POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

MTH2120

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé	
1)	/7
2)	/9
3)	/7
4)	/8
5)	/7
6)	/7
	/45

Sigle et titre du cours			
MTH2120 - Analyse appliquée			
Professeur		*Groupe*	*Trimestre*
Antoine Saucier		**1**	**A2022**
Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Lundi	**12 décembre 2022**	**2h30**	**9h30-12h**

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Voir directives particulières	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.**
- **Un aide-mémoire se trouve dans les trois dernières pages du cahier.**
- **Une calculatrice non-programmable autorisée est permise.**
- **Rappel: la pondération de cet examen est 45%.**

Cet examen contient **6** questions sur un total de **33** pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (7 points)

Évaluer

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx,$$

et *justifier chaque étape de votre démarche.*

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (9 points)

Soit

$$F(s) := \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, où a et b sont des constantes réelles telles que $a \neq b$.

a) (5 pts) Calculer $f(t)$ en utilisant le théorème de convolution, et justifier chaque étape de votre démarche.

b) (4 pts) Calculer $f(t)$ en utilisant le théorème des résidus, et justifier chaque étape de votre démarche.

Justifiez vos réponses. Matricule:

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (7 points)

On considère un système linéaire en temps discret modélisé par l'équation

$$y(n+2) - y(n) = x(n+1) + x(n),\ n \geq 0,\, n \in \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

avec les valeurs initiales $y(0) = y(1) = x(0) = 0$.

a) (2 pts) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système.

b) (5 pts) Calculer la réponse $y(n)$ du système au signal d'entrée $x(n) = u(n-1)$ pour tout $n \geq 0$, où u désigne la fonction échelon.

Indication:

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0, \\ 0 \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (8 points)

a) (4 pts) Évaluer le produit de convolution continu

$$(t\ u(t)) * u(t),$$

où $t \in \mathbb{R}$ et u désigne la fonction échelon définie par

$$u(t) := \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ si } t < 0. \end{cases}$$

b) (4 pts) Les distributions de Dirac

$$\delta(t) \quad \text{et} \quad \delta(-t),$$

où $t \in \mathbb{R}$, sont-elles égales au sens des distributions? Justifier votre réponse.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 5 (7 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2π définie sur une période par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est donnée par

$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}. \tag{1}$$

a) (2.5 pts) En utilisant (1), évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

b) (2.5 pts) En utilisant (1), évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

c) (2 pts) Évaluer $s(-\pi)$, $s(0)$ et $s(\pi)$. Justifier vos réponses.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 6 (7 points)

a) (2 pts) Évaluer la *réponse en fréquence* du système linéaire

$$T(x(t)) = x(t) + \frac{d^n x(t)}{dt^n},$$

où $n \geq 0$ est un entier.

b) (2 pts) Soit $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$ la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$. En utilisant le théorème de Fourier, montrer que

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = G(\hat{f}(\omega), \omega)$$

et donner l'expression de la fonction G.

c) (3 pts) Montrer que la fonction $e^{z\,t}$, où $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ est une constante, est une fonction propre pour tout système linéaire stationnaire, et donner l'expression de la valeur propre $\lambda(z) \in \mathbb{C}$.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

AIDE-MÉMOIRE

$$\text{Pôle simple : Res}\,(f(z); z = a) = \lim_{z\to a} ((z-a)\, f(z))\,.$$

$$\text{Pôle double : Res}\,(f(z); z = a) = \lim_{z\to a} \frac{d}{dz} \Big((z-a)^2\, f(z)\Big)\,.$$

Transformée en z:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz.$$

$$Z\,(f(n-m)\,u(n-m)) = z^{-m}\, F(z),\ n \geq 0,\ m \geq 0.$$

$$Z\,(f(n+m)) = z^m \left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\, z^{-k}\right),\ m = 1, 2, 3, ...$$

Transformée de Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\, dt, \quad f(t) = \sum_k \text{Res}\left(e^{s\,t} F(s); s = s_k\right) \text{ si } \lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0.$$

Théorèmes de convolution:

$$Z\,((f_1 * f_2)(n)) = F_1(z)\, F_2(z),$$

$$L\,(f(t) * g(t)) = F(s)\, G(s), \quad \mathcal{F}\,(f(t) * g(t)) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega).$$

Produits de convolution:

$$\text{Général: } (x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k).$$

$$\text{Général: } (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta.$$

$$\text{Transformée en z : } (x * y)(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\, y(n-k).$$

$$\text{Transformée de Laplace: } (f * g)(t) = \int_0^t f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta.$$

Transformée de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\, f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,t}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega.$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Séries de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \cos(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 0. \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \sin(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 1.$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\,n\,\pi\,x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\,n\,\pi\,x/L}\, dx.$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Systèmes linéaires stationnaires:

$$T\left(a\ x_1(n) + b\ x_2(n)\right) = a\ T\left(x_1(n)\right) + b\ T\left(x_2(n)\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$T\left(a\ x_1(t) + b\ x_2(t)\right) = a\ T\left(x_1(t)\right) + b\ T\left(x_2(t)\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$y(n-m) = T\left(x(n-m)\right),\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}.$$

$$y(t-a) = T\left(x(t-a)\right),\ t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

$$y(t) = (h * x)(t).$$

$$T\left(e^{i\,\omega\,t}\right) = \mathrm{RF}\ e^{i\,\omega\,t},\ \omega \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Transformées de Laplace élémentaires

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Ex. 5
3. t^n; $n =$ entier positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
4. $t^p,\ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 6
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 7
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ entier positif	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3 ; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2 ; Prob. 28

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé