est devenue possible.*

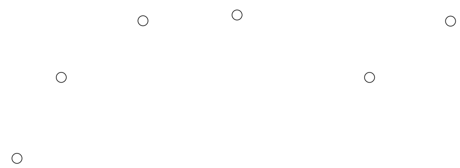
Représentation	**Polynômiale**		**Par morceaux**	
Collocation	Lagrange		Spline cubique	
Oscultation	Bézier	Bézier rationnelles	B-spline	NURBS

Ceci est la base de la géométrie numérique moderne.

Conditions de raccord

Pour une bonne précision et régularité une approximation par morceaux doit,

- *colloquer les n points de contrôle,* $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ *;*



- *les conditions de raccord* C_i *aux* $(n-2)$ *points intérieurs fournissent le niveau de régularité désiré, c-à-d,*
  - C_0 pour la continuité,
  - C_1 pour la continuité du vecteur tangent,
  - ....
- *les morceaux sont non seulement dérivables, mais aussi, ces dérivées sont continues.*

Les cubiques

Une classe de fonctions particulièrement pratique pour la représentation paramétrique est la classe des polynômes de degré trois, qui s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x(u) &= a_{0x}u^0 + a_{1x}u^1 + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3 \\
y(u) &= a_{0y}u^0 + a_{1y}u^1 + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3 \\
z(u) &= a_{0z}u^0 + a_{1z}u^1 + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3
\end{aligned}
$$

On exprime le vecteur position $\vec{P}$,

$$
\begin{aligned}
x(u) &= \sum_{i=0}^{3} a_{ix}u^i \\
y(u) &= \sum_{i=0}^{3} a_{iy}u^i \\
z(u) &= \sum_{i=0}^{3} a_{iz}u^i
\end{aligned}
\quad \rightarrow
$$

ou bien, de façon plus compacte, avec la forme vectorielle,

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{3} \vec{a}_i u^i$$

où le vecteur $\vec{a}_i$ a pour composantes les coefficients (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}).

Les Coefficients algébriques

Dans la forme vectorielle,

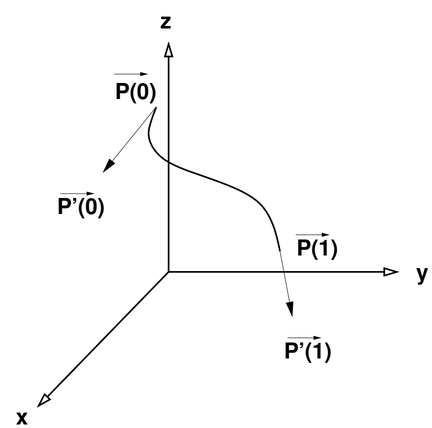
$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{3} \vec{a}_i u^i$$

les quatre coefficients $\vec{a}_i$ correspondent aux quatre degrés de liberté d'un polynôme de degré trois :

1. *Ils peuvent être déduits à partir de quatre données sur la courbe.*
2. *Quoique pratiques pour caractériser la courbe, ces coefficients sont difficiles à interpréter géométriquement.*
3. *On veut construire le polynôme à l'aide de certaines propriétés géométriques, faciles à interpréter et à appliquer ; par exemple, les positions ainsi que les vecteurs tangents aux extrémités.*

Coefficients géométriques

- *Les quantités* $\vec{P}(0)$, $\vec{P}(1)$, $\vec{P}'(0)$ *et* $\vec{P}'(1)$ *représentent les positions et les vecteurs tangents au début* $(u=0)$ *et la fin*$(u=1)$ *du segment, respectivement.*
- *Ce sont des données plus naturelles et plus intuitives que les coefficients algébriques pour décrire la courbe.*



Pour exprimer le vecteur position $\vec{P}$ en fonction de ces informations géométriques, il faut établir les relations entre ces quantités et les coefficients algébriques $\vec{a}_i$.

Vecteurs position et tangent

En évaluant le vecteur position et le vecteur tangent,

$$\begin{aligned}\vec{P}(u) &= \sum_{i=0}^{3} \vec{a}_i u^i \\ \vec{P}'(u) &= \sum_{i=0}^{3} i\vec{a}_i u^{i-1}\end{aligned}$$

aux deux extrémités du segment, c-à-d à $u = 0$ et $u = 1$, on obtient quatre équations :

$$\begin{aligned}\vec{P}(0) &= \vec{a}_0 \\ \vec{P}(1) &= \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\ \vec{P}'(0) &= \vec{a}_1 \\ \vec{P}'(1) &= \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3\end{aligned}$$

La solution de ce système donne les coefficients $\vec{a}_i$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_0 &= \vec{P}(0) \\ \vec{a}_1 &= \vec{P}'(0) \\ \vec{a}_2 &= -3\vec{P}(0) + 3\vec{P}(1) - 2\vec{P}'(0) - \vec{P}'(1) \\ \vec{a}_3 &= 2\vec{P}(0) - 2\vec{P}(1) + \vec{P}'(0) + \vec{P}'(1)\end{aligned}$$

En substituant dans

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{3} \vec{a}_i u^i = \vec{a}_0 u^0 + \vec{a}_1 u^1 + \vec{a}_2 u^2 + \vec{a}_3 u^3$$

on obtient une nouvelle écriture du polynôme :

$$\begin{aligned}\vec{P}(u) &= (2u^3 - 3u^2 + 1)\vec{P}(0) + (-2u^3 + 3u^2)\vec{P}(1) \\ &\quad + (u^3 - 2u^2 + u)\vec{P}'(0) + (u^3 - u^2)\vec{P}'(1)\end{aligned}$$

que l'on peut comparer avec la forme algébrique :

$$\vec{P}(u) = u^0\vec{a}_0 + u^1\vec{a}_1 + u^2\vec{a}_2 + u^3\vec{a}_3$$

Polynôme d'Hermite

Ce résultat peut s'écrire sous la forme d'un produit vectoriel :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix}$$

où les H_i sont les polymômes d'Hermite définis par :

$$\begin{aligned}H_1 &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ H_2 &= -2u^3 + 3u^2 \\ H_3 &= u^3 - 2u^2 + u \\ H_4 &= u^3 - u^2\end{aligned}$$

Ce qui s'interprètre comme une somme pondérée des H_i .

