La courbe brachistochrone

MTH1102(D)

Polytechnique Montréal

8 mai 2024

Contexte

Problème

Étant donné deux points dans le plan, A et B, quelle est la trajectoire d'un objet sur lequel seule la gravité agit et qui se déplace de A à B dans le temps le plus court ?

La trajectoire cherchée est une courbe appelée **brachistochrone**.

Préliminaires

Idée de solution

Analogie avec un rayon lumineux traversant un milieu dont l'indice de réfraction augmente de façon continue.

Préliminaires

Idée de solution

Analogie avec un rayon lumineux traversant un milieu dont l'indice de réfraction augmente de façon continue.

Principe de Fermat :
Un rayon lumineux d'un point à un autre suit une trajectoire qui minimise le temps de parcours

Préliminaires

Loi de Snell

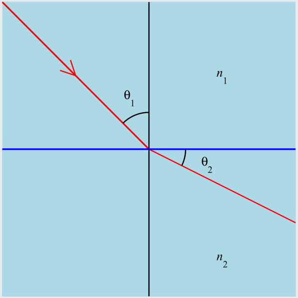
La vitesse de la lumière dépend du milieu où elle se propage.

Loi de Snell

La vitesse de la lumière dépend du milieu où elle se propage.

Loi de Snell :

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2},$$

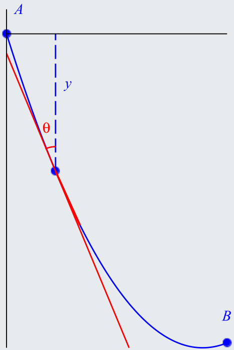


Préliminaires

Dans le cas d'un milieu dont la densité change continûment, ceci implique que

$$\frac{\sin(\theta)}{v} = C,$$

où C est une constante.



Calculs

Pour simplifier, on supposera dans la suite que le point de départ de l'objet est l'origine $(0, 0)$.

Calculs

Pour simplifier, on supposera dans la suite que le point de départ de l'objet est l'origine $(0,0)$.

Exercice 1

Utilisez l'équation $\frac{\sin(\theta)}{v} = C$ pour montrer que

a) Le brachistochrone est tangent à l'axe vertical au point de départ.

b) On a $C = \dfrac{1}{v_m}$, où v_m est la vitesse maximale de l'objet le long de sa trajectoire de A à B.

Ainsi,

$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_m}.$$

Calculs

$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_m} \quad (1)$$

Calculs

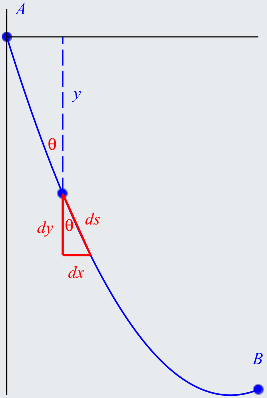
$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_m} \quad (1)$$

On a

$$\sin(\theta) = \frac{dx}{ds}$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$



Calculs

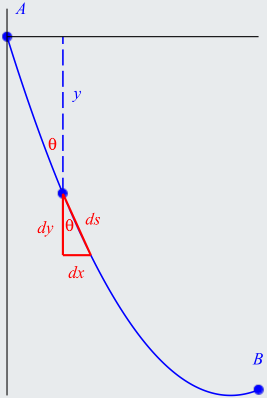
$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_m} \quad (1)$$

On a

$$\sin(\theta) = \frac{dx}{ds}$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$



Substituant dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{1}{v}dx = \frac{1}{v_m}\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Calculs

Isolant dx dans l'équation, on obtient

$$dx = \frac{v}{\sqrt{v_m^2 - v^2}} dy.$$

Calculs

Isolant dx dans l'équation, on obtient

$$dx = \frac{v}{\sqrt{v_m^2 - v^2}} dy.$$

Exercice 2

Utilisez la formule $v = \sqrt{2gy}$ pour écrire cette équation sous la forme

$$dx = \sqrt{\frac{y}{D - y}}\, dy \quad (2),$$

où D est la distance parcourue lorsque la vitesse maximale est atteinte.

Calculs

Cette dernière **équation différentielle** définit une courbe. On introduit un paramètre t et on pose $x = x(t)$, $y = y(t)$ pour obtenir la courbe sous forme paramétrique

Calculs

Cette dernière **équation différentielle** définit une courbe. On introduit un paramètre t et on pose $x = x(t)$, $y = y(t)$ pour obtenir la courbe sous forme paramétrique

Exercice 3

Montrez que

$$x = R(t - \sin(t)), \quad y = R(1 - \cos(t)),$$

est une solution à l'équation différentielle (2), où $D = 2R$.

Ceci donne une paramétrisation de la courbe brachistochrone.

Conclusion

On reconnaît la courbe paramétrée par

$$x = R(t - \sin(t)), \quad y = R(1 - \cos(t)),$$

comme étant la **cycloïde** vue à la Question 1 des exercices 1.

Dans le contexte présent, la cycloïde est inversée.