POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

NeuroPoly

Signaux aléatoires et estimation

Eva Alonso Ortiz

ELE8812

6 février 2025

Position du problème (1)

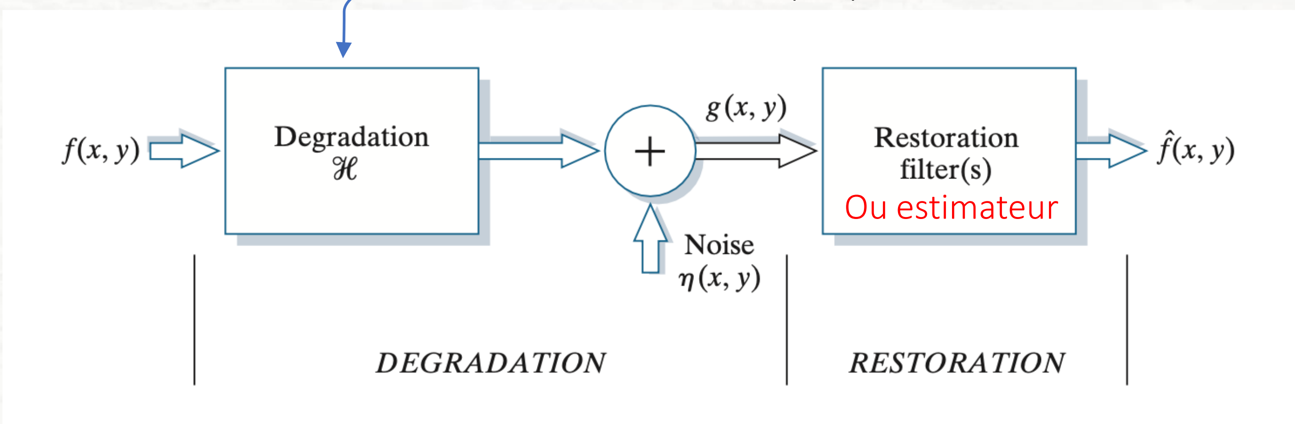
Restauration d'images

Représentation spatiale de la fonction de dégradation

- Modèle de formation d'images $g(x,y) = (h \star f)(x,y) + \eta(x,y)$

bruit

Operateur « $\mathcal{H}$ » : dégradation linéaire, invariante par positon



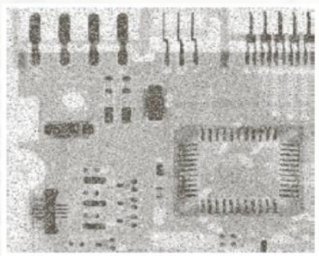
- Objectif : trouver $\hat{f}$ proche de f
- Quantification de la qualité du résultat : $\|\hat{f} - f\|$

Position du problème (1)

Restauration d'images uniquement affecté par du bruit

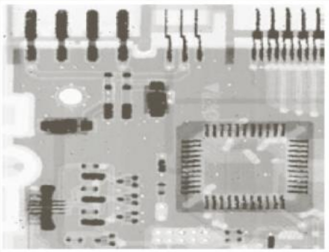
- Modèle de formation d'images: $g(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$

Bruit impulsionnel



Leçon 2

Filtre médian

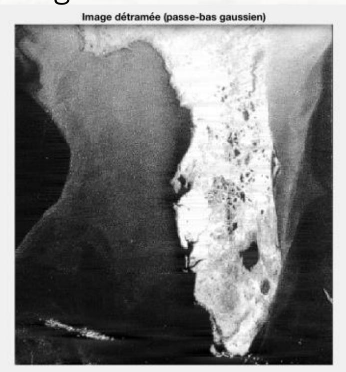


Correction des défauts par diverses techniques

Artefact typique de « raster »

Leçon 4

Détramage dans le domain Fourier



Position du problème (1)

Restauration d'images

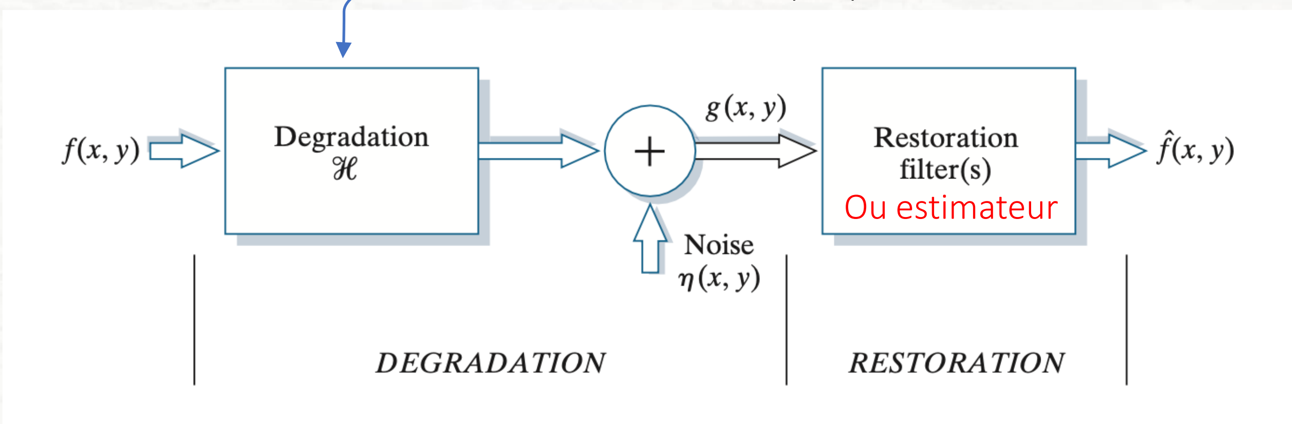
Représentation spatiale de la fonction de dégradation