En comparant ce résultat :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix}$$

avec l'écriture polynomiale originale :

$$\vec{P}(u) = [1, u, u^2, u^3] \begin{bmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix}$$

On note qu'il s'agit d'un simple changement de base,

$$\boxed{u^i \rightarrow H_j}$$

Interprétation

Ces deux expressions ont la forme matricielle suivante :

$$\vec{P}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = [B_1, B_2, B_3, B_4]\,[A]$$

1. *Le changement de base*

   $$\boxed{u^i \rightarrow H_j}$$

   modifie les coefficients de la matrice $[A]$.
2. *La même courbe s'exprime comme une combinaison linéaire de coefficients, qui s'interprètent différement.*
   - *Dans le premier cas, ceux-ci sont les positions et les vecteurs tangents des deux extrémités du segment cubique, et ont une interprétation géométrique.*
   - *En utilisant des informations aux deux extrémités du segment, il sera plus facile de faire des raccords pour construire une représentation par morceaux.*

Forme matricielle

En explicitant pour une base ou l'autre, cette expression devient :

Hermite

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix}$$

Monômes

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [1, u, u^2, u^3] \begin{bmatrix} a_{0x} & a_{0y} & a_{0z} \\ a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix}$$

Equivalence des écritures

On illustre pour la coordonnée x avec la base d'Hermite :

$$x(u) = H_1(u)x(0) + H_2(u)x(1) + H_3(u)x'(0) + H_4(u)x'(1)$$

en explicitant les polynômes H_i cette expression devient :

$$\begin{aligned} x(u) &= [2u^3 - 3u^2 + 1]x(0) + [-2u^3 + 3u^2]x(1) \\ &\quad + [u^3 - 2u^2 + u]x'(0) + [u^3 - u^2]x'(1) \end{aligned}$$

En factorisant en puissances de u, cette expression est équivalente à

$$\begin{aligned} x(u) &= x(0) + x(1)u + [-3x(0) + 3x(1) - 2x'(0) - x'(1)]u^2 \\ &\quad + [2x(0) - 2x(1) + x'(0) + x'(1)]u^3 \end{aligned}$$

La seule différence se situe sur le plan arithmétique car il nécéssite l'évaluation répétée des diverses puissances de u.

Passage d'une base vers une autre

Pour le cas général, les polymômes d'Hermite sont définis par :

$$\begin{aligned} H_1 &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ H_2 &= -2u^3 + 3u^2 \\ H_3 &= u^3 - 2u^2 + u \\ H_4 &= u^3 - u^2 \end{aligned}$$

On obtient pour le passage $\boxed{u^i \rightarrow H_j}$,

$$[H_1, H_2, H_3, H_4] = [u^3, u^2, u^1, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant cette relation dans la forme matricielle de la représentation,

$$\vec{P}(u) = (x, y, z) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix}$$

le passage de la base u^i à la base H_j donne :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0x} & a_{0y} & a_{0z} \\ a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix}$$

Évaluation d'une courbe

On peut combiner ces deux représentations, et on obtient :

$$\vec{P}(u) = [u^3, u^2, u^1, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{bmatrix}$$

1. *Le calcul d'un point $\vec{P}(u) = (x, y, z)$ sur la courbe, se fait en évaluant les trois coordonnées (x, y, z) à l'aide des expressions correspondantes pour chaque valeur du paramètre u.*
2. *Cette écriture combine les avantages des deux formes. D'une part, les coefficients ont une interprétation géométrique, et d'autre part la forme se prête bien à un calcul efficace en évaluant les puissances de u^i une seule fois.*

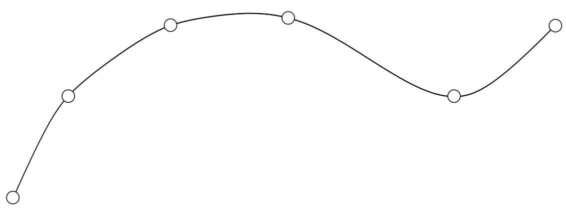
MEC6212 : MODULE GÉOMÉTRIE

Fonctions Splinaires

Table des matières

Approximation par morceau

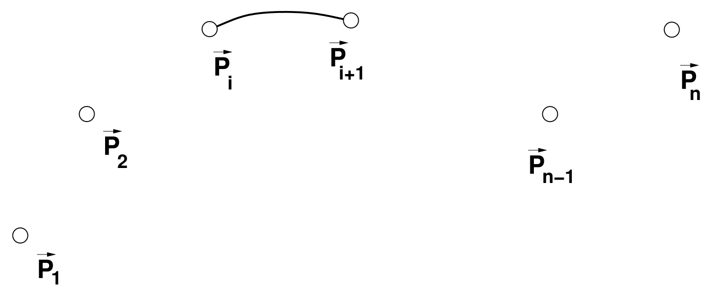
Une fonction splinaire est une représentation d'une courbe utilisant plusieurs morceaux, raccordés aux noeuds selon certaines conditions de continuité.



- *Les morceaux sont des polynômes de degré quelconque, mais en général le degré est impair.*
- *Les cubiques sont les polynômes les plus couramment utilisés dans la construction de fonctions splines.*
- *Pourquoi ?*

Splines

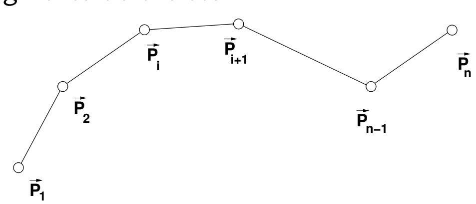
On construit une spline par une suite de points $\vec{P}_n$, appellé polygone de contrôle, et sur chaque intervalle entre deux points successifs $\vec{P}_i$ et $\vec{P}_{i+1}$, on défini un polynôme du degré choisi.



Régularité

La régularité de la courbe obtenue par ce procédé dépend du degré des polynômes, ainsi que des conditions de continuité imposées aux points de raccordement.

- *si on choisi des polynômes de degré un, on obtient une courbe composée de segments de droites :*



- *Comme le nombre de coefficients (degrés de liberté) pour chaque morceau est de deux, ceci ne permet que le raccordement le plus simple, c-à-d C^0 avec discontinuité de pente.*

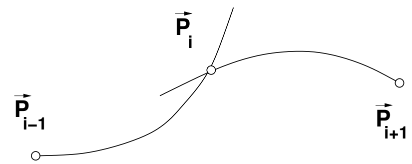
Degrés de liberté

Avec des polynômes de degré supérieur, le nombre de degrés de liberté augmente et cela permet un niveau de raccordement plus élevé, c-à-d C^1, C^2 etc..

1. *Il s'agit de trouver un compromis entre la régularité souhaitée et la complexité des calculs nécessaires pour l'obtenir.*
2. *De façon intuitive, il semble raisonnable de répartir les degrés de liberté également entre les deux extrémités du morceau. Ce choix donne donc un nombre pair de conditions, et par conséquent un polynôme de degré impair.*
3. *Dans la pratique, les splines cubiques se sont avérées un excellent compromis.*

Splines cubiques

Les conditions de raccord pour une spline cubique sont appliquées au noeud i entre deux morceaux.



Ces deux cubiques reliées au noeud i sont décrites par la base d'Hermite :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix}$$

Les coefficients $\vec{P}(u)$ et $\vec{P}'(u)$ représentent, respectivement, les positions et vecteurs tangents aux extrémités de chaque morceau.

Raccordement

On remplace la notation fonctionnelle $P(u)$, $P(0)$ ou $P(1)$, par la notation indicée P_i ou P_{i+1}. Ce qui donne pour chaque intervalle :

$$\boxed{i-1 \Rightarrow i} \qquad \vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{i \Rightarrow i+1} \qquad \vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_i \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_i \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

Condition C^0

Pour appliquer la condition de raccord au noeud i, on pose :

- $u = 1$ pour le morceau $(i-1 \Rightarrow i)$
- $u = 0$ pour le morceau $(i \Rightarrow i+1)$.

