Montrez que le résultat obtenu en soustrayant le Laplacien d'une image

$$\nabla 2f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

est proportionnel au résultat obtenu en appliquant un masquage flou sur cette image. La définition du rehaussement par masquage flou est :

$$g(x,y) = f(x,y) + k(f(x,y) - \bar{f}(x,y))$$

Il suffit de montrer que cela est valide pour une seule valeur de k.

Indice : Comment pouvez-vous définir $\overline{f}(x,\ y)$, la version "floue" (filtrée passe-bas) de f, à partir de composantes de f?

Solution :

On peut définir $\bar{f}(x,y)$ comme le résultat de l'application d'un filtre passe-bas moyenneur, qui peut être représenté par le masque de convolution suivant (effectuant la moyenne de f(x,y) avec ses 4 plus proches voisins au sens de la 4-connexité) : $\bar{f}(x,y) = \frac{1}{5} \cdot (f(x,y) + f(x,y-1) + f(x-1,y) + f(x+1,y) + f(x,y+1))$. **(A)**

(Le filtre moyenneur peut être représenté par ce masque, qu'on convoluerait avec f(x,y) :

0	1	0	
1	1	1	x1/5)
0	1	0	

En combinant les équations 3.6-8 et 3.6-9, le résultat du masquage flou de f donne **(B)** :

$$f_{masquage\_flou}(x,y) = f(x,y) + k \cdot \left(f(x,y) - \bar{f}(x,y)\right)$$

avec $\bar{f}(x,y)$ défini plus haut en **(A).**

Par ailleurs, le laplacien peut être représenté par le masque suivant :

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Dont l'application sur f(x,y) dans un cadre discret donne le résultat suivant (équation 3.6-6) :

$$\nabla^2 f(x,y) = -4f(x,y) + f(x,y-1) + f(x-1,y) + f(x+1,y) + f(x,y+1)$$

D'où l'on a que le résultat de la soustraction du laplacien de l'image donne :

$f(x,y) - \nabla^2 f(x,y) =$

$f(x,y) + 4f(x,y) - f(x,y-1) - f(x-1,y) - f(x+1,y) - f(x,y+1) =$

$6f(x,y) - f(x,y) - f(x,y-1) - f(x-1,y) - f(x+1,y) - f(x,y+1) =$

$6f(x,y) - (f(x,y) + f(x,y-1) + f(x-1,y) + f(x+1,y) + f(x,y+1)) =$

$6f(x,y) - 5\bar{f}(x,y) =$ (d'après la définition donnée en **(A)**)

$5f(x,y) + f(x,y) - 5\bar{f}(x,y) =$

$f(x,y) + 5(f(x,y) - \bar{f}(x,y))$

On reconnaît l'expression du masquage flou **(B)**, si k = 5. CQFD.