No	Points
1	7
2	9
3	7
4	8
5	7
6	7
	45

✓ = 1 point

/ = $\frac{1}{2}$ point

FINAL MTH2120 A2022 - SOLUTIONS (A.S.)

I 7 pts

$$I := \int_0^\infty \underbrace{\frac{\cos(x)}{1+x^2}}_{=: f(x)} dx,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx \quad \text{car } f \text{ est paire,}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx}_{=: J}\Bigg]$$

où J est une intégrale de Fourier.

$g(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ est

1) ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $z = \pm i$, et

2) $g(z) \to 0$ si $|z| \to \infty$, donc

le théorème vu en classe s'applique,

c.à.d.

$$J = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,;\, z=i\right),$$

or $z=i$ est un pôle simple de $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$

car

$$\lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\,e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i},$$

$$= -\frac{i}{2e} \neq 0,$$

donc

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\cancel{2}\pi i \,\frac{(-i)}{\cancel{2}e}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2e}$$

II a) 5 pts

9 pts

$$F(s) = \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{=:G(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s-b}}_{=:H(s)}$$

$$F(s) = G(s) \cdot H(s)$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(f(s) \cdot g(s)\Big),$$

$$= (f * g)(t)$$ d'après le th. de convolution,

Ici $g(t) = e^{at}$ et $h(t) = e^{bt}$ d'après la table de T.L., donc

$$f(t) = \int_0^t g(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta,$$

$$= \int_0^t e^{a\theta}\, e^{b(t-\theta)}\, d\theta,$$

$$= e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\theta}\, d\theta,$$

$$= e^{bt}\left(\frac{e^{(a-b)\theta}}{a-b}\Big|_0^t\right), \quad a \neq b,$$

$$= \frac{1}{a-b}\, e^{bt}\left(e^{(a-b)t} - 1\right),$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

b) 4 pts $F(s)$ est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $s=a$ et $s=b$,

et $F(s) \to 0$ si $|s| \to \infty$, donc le th. s'applique :

$$f(t) = \mathrm{Res}\left(e^{st} F(s)\,;\, s=a\right) + \mathrm{Res}\left[e^{st} F(s)\,;\, s=b\right].$$

$s=a$ et $s=b$ sont des pôles simples de F, donc

$$f(t) = \left.\frac{e^{st}}{s-b}\right|_{s=a} + \left.\frac{e^{st}}{s-a}\right|_{s=b},$$

$$= \frac{e^{at}}{a-b} + \frac{e^{bt}}{b-a},$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

III 7 pts

$$y(n+2) - y(n) = x(n+1) + x(n), \quad n \geq 0, \qquad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad x(0) = 0.$$

a) 2 pts

La Tz de (1) donne

$$z^2 Y(z) - Y(z) = z\, X(z) + X(z),$$

où $X(z) := \mathcal{Z}(x(n))$ et $Y(z) := \mathcal{Z}(y(n))$,

d'où $(z^2 - 1)\, Y(z) = (z+1)\, X(z)$, et

$$\boxed{H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z^2-1} = \frac{1}{z-1}.}$$

b) 5 pts

$$X(z) = \mathcal{Z}\big(u(n-1)\big) = z^{-1}\, \mathcal{Z}(1),$$

$$= z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1},$$

donc $Y(z) = H(z)\, X(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$

et

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C:|z|=2} \underbrace{z^{n-1} \frac{1}{(z-1)^2}}_{=: f(z)} dz$$

f est ana. partout dans $\mathbb{C}$
sauf en $z=1$ pour $n \geq 1$
et $z=0$ pour $n=0$ seulement.

Pour $n \geq 1$, $z=1$ est un pôle double donc

$$y(n) = \mathrm{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-1)^2}, z=1\right)$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left(z^{n-1}\right) = (n-1) z^{n-2} \Big|_{z=1},$$

$$= n-1.$$

Pour $n=0$, $y(0) = \lim_{|z| \to \infty} Y(z) = 0$,

donc

$$\boxed{y(n) = (n-1)\, u(n-1).}$$

IV 8 pts

a) 4 pts

$$(t\,u(t)) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta\, u(\theta)\, u(t-\theta)\, d\theta,$$

$$= \int_{0}^{\infty} \theta\, u(t-\theta)\, d\theta,$$

car $u(\theta) = 0$ pour $\theta < 0$.

Posons $x = t - \theta$:

$$= \int_{t}^{-\infty} (t-x)\, u(x)(-dx),$$

$$= \int_{-\infty}^{t} (t-x)\, u(x)\, dx,$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \int_0^t (t-x)\, dx & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

$$= \frac{t^2}{2} u(t).$$

b) 4 pts

Soit $\varphi \in \{C^\infty : \lim_{\pm\infty} \varphi = 0\}$; et $a<0$, $b>0$.

$$\int_a^b \delta(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0). \qquad (1)$$

$$\int_a^b \delta(-t)\,\varphi(t)\,dt = ?$$

$x = -t$:

$$= \int_{-a}^{-b} \delta(x)\,\varphi(-x)\,(-dx)$$

$$= \int_{-b}^{-a} \delta(x)\,\varphi(-x)\,dx, \quad -b<0, \; -a>0,$$

$= \varphi(-0) = \varphi(0)$. (2)

(1) et (2) sont égales pour tous les φ

donc $\delta(x) \overset{d}{=} \delta(-x)$.

V 7 pts

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

a) 2.5 Si $x = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

donc $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

$x = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité de f,
donc le th. de Dirichlet donne

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum \cdots,$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

b) 2.5 D'après l'identité de Parseval
avec $L = \pi$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n+1)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot 2\cancel{\pi} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

c) f est discontinue en $-\pi$, 0 et π.

2

Dans les trois cas, f passe de 0 à 1 ou de 1 à 0. D'après le th. de Dirichlet, $S(x)$ converge vers la moyenne des valeurs à gauche et à droite de la discontinuité, c.a.d.

$$S(-\pi) = S(0) = S(\pi) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

VI 7 pts

a) 2

$$T\left(e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t} + \frac{d^n}{dt^n} e^{i\omega t},$$
$$= \left(1+(i\omega)^n\right) e^{i\omega t},$$

donc $\boxed{RF = 1+(i\omega)^n.}$

b) 2 D'après le th. de Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}(\omega)\, i\omega}_{\text{ceci est la T.F. de } f'(t)\text{, donc}}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = i\omega\, \hat{f}(\omega).}$$

c) La sortie $y(t)$ d'un SLS
3 est reliée à l'entrée $x(t)$ par

$y(t) = (h * x)(t)$, où h est sa R.I., donc

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta =: T(x(t)),$$

donc

$$T(e^{zt}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{z(t-\theta)}\, d\theta,$$

$$= e^{zt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{-z\theta}\, d\theta,$$

et donc

$$T(e^{zt}) = \lambda(z)\, e^{zt},$$

où

$$\lambda(z) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{-z\theta}\, d\theta.$$

est la valeur propre.