a) Montrez que la magnitude d'un nombre complexe est une opération non linéaire.

$z = x + iy$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Linear operator :
$\hat{A}(f+g) = \hat{A}f + \hat{A}g$
$\hat{A}(cF) = c\hat{A}f$

$$\hat{A}(f+g) = \hat{A}(x_f + iy_f + x_g + iy_g) = \hat{A}\left((x_f + x_g) + i(y_f + y_g)\right) = \sqrt{(x_f + x_g)^2 + (y_f + y_g)^2}$$
$$\hat{A}f + \hat{A}g = \hat{A}(x_f + iy_f) + \hat{A}(x_g + iy_g) = \sqrt{x_f{}^2 + y_f{}^2} + \sqrt{x_g{}^2 + y_g{}^2}$$

$\sqrt{(x_f + x_g)^2 + (y_f + y_g)^2} \neq \sqrt{x_f{}^2 + y_f{}^2} + \sqrt{x_g{}^2 + y_g{}^2}$ QED

b) En IRM, on peut mesurer des signaux provenant d'une personne avec des bobines perpendiculaires (voir Figure 1). Une des bobines mesura la partie réel du signal (« Real Channel), et l'autre la partie imaginaire (« Imaginary Channel »). Le bruit associé avec chaque signal est du bruit blanc gaussien additif. Des images réels et imaginaires sont formées en utilisant la transformé de Fourier. Quel sera la distribution du bruit dans ces images, et pourquoi?

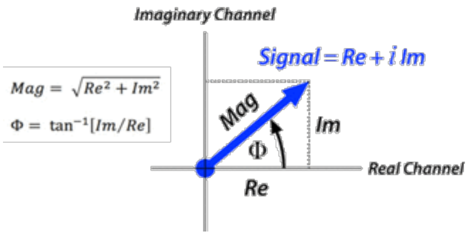


Figure 1

Les images de réels et imaginaires auront une distribution de bruit gaussienne, parce que la transformé de Fourier est une transformé linéaire, donc les propriétés du bruit sont maintenues.

Linear operator :
$\hat{A}(f+g) = \hat{A}f + \hat{A}g$
$\hat{A}(cF) = c\hat{A}f$

$$TF^{-1}(R + iM + N) = TF^{-1}(R) + iTF^{-1}(M) + TF^{-1}(N) = r + im + \eta$$

Signal réel dans le domaine fréquentiel/spatial : R/r
Signal imaginaire dans le domaine fréquentiel : M/m
Bruit gaussien dans le domaine fréquentiel : N/ η
**** La TF d'une distribution gaussienne est une distribution gaussienne*

c) Les images qui nous intéressent sont les images de magnitude. Nommez la forme de la distribution du bruit présent dans les images de magnitude. Pourquoi aura-t-elle cette forme?

Les images de magnitude auront une distribution de bruit Ricienne (voir les diapos de la leçon #5). L'opération de magnitude n'est pas linéaire, donc les propriétés du bruit ne sont pas maintenues.

d) Quel sera la matrice de covariance normalisé du bruit?

Bruit blanc = bruit non-corrélé

$\mathrm{Cov}\,[F\,,G] = \mathrm{E}[\,(F\, -\, \mathrm{E}[F])(G\, -\, \mathrm{E}[G])\,]$

F et G indépendantes $\Rightarrow \mathrm{Cov}\,[F\,,G] = 0$

Coefficient de corrélation:

$$\rho_{F,G} = \frac{\mathrm{Cov}[F,G]}{\sqrt{\mathrm{Var}[F]\mathrm{Var}[G]}} \quad ; \quad -1 \leq \rho_{F,G} \leq 1$$

$$\mathrm{Var}\,[F] = m_2[F] - m_1[F]^2 = \mathrm{E}\left[F^2\right] - \mathrm{E}\,[F]^2 = \mathrm{E}\left[(F - \mathrm{E}\,[F])^2\right]$$

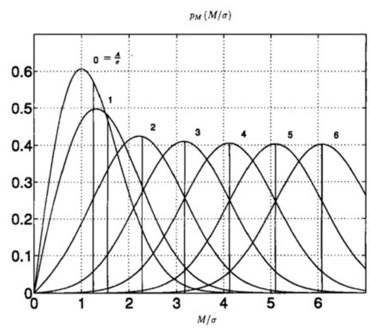
Covariance normalisé = corrélation =0 quand $i \neq j$ et 1 quand i = j

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e) Si on calcul la moyenne de plusieurs images de magnitude, comme celle de la Figure 2, quel sera l'effet sur la qualité de l'image résultant? Notez que certaines régions de l'image ont un signal plus élevé que d'autres.

Figure 2

Biais positif dans les régions de faible intensité.



Dans les régions avec un signal plus élevé, la distribution du bruit est plutôt gaussienne, donc, le moyennage donnera lieu à une diminution du bruit parce que la moyenne correspond au maximum de la distribution.

Dans les régions de faible intensité, la distribution du bruit est asymétrique, ce qui fait en sorte que si on prend la moyenne de plusieurs images, il y aura un biais positif. Le maximum de la distribution correspond à une valeur plus base que la moyenne.