- Modèle de formation d'images

$$g(x,y) = (h \star f)(x,y) + \eta(x,y)$$

bruit

Operateur « $\mathcal{H}$ » : dégradation linéaire, invariante par positon



- Estimation de $f(x,y)$ à partir de $g(x,y)$: comportement statistique

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d’ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Cadre

Hypothèses générales

- Grandeurs réelles
- Grandeurs discrètes
- Dimensions possiblement infinies
- Simplification des notations : quantités 1D
- Nombre fini de composantes : manipulation de vecteurs

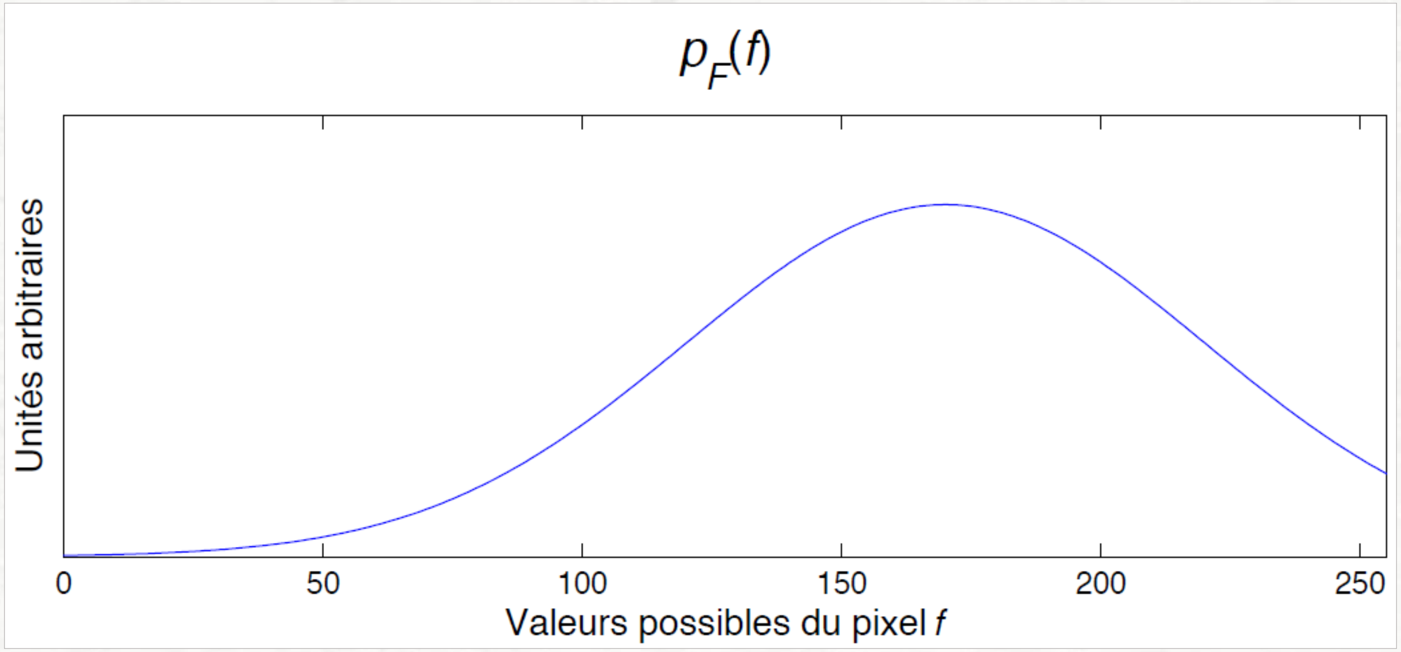
$$f(x,y) \longrightarrow \boldsymbol{f}$$

Image $f(x,y)$ aléatoire ou incertaine

Les composantes f sont affectées d'incertitudes

Variables aléatoires (1)

Un pixel *F*



Interprétation

$P_F(f)$: *confiance* que le pixel *F* prendra la valeur *f*

Variables aléatoires (2)

Formalisation

Densité de probabilité

- F : variable aléatoire
- $P_F(f)$: densité de probabilité

$$P_F(f)df = \Pr\{f \leq F < f + df\}$$

Propriétés

$$p_F(f) \geq 0\,; \qquad \int p_F(f)df = 1$$

Espérance ou moyenne : $\mathrm{E}[F] = \int f\, p_F(f)df$

Espérance d'une fonction : $\mathrm{E}[\Phi(F)] = \int \Phi(f)\, p_F(f)df$

Moments d'ordre : $p : m_p[F] = \mathrm{E}[F^p] = \int f^p p_F(f)df$

Variables aléatoires d'ordre 2

Définition

- Le moment d'ordre 2 existe
- Conséquence : le moment d'ordre 1 (la moyenne) existe

Variance

$$\operatorname{Var}[F] = m_2[F] - m_1[F]^2 = \mathrm{E}\left[F^2\right] - \mathrm{E}[F]^2 = \mathrm{E}\left[(F - \mathrm{E}[F])^2\right]$$