1. *La condition de continuité C^0 de la courbe au noeud i s'exprime par :*

$$\underbrace{[H_1(1), H_2(1), H_3(1), H_4(1)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}}_{\boxed{i-1 \Rightarrow i}} = \underbrace{[H_1(0), H_2(0), H_3(0), H_4(0)] \begin{bmatrix} \vec{P}_i \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_i \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}}_{\boxed{i \Rightarrow i+1}}$$

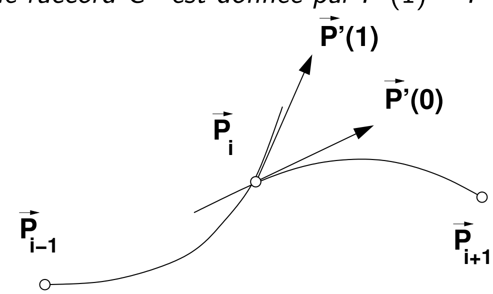
2. *En évaluant les H_i, on obtient que :*

$$P(1) = P(0)$$

3. *C'est-à-dire que la condition de continuité C^0 est vérifiée.*

Raccord du vecteur tangent

1. *La condition de raccord C^1 est donnée par $P'(1) = P'(0)$:*



2. *On exprime le vecteur tangent en dérivant le polynôme d'Hermite par rapport à u. Ce qui donne :*

$$\begin{aligned} H'_1 &= 6u^2 - 6u \\ H'_2 &= -6u^2 + 6u \\ H'_3 &= 3u^2 - 4u + 1 \\ H'_4 &= 3u^2 - 2u \end{aligned}$$

Pour chaque morceau, le vecteur tangent de la courbe au noeud i est donné par :

$$\boxed{i-1 \Rightarrow i} \qquad \vec{P}'(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4]' \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{i \Rightarrow i+1} \qquad \vec{P}'(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4]' \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

1. *Pour appliquer la condition de raccord au noeud i, on pose :*
   - $u = 1$ pour le morceau $(i-1 \Rightarrow i)$
   - $u = 0$ pour le morceau $(i \Rightarrow i+1)$.
2. *On exprime la continuité C^1 de la courbe au noeud i par :*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{i-1 \Rightarrow i} & & \boxed{i \Rightarrow i+1} \\ P'(1) & = & P'(0) \end{array}$$

$$[H_1'(1), H_2'(1), H_3'(1), H_4'(1)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix} = [H_1'(0), H_2'(0), H_3'(0), H_4'(0)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

Les polynômes H_i' sont obtenus en dérivant les expressions H_i :

$$\begin{aligned} H_1 &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ H_2 &= -2u^3 + 3u^2 \\ H_3 &= u^3 - 2u^2 + u \\ H_4 &= u^3 - u^2 \end{aligned}$$

par rapport à u. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} H_1' &= 6u^2 - 6u \\ H_2' &= -6u^2 + 6u \\ H_3' &= 3u^2 - 4u + 1 \\ H_4' &= 3u^2 - 2u \end{aligned}$$

1. *En évaluant les expressions H_i pour les valeurs de $u = 0$ et $u = 1$, on obtient :*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{i-1 \Rightarrow i} & & \boxed{i \Rightarrow i+1} \end{array}$$

$$[0, 0, 0, 1] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix} = [0, 0, 1, 0] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

2. *Ce qui donne :*

$$P'(1) = P'(0)$$

3. *C'est-à-dire les deux vecteurs tangents coincident, et que la condition de continuité C^1 est vérifiée.*

Condition C^2

La condition de raccord sur la courbure est obtenue en posant

$$\vec{P}''_{i-1}(u=1) = \vec{P}''_i(u=0)$$

En dérivant de nouveau les polynômes d'Hermite, on trouve :

$$\begin{aligned} H_1'' &= 12u - 6 \\ H_2'' &= -12u + 6 \\ H_3'' &= 6u - 4 \\ H_4'' &= 6u - 2 \end{aligned}$$

L'expression pour le vecteur $\vec{P}''(u)$ est obtenue pour chaque morceau :

$\boxed{i-1 \Rightarrow i}$

$$\vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

$\boxed{i \Rightarrow i+1}$

$$\vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

La condition de continuité C^2 de la courbe au noeud i s'exprime par :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{i-1 \Rightarrow i} & & \boxed{i \Rightarrow i+1} \\ P''(1) & = & P''(0) \end{array}$$

$$[H_1''(1), H_2''(1), H_3''(1), H_4''(1)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix} = [H_1''(0), H_2''(0), H_3''(0), H_4''(0)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

- *En évaluant ces deux expressions à $u = 1$ et $u = 0$ respectivement, on obtient la condition de continuité de la courbure :*

$$[6, -6, 2, 4] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix} = [-6, 6, -4, -2] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i} \\ \vec{P}_{i+1} \\ \vec{P}'_{i} \\ \vec{P}'_{i+1} \end{bmatrix}$$

- *Après quelques manipulations, on obtient :*

$$\vec{P}'_{i-1} + 4\vec{P}'_i + \vec{P}'_{i+1} = 3(\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_{i-1})$$

- *Cette relation s'applique au noeud i, et donne la condition que doivent vérifier les vecteurs tangents au noeud i et à ses voisins.*

Assemblage global

On exprime cette condition à chacun des noeuds intérieurs de la courbe, c-à-d les noeuds qui ont une cubique de chaque coté :

$$2 \leq i \leq n-1$$

$$\begin{array}{cccccccl}
\vec{P}'_1 & +4\vec{P}'_2 & +\vec{P}'_3 & & & & = & 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\
& \vec{P}'_2 & +4\vec{P}'_3 & +\vec{P}'_4 & & & = & 3(\vec{P}_4 - \vec{P}_2) \\
& & \vec{P}'_3 & +4\vec{P}'_4 & +\vec{P}'_5 & & = & 3(\vec{P}_5 - \vec{P}_3) \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & = & \vdots \\
& & & \vec{P}'_{n-2} & +4\vec{P}'_{n-1} & +\vec{P}'_n & = & 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2})
\end{array}$$

Appliquée à l'ensemble des $\underline{n \text{ noeuds}}$, ces $\underline{(n-2) \text{ équations}}$ expriment la relation entre les valeurs des vecteurs tangents et celles des vecteurs positions aux noeuds de la spline.

