MTH1102 - Exercices de la semaine 1

1 Exercices de routine

Section 8.1 nos. 17, 45.

Section 8.2 nos. 9, 17.

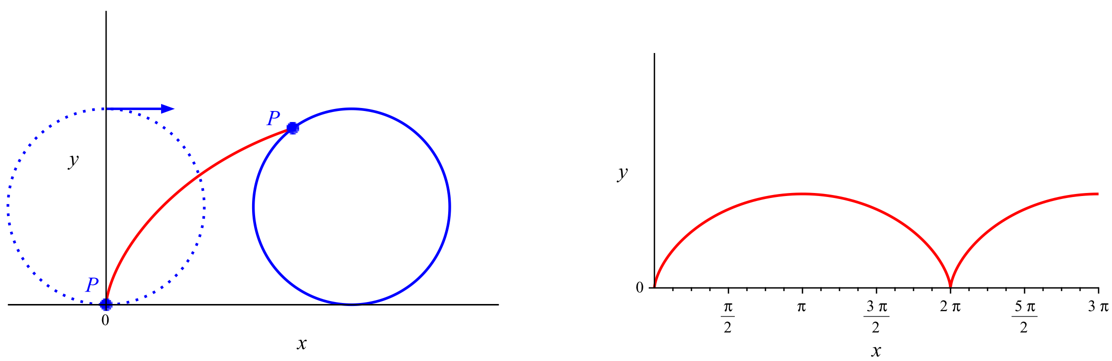
Section 8.3 nos. 1, 17a).

2 Courbes paramétrées

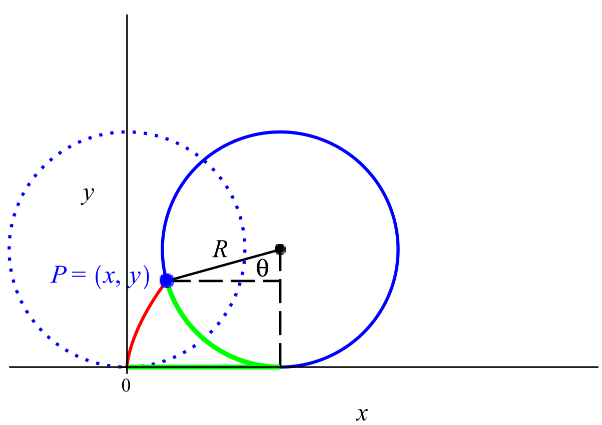
1. Soit C la courbe d'intersection du paraboloïde $z = 5 - x^2 - y^2$ et du plan $z = x - 2y$. Donnez une paramétrisation de C (y compris l'intervalle du paramètre). Simplifiez votre réponse. Dans quel sens cette courbe est-elle parcourue, lorsque vue du dessus ?

   Indice : la paramétrisation d'un cercle quelconque peut être obtenue à partir de celle d'un cercle centré à l'origine.

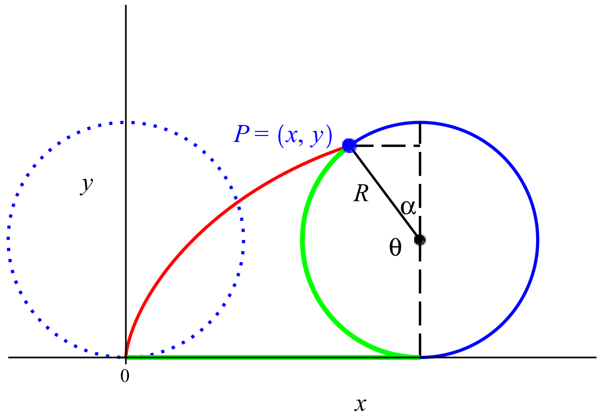
2. Soit C la courbe tracée (en rouge) dans le plan par un point P situé sur un cercle de rayon R qui roule sans glisser le long de l'axe des x, comme illustré ci-dessous. On suppose que P est initialement à l'origine.



   (a) En vous inspirant de la figure ci-dessous, trouvez une paramétrisation de la courbe C, c'est-à-dire exprimez les coordonnées d'un point (x, y) sur la courbe en fonction du paramètre θ, qui est l'angle de rotation du cercle. Ici, on suppose que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



   (b) En utilisant au besoin des identités trigonométriques, montrez que la paramétrisation trouvée en a) est aussi valide si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, en vous inspirant de la figure ci- dessous.



(c) Faites de même pour les cas $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ et $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$.

(d) La courbe C est appelée *cycloïde* et apparaît dans plusieurs situations pratiques. Faites une courte recherche pour trouver une propriété ou une application intéressante de cette courbe.

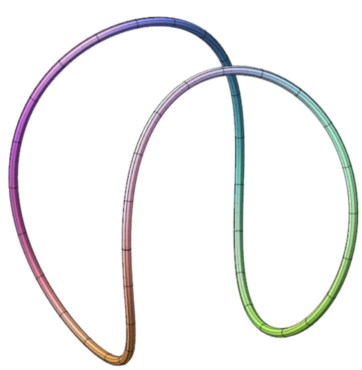
3 Fonctions vectorielles

3. Si $\vec{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire, démontrez la formule suivante :
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(f(t))\right) = f'(t)\vec{u}\,'(f(t)).$$

4. On considère un objet en mouvement dans l'espace dont la position à l'instant t est donnée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$. Dans ce cas, la *vitesse* de l'objet est $\vec{r}\,'(t)$, sa *vitesse scalaire* est $||\vec{r}\,'(t)||$ et son accélération est $\vec{r}\,''(t)$.
Supposons que la vitesse et l'accélération d'un objet soient toujours perpendiculaires. Montrez que, dans ce cas, la vitesse scalaire de l'objet est constante.

4 Vecteur tangent et vecteur normal

5. Soit C la courbe paramétrée par
$$\vec{r}(t) = [3\cos(t) + \cos(3t)]\vec{i} + [3\sin(t) - \sin(3t)]\vec{j} + 2\sqrt{3}\sin(2t)\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Cette courbe est représentée sur la figure suivante :



(a) Montrez que la courbe C est située sur une sphère et donnez l'équation cartésienne de cette sphère.
Indice : Vous devrez utiliser des identités trigonométriques pour simplifier les expressions.

(b) Trouvez tous les points de la courbe où la tangente est verticale (c'est-à-dire perpendiculaire au plan $z = 0$).

6. Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (t^3 - 3t)\,\vec{j} + (-t^2 + t + 2)\,\vec{k}.$$

   (a) Donnez une paramétrisation de la droite tangente à C au point $(4, -2, -4)$.

   (b) Donnez l'équation cartésienne du plan perpendiculaire à C au point $(4, -2, -4)$.

7. Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{i} + 2\sin(t)\,\vec{j} + [3 + 2\sin(t) - 4\cos(t)]\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   Montrez qu'il s'agit d'une courbe plane dans l'espace et donnez l'équation cartésienne du plan qui contient cette courbe.

5 Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 8.1 nos. 19, 2749.

Section 8.2 nos. 13, 19, 25, 53.