Variables aléatoires gaussiennes

Définition

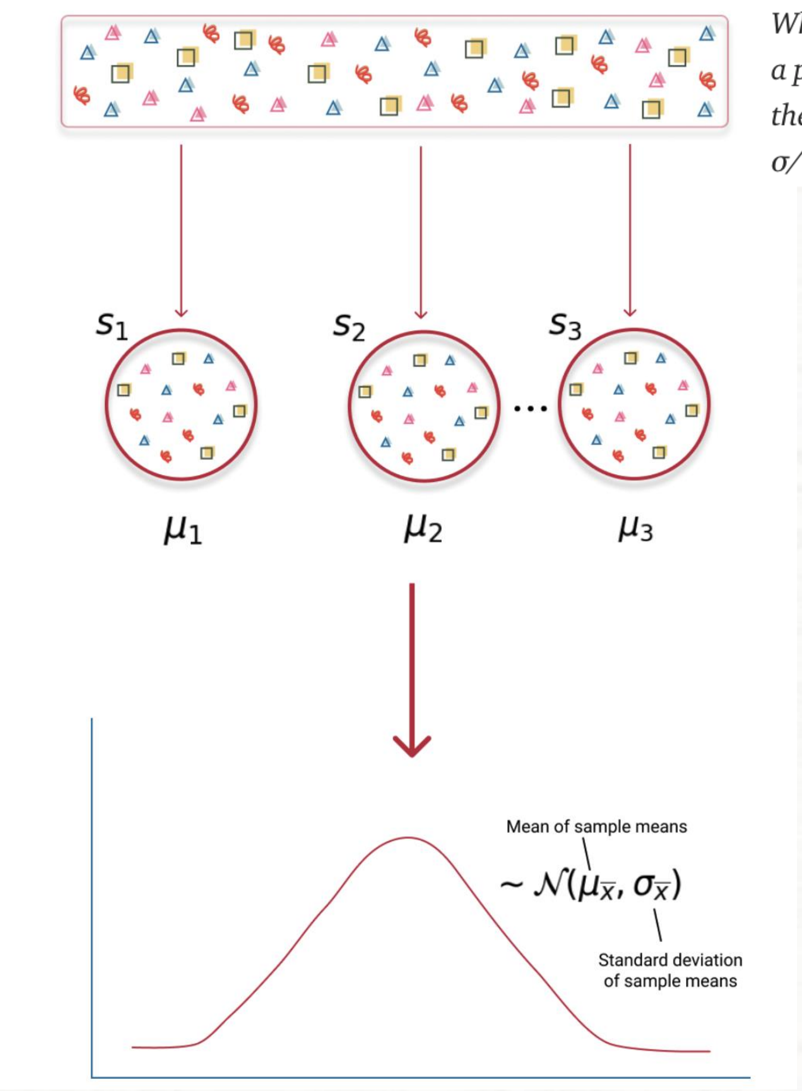
$$\mathcal{N}(m,\sigma^2) : p_F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(f-m)^2}{2\sigma^2}}$$

m : $moyenne$
σ^2: $variance$

Importance

- Représente adéquatement de nombreux phénomènes incertains (théorème de la limite centrale)
- Choix raisonnable si on ne connaît que la moyenne et la variance d'une variable aléatoire

Variables aléatoires gaussiennes



When we collect a sufficiently large sample of n independent observations from a population with mean μ and standard deviation σ, the sampling distribution the sample means will be nearly normal with mean = μ and standard error = σ/ √n

https://towardsdatascience.com/central-limit-theorem-a-real-life-application-f638657686e1

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d’ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Couples de variables aléatoires (1)

Cadre

- Deux pixels *F* et *G*
- Comment exprimer leur comportement d'ensemble ?

Formalisation : extension du cas scalaire

- Densité de probabilité du couple

$$
\begin{aligned}
p_{FG}(f,g)df\,dg &= \Pr\{f \leq F < f+df \ ;\ g \leq G < g+dg\} \\
p_{FG}(f,g) \geq 0 \quad &; \quad \iint p_{FG}(f,g)\,df\,dg = 1
\end{aligned}
$$

Couples de variables aléatoires (2)

Propriétés importantes

Loi de chaque élément du couple

$$p_F(f) = \int p_{FG}(f,g)\, dg \quad ; \quad p_G(g) = \int p_{FG}(f,g)\, df$$

Indépendance

$$F \text{ et } G \text{ indépendantes} \iff p_{FG}(f,g) = p_F(f)\, p_G(g)$$

Couples de variables aléatoires (3)

Propriétés importantes

Covariance

Mesure de la variabilité jointe de F et G

- $\mathrm{Cov}\,[F\,,G] = \mathrm{E}[\,(F - \mathrm{E}[F])(G - \mathrm{E}[G])\,]$
- F et G indépendantes $\Rightarrow \mathrm{Cov}\,[F\,,G] = 0$
- Matrice de covariance: $\boldsymbol{R}_{F,G} = \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} F - \mathrm{E}[F] \\ G - \mathrm{E}[G] \end{pmatrix}(F - \mathrm{E}[F]\;,\;G - \mathrm{E}[G])\right]$

$$R_{F,G} = \begin{bmatrix} E(F - E[F])^2 & E((F - E[F]) \cdot (G - E[G])) \\ E((G - E[G]) \cdot (F - E[F])) & E(G - E[G])^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}[F] & E((F - E[F]) \cdot (G - E[G])) \\ E((G - E[G]) \cdot (F - E[F])) & \mathrm{Var}[G] \end{bmatrix}$$