Système matriciel

Ce système comporte n inconnues, les $\vec{P}'_i$, et $(n-2)$ équations, et s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{P}'_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \vec{P}_3 - \vec{P}_1 \\ \vec{P}_4 - \vec{P}_2 \\ \vec{P}_5 - \vec{P}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{P}_n - \vec{P}_{n-2} \end{bmatrix}$$

- *Des relations supplémentaires doivent compléter ce système.*
- *Celles-ci seront choisies selon les conditions géométriques imposées aux extrémités de la spline.*

Interpolation pour la position

La résolution du système d'équations donne les valeurs des $\vec{P}'_i$ qui sont utilisées dans la formule d'interpolation pour la position en fonction du paramètre u :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

en évaluant les expressions pour les polynômes d'Hermite :

$$\begin{aligned} H_1 &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ H_2 &= -2u^3 + 3u^2 \\ H_3 &= u^3 - 2u^2 + u \\ H_4 &= u^3 - u^2 \end{aligned}$$

Interpolation pour le vecteur tangent

Pour évaluer le vecteur tangent on utilise les mêmes valeurs des $\vec{P}'_i$ dans l'expression :

$$\vec{P}'(u) = [H'_1, H'_2, H'_3, H'_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

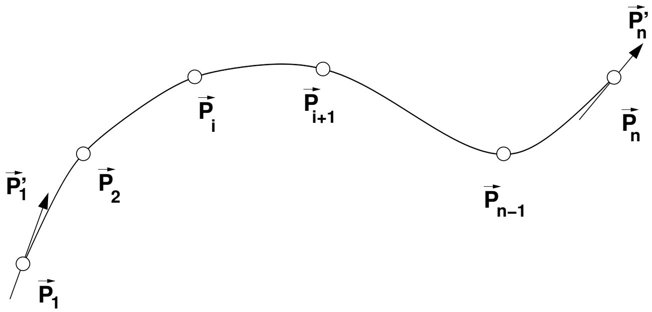
avec les expressions correspondantes pour les dérivées des polynômes d'Hermite évaluées à u :

$$\begin{aligned} H'_1 &= 6u^2 - 6u \\ H'_2 &= -6u^2 + 6u \\ H'_3 &= 3u^2 - 4u + 1 \\ H'_4 &= 3u^2 - 2u \end{aligned}$$

Vecteur tangent imposé

Ce type de condition frontière consiste à imposer la valeur du vecteur tangent (pente en 2-D) aux extrémités de la courbe.

- *Ce qui donne deux conditions additionnelles et le système d'équations devient alors déterminé.*



- *Lorsque cette quantité peut être déduite du contexte du problème, c'est un choix naturel à imposer.*

Supposant que $\vec{P}'_1$ et $\vec{P}'_n$ sont connues, le système matriciel comporte alors 2 inconnues de moins.

- *Au noeud $i = 2$, on applique la condition de raccord,*

$$\vec{P}'_1 + 4\vec{P}'_2 + \vec{P}'_3 = 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1)$$

qui donne, puisque $\vec{P}'_1$ est connu,

$$4\vec{P}'_2 + \vec{P}'_3 = 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) - \vec{P}'_1$$

- *Au noeud $i = n-1$, on obtient une équation semblable.*

$$\vec{P}_{n-2} + 4\vec{P}'_{n-1} = 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2}) - \vec{P}'_n$$

Alors le système,

$$\begin{array}{cccccccc}
\vec{P}'_1 & +4\vec{P}'_2 & +\vec{P}'_3 & & & & = & 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\
 & \vec{P}'_2 & +4\vec{P}'_3 & +\vec{P}'_4 & & & = & 3(\vec{P}_4 - \vec{P}_2) \\
 & & \vec{P}'_3 & +4\vec{P}'_4 & +\vec{P}'_5 & & = & 3(\vec{P}_5 - \vec{P}_3) \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & = & \vdots \\
 & & & \vec{P}'_{n-2} & +4\vec{P}'_{n-1} & +\vec{P}'_n & = & 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2})
\end{array}$$

devient,

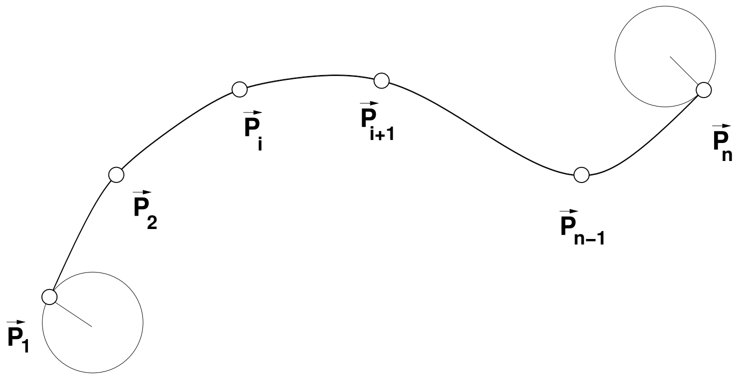
$$\begin{array}{ccccccc}
+4\vec{P}'_2 & +\vec{P}'_3 & & & & = & 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) - \vec{P}'_1 \\
\vec{P}'_2 & +4\vec{P}'_3 & +\vec{P}'_4 & & & = & 3(\vec{P}_4 - \vec{P}_2) \\
 & \vec{P}'_3 & +4\vec{P}'_4 & +\vec{P}'_5 & & = & 3(\vec{P}_5 - \vec{P}_3) \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & = & \vdots \\
 & & \vec{P}'_{n-2} & +4\vec{P}'_{n-1} & & = & 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2}) - \vec{P}'_n
\end{array}$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix}
4 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & 1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vec{P}'_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{P}'_{n-1}
\end{bmatrix}
= 3
\begin{bmatrix}
\vec{P}_3 - \vec{P}_1 - \vec{P}'_1/3 \\ \vec{P}_4 - \vec{P}_2 \\ \vec{P}_5 - \vec{P}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{P}_n - \vec{P}_{n-2} - \vec{P}'_n/3
\end{bmatrix}$$

Condition sur la courbure

Une condition plus souple sur l'allure de la courbe peut être obtenue en imposant une condition sur la courbure de la courbe.



On utilisera le rayon d'un cercle tangent aux extrémités.

Courbure imposée

On suppose que les courbures aux extrémités sont connues, soit $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_n$. L'expression pour la courbure est obtenue en dérivant deux fois l'équation d'Hermite pour la cubique :

$$\vec{C} = \vec{P}''(u) = [H_1'', H_2'', H_3'', H_4''] \begin{bmatrix} \vec{P}_{i-1} \\ \vec{P}_i \\ \vec{P}'_{i-1} \\ \vec{P}'_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad H_1'' &= 12u - 6 \\ H_2'' &= -12u + 6 \\ H_3'' &= 6u - 4 \\ H_4'' &= 6u - 2 \end{aligned}$$

On exprime l'équation de la courbure aux premier et dernier morceaux :

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

$$\vec{C}_1 = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$

$$\vec{C}_n = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{n-1} \\ \vec{P}_n \\ \vec{P}'_{n-1} \\ \vec{P}'_n \end{bmatrix}$$

En évaluant ces expressions à $u = 0$ et $u = 1$, respectivement :