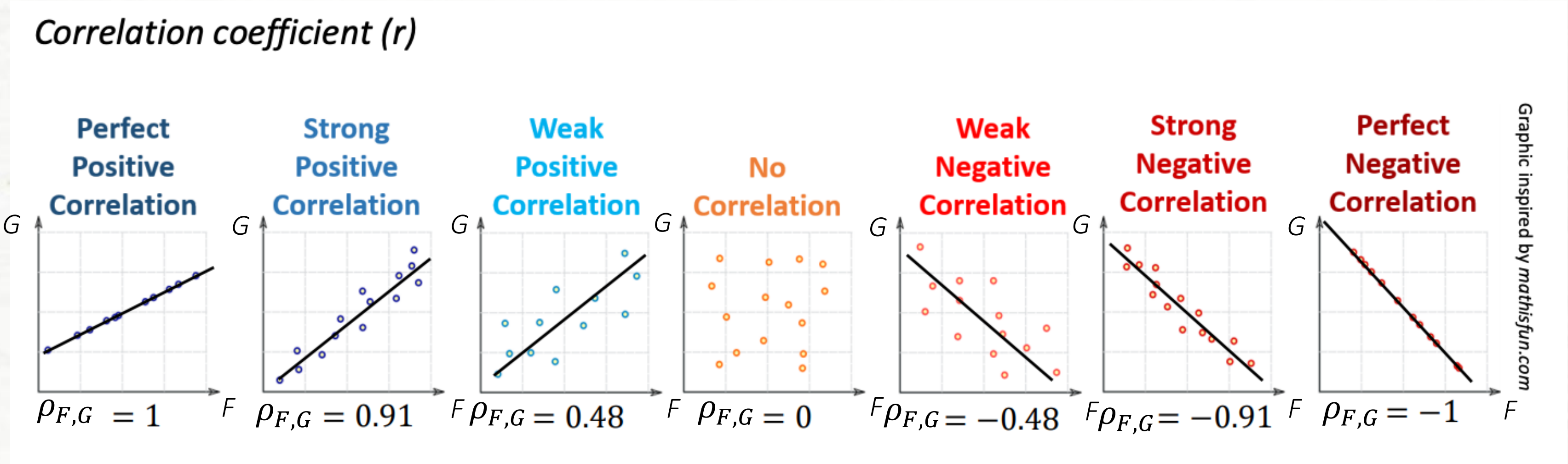
Couples de variables aléatoires (4)

Propriétés importantes

Corrélation

- Coefficient de corrélation: $\rho_{F,G} = \frac{\text{Cov}[F,G]}{\sqrt{\text{Var}[F]\text{Var}[G]}}$; $-1 \leq \rho_{F,G} \leq 1$

Covariance normalisé



Problèmes

La matrice de covariance pour deux pixels est: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quel sera le coefficient de corrélation pour ces deux pixels?

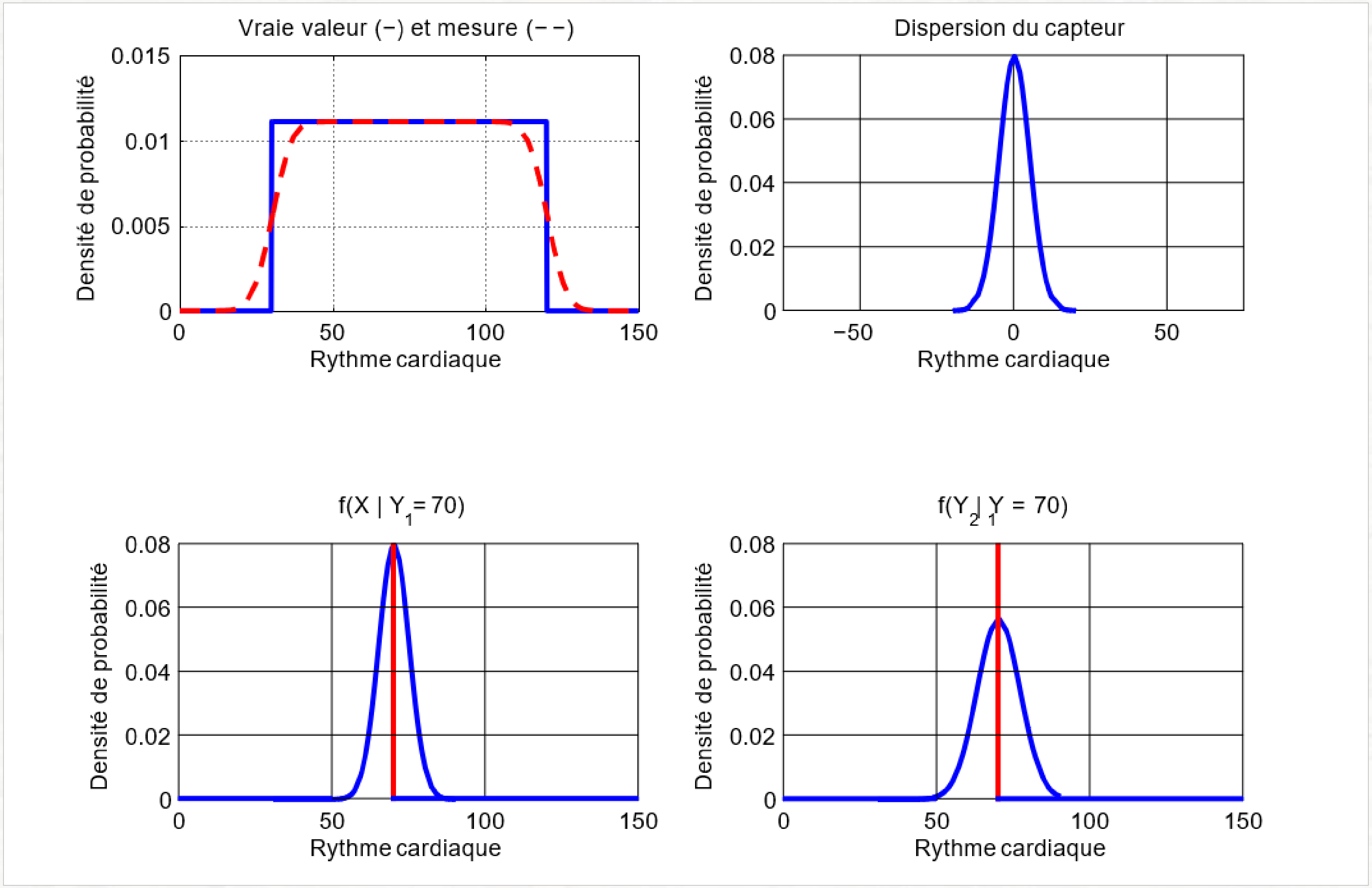
Please download and install the Slido app on all computers you use

Matrice de covariance pour 2 pixels: [1 0; 0 1]. Quel sera le coefficient de correlation?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Conditionnement (1)

La connaissance de *F* renseigne-t-elle sur les valeurs plausibles de *G* ?



Conditionnement (2)

Formalisation

- (F, G) de loi $p_{FG}(f, g)$
- $p_{G|F=f}(g)$: loi conditionnelle de G sachant que F vaut f
- Règle de Bayes

$$p_{G|F=f}(g) = \frac{p_{FG}(f, g)}{p_F(f)}$$

$$\boxed{p(G|F)} \cdot p\,(F) = p(F, G) = p(G, F) = p(F|G) \cdot p\,(G)$$

$$\boxed{p(G|F) = \frac{p(F|G) \cdot p(G)}{p(F)}}$$

Conditionnement (3)

Scenario

Tu te sens malade. Un médecin t’offre un test diagnostique. Il te dit que le taux de faux positifs est de 2% et le taux de faux négatifs est de 1%.

Ton test est positif.

P(T|~M) = 2% → probabilité d’un test positif si pas malade
P(~T|M) = 1% → probabilité d’un test négatif si malade
P(T|M) = 1-0.01 = 99% → probabilité d’un test positif si malade

Quelle est la probabilité que tu aies la maladie?

slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

Quelle est la probabilité que tu aies la maladie?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Conditionnement (4)

$$p(G|F) = \frac{p(F|G) \cdot p(G)}{p(F)}$$

F = test positif
G = maladie présente

Règle de Bayes

$$p(M|T) = \frac{p(T|M) \cdot p(M)}{p(T)}$$

T = test positif
M = maladie présente

Probabilité d'avoir une maladie donnée en ayant un test positif

$$P(M|T) = \frac{P(M,T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|{\sim}M)P({\sim}M)}$$

$P(M|T)$: probabilité d'une maladie (M) si un test est positif (T)
$P(T|M)$: probabilité d'un test positif, si une maladie
$P(M)$: probabilité de maladie (incidence)
$P(T|{\sim}M)$: probabilité d'un test positif si pas de maladie (~M)

Conditionnement (5)

Scenario

L'information qui nous manquait: Le taux d'incidence.

- La maladie affecte 1/10,000 personnes dans la population.
- $P(M)$: 1/10,000

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|{\sim}M)P({\sim}M)}$$

$P(M)$: 1/10,000
$P(T|{\sim}M)$: 0.02
$P(T|M)$: (1-0.01)
$P({\sim}M)$: 1-(1/10,000)

$$P(M|T) = \frac{(1-0.01)*0.0001}{(1-0.01)*0.0001 + 0.02*(1-0.0001)}$$

=0.0049

0.5% !

https://www.yudkowsky.net/rational/bayes

Couples de variables aléatoires gaussiennes

$$p_{G|F=f}(g) = \frac{p_{FG}(f,g)}{p_F(f)}$$

$$p_{FG}(f,g) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{R}_{FG}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(f-m_F,g-m_G)\boldsymbol{R}_{FG}^{-1}\begin{pmatrix} f-m_F \\ g-m_G \end{pmatrix}}$$

covariance

Propriétés

Si le couple (F, G) suit une loi gaussienne

- Chacune des variables est gaussienne
- Les lois conditionnelles sont gaussiennes

Importance pratique

- Choix raisonable si (F, G) n'est connu que par sa moyenne et sa matrice de covariance
- Représente une large gamme de phénomènes

Vecteurs aléatoires

Définition et propriétés

Extension directe des propriétés des couples de variables aléatoires

Est-ce suffisant?

- Représentation d'incertitudes dans des images de taille finie: OK
- Opérations usuelles (e.g., convolution, representation fréquentielle)

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Signaux aléatoires à temps discret

Définition

- $F = \{ F_n \, ; n \in \mathbb{Z}\}$ signal aléatoire (ensemble de variables aléatoires)
- $p_{F_n}(f_n)$; $n \in \mathbb{Z}$ impossible à définir
- Comportement de F défini à partir de la loi conjointe de tout sous ensemble fini de ses composantes

Caractéristiques importantes

- **Caractéristiques *instantanées*** : caractéristiques de tout échantillon (pris indépendamment des autres)

  $p_{F_n}(f_n)$; $m_n = \mathrm{E}[F_n]$; $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}[F_n]$ ...