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

$$\vec{C}_1 = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)]$$

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$

$$\vec{C}_n = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)]$$

En isolant les valeurs des pentes, ceci donne deux relations additionnelles :

$$\begin{aligned} 2\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 &= 3\vec{P}_2 - 3\vec{P}_1 - \vec{C}_1/2 \\ \vec{P}'_{n-1} + 2\vec{P}'_n &= 3\vec{P}_n - 3\vec{P}_{n-1} - \vec{C}_n/2 \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux équations au système original, on obtient :

$$\begin{array}{lllllllll}
2\vec{P}'_1 & +\vec{P}'_2 & & & & & & = & 3(\vec{P}_2-\vec{P}_1)-\vec{C}_1/2 \\
\vec{P}'_1 & +4\vec{P}'_2 & +\vec{P}'_3 & & & & & = & 3(\vec{P}_3-\vec{P}_1) \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & = & \vdots \\
 & & \vec{P}'_{i-1} & +4\vec{P}'_i & +\vec{P}'_{i+1} & & & = & 3(\vec{P}_{i+1}-\vec{P}_{i-1}) \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & = & \vdots \\
 & & & & \vec{P}'_{n-2} & +4\vec{P}'_{n-1} & +\vec{P}'_n & = & 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-2}) \\
 & & & & & \vec{P}'_{n-1} & +2\vec{P}'_n & = & 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-1})+\vec{C}_n/2
\end{array}$$

Sous forme matricielle, ce système devient :

$$\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vec{P}'_4 \\ \vdots \\ \vec{P}'_{n-1} \\ \vec{P}'_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
3(\vec{P}_2-\vec{P}_1)-\vec{C}_1/2 \\ 3(\vec{P}_3-\vec{P}_1) \\ 3(\vec{P}_4-\vec{P}_2) \\ 3(\vec{P}_5-\vec{P}_3) \\ \vdots \\ 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-2}) \\ 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-1})+\vec{C}_n/2
\end{bmatrix}$$

Le choix d'une valeur de la courbure comporte une certaine mesure d'arbitraire. Il existe plusieurs possibilités :

- courbure nulle
- courbure constante
- courbure extrapolée

Courbure nulle

Un cas particulier de cette condition est la courbure nulle, soit $\vec{C}_1 = 0$ et $\vec{C}_n = 0$.
Alors, ce système devient :

$$\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vec{P}'_4 \\ \vdots \\ \vec{P}'_{n-1} \\ \vec{P}'_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
3(\vec{P}_2-\vec{P}_1) \\ 3(\vec{P}_3-\vec{P}_1) \\ 3(\vec{P}_4-\vec{P}_2) \\ 3(\vec{P}_5-\vec{P}_3) \\ \vdots \\ 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-2}) \\ 3(\vec{P}_n-\vec{P}_{n-1})
\end{bmatrix}$$

Spline parabolique

Une condition géométrique encore plus naturelle que d'imposer une valeur de la courbure, est de supposer sa valeur constante sur les morceaux ou polynômes en extrémité.
Mathématiquement, ceci s'exprime :

$$\vec{P}_1'' = \vec{P}_2''$$

et

$$\vec{P}_{n-1}'' = \vec{P}_n''$$

$\boxed{i = 1 \text{ à } i = 2}$

Sur le premier polynôme, l'expression de la courbure est donnée par :

$$\vec{C} = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_1' \\ \vec{P}_2' \end{bmatrix}$$

Cette expression est évaluée à $u = 0$ et $u = 1$, donnant la condition :

$$[-6, 6, -4, -2] \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_1' \\ \vec{P}_2' \end{bmatrix} = [6, -6, 2, 4] \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_1' \\ \vec{P}_2' \end{bmatrix}$$

$\boxed{i = n-1 \text{ à } i = n}$

Sur le dernier polynôme, l'expression de la courbure est donnée par :

$$\vec{C} = \vec{P}''(u) = [(12u-6), (-12u+6), (6u-4), (6u-2)] \begin{bmatrix} \vec{P}_{n-1} \\ \vec{P}_n \\ \vec{P}_{n-1}' \\ \vec{P}_n' \end{bmatrix}$$

Cette expression est évaluée à $u = 0$ et $u = 1$, donnant :

$$[-6, 6, -4, -2] \begin{bmatrix} \vec{P}_{n-1} \\ \vec{P}_n \\ \vec{P}_{n-1}' \\ \vec{P}_n' \end{bmatrix} = [6, -6, -2, 4] \begin{bmatrix} \vec{P}_{n-1} \\ \vec{P}_n \\ \vec{P}_{n-1}' \\ \vec{P}_n' \end{bmatrix}$$

En isolant les valeurs des pentes, ceci donne deux relations additionnelles :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1' + \vec{P}_2' &= 2(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \\ \vec{P}_{n-1}' + \vec{P}_n' &= 2(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-1}) \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux équations au système original, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{P}_1' & +\vec{P}_2' & & & & & & = & 2(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \\ \vec{P}_1' & +4\vec{P}_2' & +\vec{P}_3' & & & & & = & 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\ & \vec{P}_2' & +4\vec{P}_3' & +\vec{P}_4' & & & & = & 3(\vec{P}_4 - \vec{P}_2) \\ & & \vec{P}_3' & +4\vec{P}_4' & +\vec{P}_5' & & & = & 3(\vec{P}_5 - \vec{P}_3) \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & = & \vdots \\ & & & & \vec{P}_{n-2}' & +4\vec{P}_{n-1}' & +\vec{P}_n' & = & 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2}) \\ & & & & & \vec{P}_{n-1}' & +\vec{P}_n' & = & 2(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-1}) \end{array}$$

Sous forme matricielle, ce système devient :

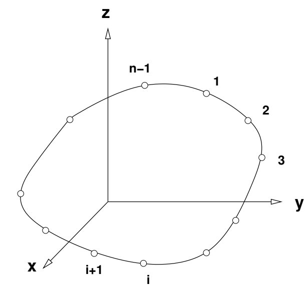
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vec{P}'_4 \\ \vdots \\ \vec{P}'_{n-1} \\ \vec{P}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \\ 3(\vec{P}_3 - \vec{P}_1) \\ 3(\vec{P}_4 - \vec{P}_2) \\ 3(\vec{P}_5 - \vec{P}_3) \\ \vdots \\ 3(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-2}) \\ 2(\vec{P}_n - \vec{P}_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Courbe fermée

Pour une courbe fermée, les premier et dernier points coincident.

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_n$$

Contrairement aux courbes ouvertes, chaque noeud possède deux voisins.



Alors, il est possible d'appliquer la condition de raccord à chaque point, ce qui donne autant d'equations que d'inconnues et il n'est plus nécessaire d'imposer d'autres conditions.

Condition de raccord

Par la condition de raccord appliquée aux $n-1$ noeuds, on obtient $n-1$ conditions ou équations correspondant exactement au nombre d'inconnues. Au noeud i cette condition s'exprime :

$$\vec{P}'_{i-1} + 4\vec{P}'_i + \vec{P}'_{i+1} = 3(\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_{i-1})$$

et au noeud 1 ou n :

$$\vec{P}'_{n-1} + 4\vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 3(\vec{P}_2 - \vec{P}_{n-1})$$

et au noeud $n-1$

$$\vec{P}'_1 + 4\vec{P}'_{n-1} + \vec{P}'_{n-2} = 3(\vec{P}_1 - \vec{P}_{n-2})$$

On note que c'est rigoureusement la même condition avec les changements de notation.

Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}'_1 \\ \vec{P}'_2 \\ \vec{P}'_3 \\ \vdots \\ \vec{P}'_{n-1} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \vec{P}_2 - \vec{P}_{n-1} \\ \vec{P}_3 - \vec{P}_1 \\ \vec{P}_4 - \vec{P}_2 \\ \vdots \\ \vec{P}_1 - \vec{P}_{n-2} \end{bmatrix}$$

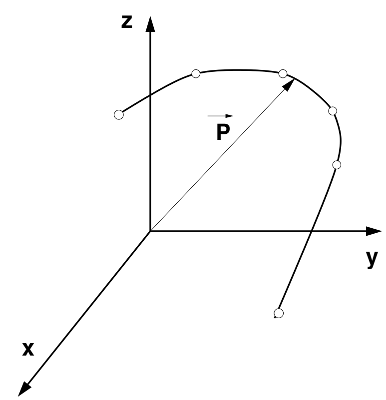
MEC6212 : MODULE GÉOMÉTRIE

Fonctions de Bézier

Table des matières

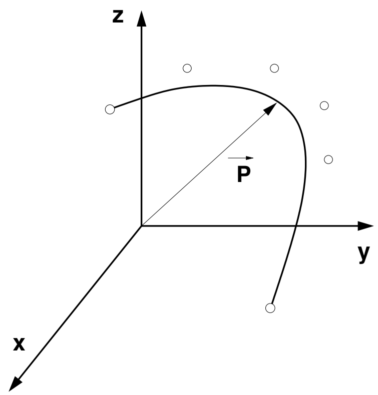
Motivation

- *La création intéractive d'une courbe par des points de collocation est difficile car l'action d'un point est très directe sur l'allure de la courbe.*
-



Motivation

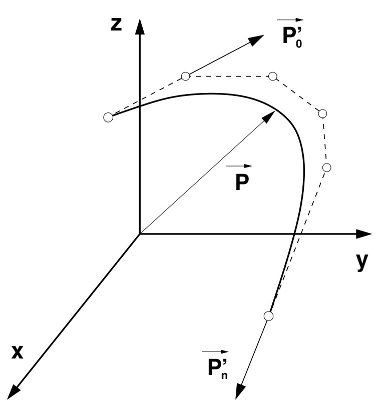
- *La création intéractive d'une courbe par des points de collocation est difficile car l'action d'un point est très directe sur l'allure de la courbe.*
- *Si on assoupli les conditions de collocation par des conditions d'oscultation ou de moyenne pondérée, l'action d'un point est alors plus indirecte et on obtient un contrôle plus souple.*



Il en résulte une modélisation qui s'apparente davantage au tracé à main levée.

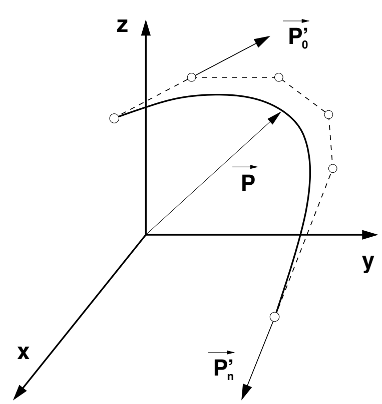
Caractéristiques générales

Les fonctions de Bézier sont des polynômes d'interpolation construits par oscultation d'un polygone de contrôle à n cotés, plutôt que par collocation d'un ensemble de noeuds :



1. *les points aux extrémités sont en commun avec le polygone de contrôle ;*
2. *les vecteurs tangents aux extrémités coincident avec le premier et le dernier segment du polygone de contrôle ;*
3. *la courbe est entièrement contenue dans l'enveloppe convexe des points du polygone de contrôle et reproduit grossièrement celui-ci ;*

La régularité de la courbe obtenue est très bonne et constitue un mode d'approximation très souple.



1. *Les courbes de Bézier sont à variation décroissante i.e. elles n'oscillent jamais très loin des points de contrôle.*
   Cette propriété entraîne qu'un polygone convexe génère une courbe convexe (mais l'inverse n'est pas vrai).
2. *On peut ajouter des points de contrôles sans changer la forme de la courbe (à la limite le polygone de contrôle approche la courbe) ;*
3. *Le degré du polynôme est égal au nombre de cotés du polygone de contrôle.*

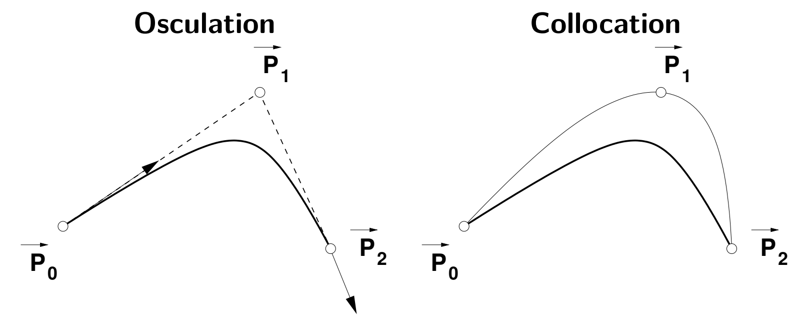
En comparaison avec les polynômes conventionnels ou les splines, l'information pour la représentation d'une courbe de Bézier,

- *est constituée seulement de points ;*
- *et ne comprend pas les vecteurs tangents de façon explicite.*

Le polygone de contrôle

Une méthode particulièrement intéressante pour construire des fonctions de Bézier se fait à partir des formes d'Hermite.

Soit un polygone[1] de contrôle à 2 cotés (3 noeuds) numérotés $\vec{P}_0$,$\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$.



1. Le terme polygone est un abus de langage car cette figure n'est généralement pas fermée.

1. *Le point de départ est un polynôme d'Hermite donné par :*

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix}$$

où les coefficients $\vec{P}(u)$ et $\vec{P}'(u)$ représentent les positions et les vecteurs tangents aux extrémités.

2. *On applique cette représentation à une courbe de Bézier, c-à-d une courbe qui passe au travers de $\vec{P}_0$ et de $\vec{P}_2$ avec des vecteurs tangents alignés aux cotés du polygone de contrôle formés par ces sommets.*
3. *On remplace la notation fonctionnelle $P(u)$ par la notation indicée :*

$$\vec{P}(0) \Rightarrow \vec{P}_0 \qquad \text{et} \qquad \vec{P}(1) \Rightarrow \vec{P}_2$$

Le polynôme d'Hermite s'écrit :

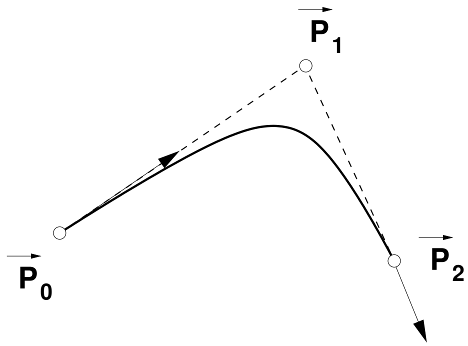
$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix} \rightarrow \vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}'_0 \\ \vec{P}'_2 \end{bmatrix}$$

On recherche une représentation constituée seulement de points, et qui ne comprend pas les vecteurs tangents de façon explicite !

$\boxed{\textbf{Comment exprimer les vecteurs tangents } \vec{P}'_0 \textbf{ et } \vec{P}'_2 \textbf{ ?}}$

On exprime les vecteurs tangents dans la forme d'Hermite à l'aide des vecteurs formés par les segments aux deux extrémités du polygone de contrôle, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\vec{P}'_0 &\propto \vec{P}_1 - \vec{P}_0\\ \vec{P}'_2 &\propto \vec{P}_2 - \vec{P}_1\end{aligned}$$



On pose la constante de proportionalité égale à K.

$$\begin{aligned}\vec{P}'_0 &= K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)\\ \vec{P}'_2 &= K(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\end{aligned}$$

En substituant dans le polynôme d'Hermite les expressions pour les vecteurs tangents,

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_2\\ \vec{P}'_0\\ \vec{P}'_2\end{bmatrix}$$

on obtient :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_2\\ K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)\\ K(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\end{bmatrix}$$

Choix de K

- *On remplace les expressions pour les H_i , et on obtient :*

$$\vec{P}(u) = [(2u^3 - 3u^2 + 1), (-2u^3 + 3u^2), (u^3 - 2u^2 + u), (u^3 - u^2)]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_2\\ K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0)\\ K(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\end{bmatrix}$$

- *Explicitant le produit matriciel, on obtient un polynôme en u ,*

$$\begin{aligned}\vec{P}(u) &= u^3\left[(2\vec{P}_0 - 2\vec{P}_2 + K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) + K(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\right] + u^2.......\\ &= u^3\left[(2(\vec{P}_0 - \vec{P}_2) - K(\vec{P}_0) - \vec{P}_2)\right] + u^2.......\end{aligned}$$

- $\boxed{\textbf{Ce polynôme doit être de degré deux car il y a trois noeuds.}}$
  Donc, on pose coefficient de u^3 égal à zéro :

$$(2\vec{P}_0 - 2\vec{P}_2 + K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) + K(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = 0$$

- *Cette condition est possible avec un choix judicieux de $K = 2$.*

Les polynômes de Bernstein

Avec ce choix de K, on a :

$$\vec{P}(u) = [(1-u)^2, 2u(1-u), u^2]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_1\\ \vec{P}_2\end{bmatrix}$$

On note :

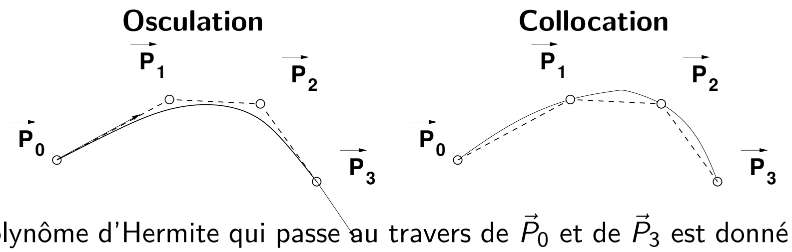
1. *le polynôme fait intervenir seulement les points et pas les vecteurs tangents.*
2. *les expressions polynômiales de la base de Hermite sont remplacées par une nouvelle base, soit les polynômes de Bernstein de degré 2,*

$$\vec{P}(u) = [B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_1\\ \vec{P}_2\end{bmatrix}$$

dénotés $B_{i,n}$, i l'indice du point P_i et n le degré du polynôme.

Degré 3

On répète pour un polygone à 3 cotés (4 noeuds), notés $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et $\vec{P}_3$.



Le polynôme d'Hermite qui passe au travers de $\vec{P}_0$ et de $\vec{P}_3$ est donné par :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}(0) \\ \vec{P}(1) \\ \vec{P}'(0) \\ \vec{P}'(1) \end{bmatrix}$$

où les coefficients $\vec{P}(u)$ et $\vec{P}'(u)$ représentent les positions et les vecteurs tangents aux extrémités du polygone.

Lien entre les vecteuts tangents et le polygone

On remplace la notation fonctionnelle $P(u)$ par la notation indicée P_i

$$\vec{P}(0) ==> \vec{P}_0 \qquad \text{et} \qquad \vec{P}(1) ==> \vec{P}_3$$

Les vecteurs tangents dans la forme d'Hermite peuvent s'exprimer à l'aide des pentes des segments du polygone de contrôle c-à-d :

$$\begin{aligned} \vec{P}'(0) &\propto \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \\ \vec{P}'(1) &\propto \vec{P}_3 - \vec{P}_2 \end{aligned}$$

On pose la constante de proportionalité égale à K.

$$\begin{aligned} \vec{P}'(0) &= K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \\ \vec{P}'(1) &= K(\vec{P}_3 - \vec{P}_2) \end{aligned}$$

En substituant dans le polynôme d'Hermite, on obtient :

$$\vec{P}(u) = [H_1, H_2, H_3, H_4] \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_3 \\ K(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \\ K(\vec{P}_3 - \vec{P}_2) \end{bmatrix}$$

En explicitant les H_i par :

$$\begin{aligned} H_1 &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ H_2 &= -2u^3 + 3u^2 \\ H_3 &= u^3 - 2u^2 + u \\ H_4 &= u^3 - u^2 \end{aligned}$$

Choix de K

Le vecteur position devient :

$$\begin{aligned} \vec{P}(u) = \; & [(2u^3 - 3u^2 + 1) - K(u^3 - 2u^2 + u)]\vec{P}_0 \\ & + Ku(u-1)^2\vec{P}_1 \\ & + Ku^2(u-1)\vec{P}_2 \\ & [(-2u^3 + 3u^2) + K(u^3 - u^2)]\vec{P}_3 \end{aligned}$$

Par un choix judicieux de $K = 3$, on obtient l'écriture des polynômes de Bernstein :

$$\vec{P}(u) = [(1-u)^3, 3u(1-u)^2, 3u^2(1-u), u^3] \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix}$$

Les polynômes de Bernstein

On reconnaît les expressions polynômiales comme étant des polynômes de Bernstein dénotés $B_{0,3}$,$B_{1,3}$,$B_{2,3}$ et $B_{3,3}$, respectivement.

Dans cette notation, le premier indice représente le i ème polynôme et le second indique le degré du polynôme.

$$\vec{P}(u) = [B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}] \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{bmatrix}$$

En généralisant avec un polygone de contrôle à n cotés, on peut montrer que la forme matricielle devient :

$$\vec{P}(u) = [B_{0,n}, B_{1,n}, B_{2,n}, ..., B_{n,n}] \begin{bmatrix} \vec{P}_0 \\ \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vdots \\ \vec{P}_n \end{bmatrix}$$

où les coefficients $B_{i,n}$ sont les polynômes de Bernstein de degré n et les $\vec{P}_i$ sont les sommets du polygone de contrôle.