- **Caractéristiques du *deuxième ordre*** : caractéristiques de tout couple d'échantillons

  Covariance : $r_F(n, p) = \mathrm{Cov}\left[F_n, F_p\right]$

Signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2

La plupart des images

Définition

- Stationnarité : propriétés statistiques *invariantes par décalage*
- Signal aléatoire stationnaire d'ordre deux :
  - La moyenne $m_n = \mathrm{E}[F_n]$ et la covariance $r_F\,(n, p)$ existent
  - Ces quantités sont invariantes par décalage :

$$m_n = m \qquad ; \qquad r_F\,(n, p) = r_F\,(p-n\,)$$

  - $r_F\,(p-n\,) = r_F(k)$ fonction d'autocorrélation

deterministe

Ex:

Bruit blanc = bruit non-corrélé

Quelle sera la fonction d'autocorrélation?

slido

Please download and
install the Slido app on
all computers you use

Quelle est la fonction d'autocorrelation du bruit blanc?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2

Définition

La plupart des images

- Stationnarité : propriétés statistiques *invariantes par décalage*
- Signal aléatoire stationnaire d'ordre deux :
  - La moyenne $m_n = \mathrm{E}[F_n]$ et la covariance $r_F(n, p)$ existent
  - Ces quantités sont invariantes par décalage :

$$m_n = m \qquad ; \qquad r_F(n, p) = r_F(p - n)$$

  - $r_F(p - n) = r_F(k)$ fonction d'autocorrélation

deterministe

Propriétés importantes

Pour les signaux aléatoires stationnaires d'ordre deux, on peut définir

- La notion de filtrage
- La notion de représentation fréquentielle

Représentation fréquentielle et filtrage (1)

Rappel

F stationnaire d'ordre 2 : F défini complètement par sa moyenne et sa fonction de autocorrélation

Représentation fréquentielle

aléatoire

- Représentation spectrale $u(v)$: $F_n = \int u(v) e^{2i\pi v n} \, dv$
- $r_F(k)$: fonction d'autocorrélation de F
- $\mathcal{F}\left(r_F(k)\right) = \mathrm{E}\left[|u(v)|^2\right]$ ⟵ densité spectrale de puissance (spectre) de F, $\Gamma_F(v)$

Ex:

Bruit blanc = bruit non-corrélé

Quelle sera la densité spectrale?

slido

Please download and
install the Slido app on
all computers you use

Quelle sera la densité spectrale du bruit blanc?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Représentation fréquentielle et filtrage (2)

Filtrage

- Difficulté : donner un sens au produit de convolution:

$$G(n) = (h * F)(n)$$

- On peut montrer que :

$$\begin{aligned} r_G(k) &= r_F(k) * h(k) * h(-k) \\ \Gamma_G(v) &= |H(v)|^2 \Gamma_F(v) \end{aligned}$$

Lien avec la pratique ?

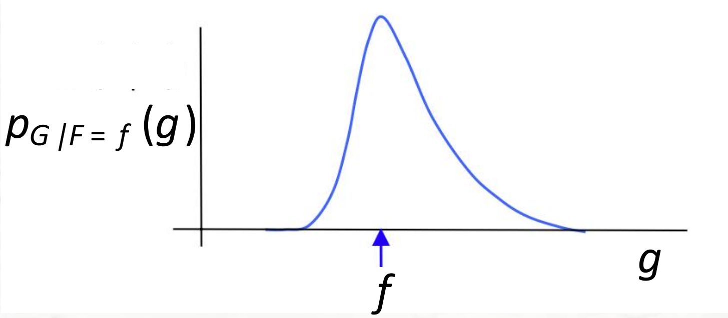
- Représentation déterministe ou aléatoire : question de modélisation
- Représentation déterministe : simple, mais limitée
- Représentation aléatoire : double problème d'estimation
  - estimation des caractéristiques statistiques des signaux
  - estimation de la quantité d'intérêt

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. $\boxed{\text{Estimation}}$
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Estimation: Position du problème

- Une mesure avec un détecteur



Vraisemblance: $\mathcal{L}(f) = p(G|F = f)(g)$

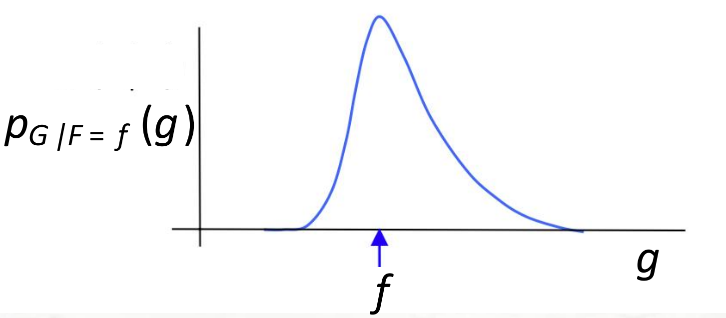
- Donné un ensemble de mesures g = (g_1, g_2, …, g_n), quelle est la valeur de f ?
- Estimateur:
  - Une fonction $\Psi(g)$ qui nous permet de estimer $\hat{f} = \Psi(g)$

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Estimateurs classiques (1)

Maximum *vraisemblance (likelihood)* (MLE)



- $\hat{f} = \arg max_{\ f} \{p_{G|F=f}(g)\}$

Fonction de vraisemblance

Estimateurs classiques (2)

Maximum *vraisemblance (likelihood)* (MLE)

- Ex: Deux mesures sonar indépendantes (avec des moyennes z_1 et z_2) de la position d'un objet (x).