Les polynômes de Bernstein servant à la construction des fonctions de Bézier sont définis par :

$$\begin{aligned} B_{i,n} &= C_{n,i} u^i (1-u)^{n-i} \\ C_{n,i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \end{aligned}$$

On les construit de façon récursive en appliquant la relation suivante :

$$B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,n-1}(u) + uB_{i-1,n-1}(u)$$

Liens avec Hermite

On peut faire ressortir les liens avec les polynômes d'Hermite avec l'exemple suivant pour le cas de degré trois :

$$[(1-u^3), 3u(1-u)^2, 3u^2(1-u), u^3] = [u^3, u^2, u^1, 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui se compare avec la base d'Hermite :

$$[H_1, H_2, H_3, H_4] = [u^3, u^2, u^1, 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Différentes écritures polynomiales

Pour un polynôme d'interpolation de degré donné, toutes les écritures sont équivalentes et peuvent être obtenues par un simple changement de base.

$$[1, u, u^2, u^3]\begin{bmatrix}\vec{a}_0\\ \vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{a}_3\end{bmatrix}$$

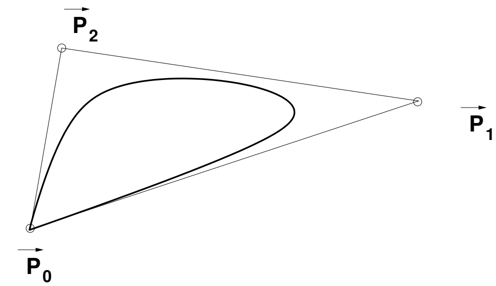
$$[B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}]\begin{bmatrix}\vec{P}_0\\ \vec{P}_1\\ \vec{P}_2\\ \vec{P}_3\end{bmatrix} \qquad [H_1, H_2, H_3, H_4]\begin{bmatrix}\vec{P}(0)\\ \vec{P}(1)\\ \vec{P}'(0)\\ \vec{P}'(1)\end{bmatrix}$$

Ces diverses écritures diffèrent par le type d'informations utilisées.

Courbes fermées

Pour les courbes fermées, les extrémités du polygone de contrôle se recoupent :

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_n$$



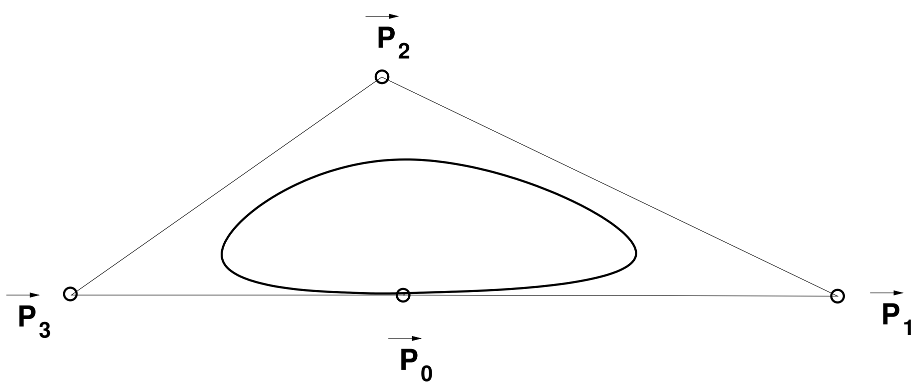
Ceci donne un point de discontinuité car les vecteurs aux extrémités ne sont pas tangents :

$$\vec{P}'_0 \neq \vec{P}'_n$$

Courbes fermées : raccord du vecteur tangent P'

On construit le polygone de contrôle tel que les vecteurs aux extrémités sont tangents, c-à-d le premier et le dernier segment du polygone de contrôle sont alignés. Alors, on obtient :

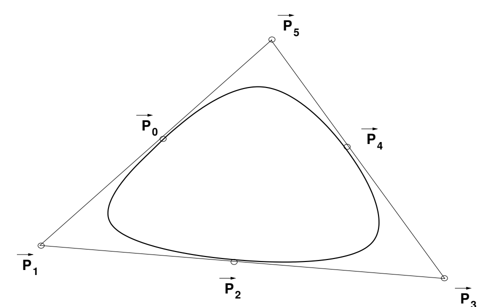
$$\vec{P}'_0 = \vec{P}'_n$$



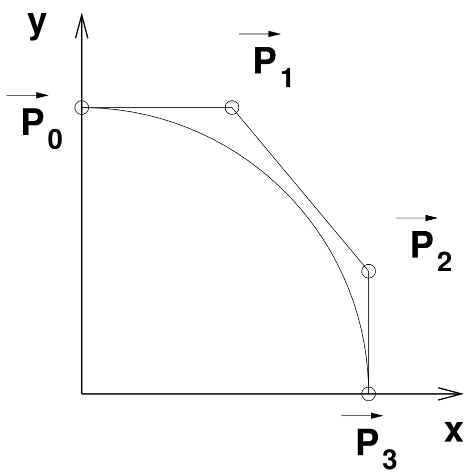
Courbes fermées avec raccord de la courbure

On peut obtenir une courbe fermée avec une plus grande régularité, si on construit le polygone de contrôle tel que plusieurs de ses cotés sont alignés :

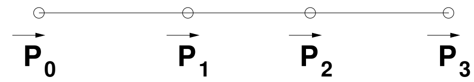
$$\vec{P}'_i = \vec{P}'_{i+1}$$



Le cercle



La droite



Algorithme de de Casteljau

- *Une façon intuitive sur le plan algébrique de construire des polynômes d'interpolation a été découverte par de Casteljau. On illustre par des interpolants paraboliques sur le plan.*
- *Soit trois points numérotés $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, et $\vec{P}_2$. On construit d'abord deux droites par interpolation linéaire :*

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_0^1(t) &= (1-t)\vec{P}_0 + t\vec{P}_1 \\
\vec{P}_1^1(t) &= (1-t)\vec{P}_1 + t\vec{P}_2
\end{aligned}
$$

  où la notation $\vec{P}_n^r$ indique le polynôme de degré r sur l'intervalle n.
- *On répète en interpolant linéairement les deux droites $\vec{P}_0^1(t)$ et $\vec{P}_1^1(t)$:*

$$
\vec{P}_0^2(t) = (1-t)\vec{P}_0^1(t) + t\vec{P}_1^1(t)
$$

Interprétation géométrique

Finalement, en substituant les expressions pour les droites, on obtient :

$$
\vec{P}_0^2(t) = (1-t)^2\vec{P}_0 + 2t(1-t)\vec{P}_1 + t^2\vec{P}_2
$$

- *Cette équation décrit une parabole qui osculte l'intérieur du polygone de contrôle et qui est engendrée en variant le paramètre t entre 0 et 1.*
- *On interprète cette courbe comme une combinaison barycentrique d'ordre deux des trois points $\vec{P}_0$, $\vec{P}_1$, et $\vec{P}_2$.*