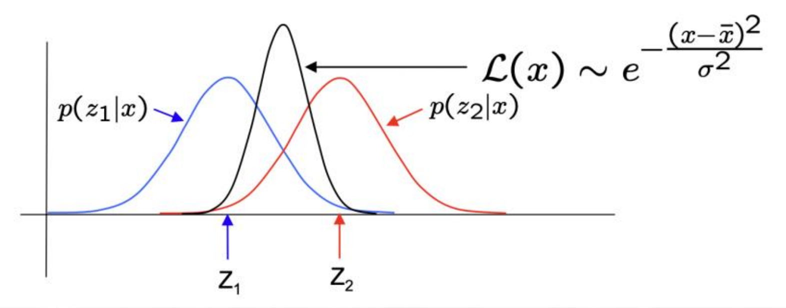
  Le modèle du détecteur est $p(z_i|x) = N(x, \sigma^2)$.

Les mesures sont indépendantes: $\mathcal{L}(x) = p(z_1, z_2|x) = p(z_1|x)\,p(z_2|x)$

$$\mathcal{L}(x) \sim e^{-\frac{(z_1-x)^2}{2\sigma^2}} \times e^{-\frac{(z_2-x)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(z_1-x)^2+(z_2-x)^2}{2\sigma^2}}$$

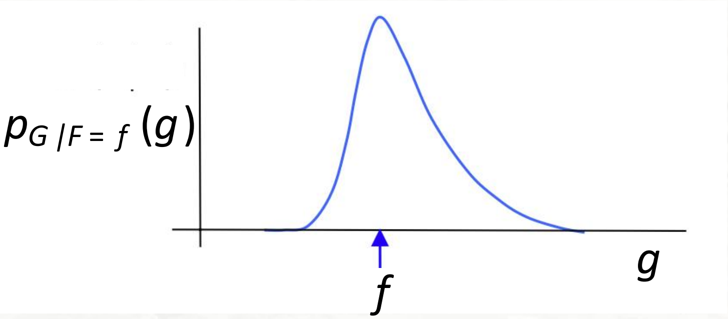
$$\mathcal{L}(x) \sim e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}} \qquad \bar{\mathbf{x}} = \frac{z_1+z_2}{2}$$

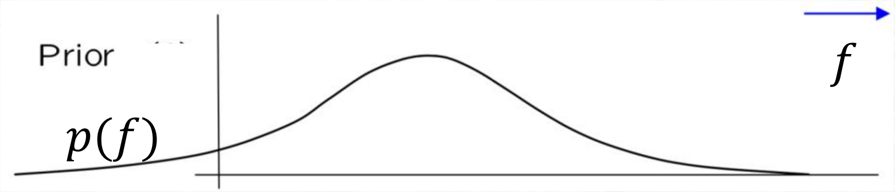
$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\max_x \mathcal{L}(x) \qquad \hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} = \frac{z_1+z_2}{2}$$



Estimateurs classiques (3)

Maximum *a posteriori* (MAP)





a priori

- $p_{F|G=g}(f) = \dfrac{p_{G|F=f}(g)\,p_F(f)}{p_G(g)}$

a posteriori

$$\hat{f} = \arg\max_f \left\{ p_{F|G=g}(f) \right\} = \arg\max_f \left\{ p_{G|F=f}(g)\ p_F(f) \right\}$$

- $\hat{f}$: valeur de f « la plus probable » compte tenu de la valeur des mesures

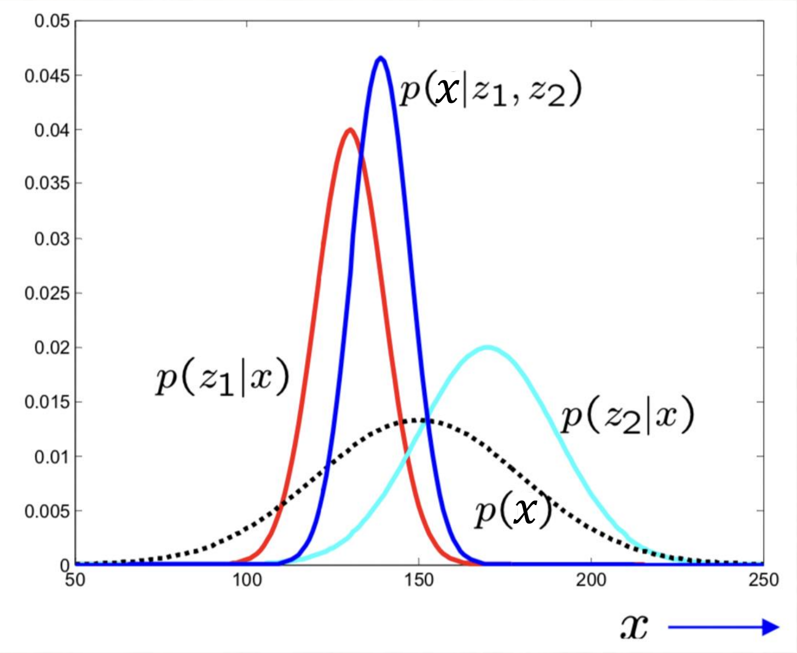
Estimateurs classiques (3)

Maximum *a posteriori* (MAP)

- Ex: Deux mesures sonar indépendantes (z_1,z_2) de la position d'un objet (x).

  Les modèles des détecteurs sont $p(z_1|x) = N(x,\sigma_1^2)$, $p(z_2|x) = N(x,\sigma_2^2)$.
- $p(x)=N(x_p, \sigma_p^2)$

$$p(x|z) = \frac{p(z/x)p(x)}{p(z)}$$



Estimateurs classiques (4)

Moyenne *a posteriori*

- $\hat{f} = \mathrm{E}[F|G = g] = \int f \; p_{F|G=g}(f) \; df$ que moyenne
- Interprétation : erreur quadratique moyenne minimale
- Mise en oeuvre difficile

Estimateurs classiques (5)

Estimateur linéaire d'erreur quadratique moyenne minimale

- $\hat{f} = w * g \quad ; \quad \mathrm{E}\left[\|\hat{f} - f\|^2\right]$ (erreur minimale)
- Hypothèse gaussienne implicite
- Mise en oeuvre par filtre de Kalman ou de Wiener

Estimateurs empiriques

- $\hat{f} = \Psi(g)$
- Choix de Ψ ?
- Qualité de l'estimateur

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Caractéristiques des estimateurs

Position du problème

- Tous les estimateurs ponctuels sont de la forme $\hat{f} = \Psi(g)$
- $\hat{F}$ aléatoire car G aléatoire
- Comportement statistique de $\hat{F}$?

Principales caractéristiques

- Comportement statistique de $\hat{F}$ résumé par sa moyenne et sa variance
- Moyenne : précision
- Variance : fidélité

- Biais : $B = E\left[\hat{F} - F_V\right]$; F_V : vraie valeur de F
- Erreur quadratique moyenne : $|B|^2 + \mathrm{Var}[\hat{F}]$

Rappels: probabilités et signal aléatoire

1. Variables aléatoires
2. Vecteurs aléatoires
3. Aspects fréquentiels : signaux aléatoires stationnaires d'ordre 2
4. Estimation
5. Estimateurs classiques
6. Caractéristiques des estimateurs
7. Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien

Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien (1)

Hypothèses

- *F* et *G* de dimension finie
- Système linéaire et bruit additif : $g = Hf + \eta$
- Bruit gaussien ; $p_N \; : \; \mathcal{N}(0, \sigma_N^2 \bar{R}_N)$
- *F* gaussien ; $p_F \; : \; \mathcal{N}(0, \sigma_F^2 \bar{R}_F)$

Approche MAP

vraisemblance

- $p_{F\,|G\,=\,g}(f) = \dfrac{p_{G\,|F\,=\,f}(g)\,p_F(f)}{p_G(g)}$ a priori

a posteriori

- $p_{G\,|F\,=\,f}(g)$ gaussien : $p_{G|F=f} \; : \; \mathcal{N}(\boldsymbol{Hf}, \sigma_N^2 \bar{R}_N)$
- $\hat{\boldsymbol{f}} = \arg\max_{\boldsymbol{f}} \left\{ e^{-\frac{(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{Hf})^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{Hf})}{2\sigma_N^2} - \frac{\boldsymbol{f}^{\mathrm{t}}\bar{R}_F^{-1}\boldsymbol{f}}{2\sigma_F^2}} \right\}$ $\hat{\boldsymbol{f}} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} \left\{ \dfrac{(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{Hf})^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{Hf})}{2\sigma_N^2} + \dfrac{\boldsymbol{f}^{\mathrm{t}}\bar{R}_F^{-1}\boldsymbol{f}}{2\sigma_F^2} \right\}$

Estimation MAP dans le cas linéaire et gaussien (2)

Forme de l'estimateur

- Estimateur général : $\hat{\boldsymbol{f}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}\boldsymbol{H} + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_F^2}\bar{R}_F^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}\boldsymbol{g}$
- Si le bruit est blanc : $\hat{\boldsymbol{f}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_F^2}\bar{R}_F^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{g}$

Pas corrélé

- Si F est déterministe : $\hat{\boldsymbol{f}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\bar{R}_N^{-1}\boldsymbol{g}$
- Deux cas précédents : $\hat{\boldsymbol{f}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{g}$ Moindres carrés

Choix d'un estimateur

- Dépend du contraste entre f et η et du « contenu informationnel » de g
- Conditions favorable : moindres carrés OK
- Autrement (traitement d'images) : MAP

Usage d’un estimateur MAP dans la TCO

Optics Letters

Maximum *a posteriori* estimator for high-contrast image composition of optical coherence tomography

AARON C. CHAN,[1,2] KAZUHIRO KUROKAWA,[1,2] SHUICHI MAKITA,[1,2] MASAHIRO MIURA,[2,3] AND YOSHIAKI YASUNO[1,2,*]

[1]Computational Optics Group, University of Tsukuba, Tennodai 1-1-1, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573, Japan
[2]Computational Optics and Ophthalmology Group, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573, Japan
[3]Department of Ophthalmology, Tokyo Medical University Ibaraki Medical Center, 3-20-1 Chuo, Ami, Ibaraki, 300-0395, Japan
**Corresponding author: yasuno@optlab2.bk.tsukuba.ac.jp*

Received 6 November 2015; revised 15 December 2015; accepted 15 December 2015; posted 16 December 2015 (Doc. ID 253438); published 11 January 2016

Usage d’un estimateur MAP dans la TCO

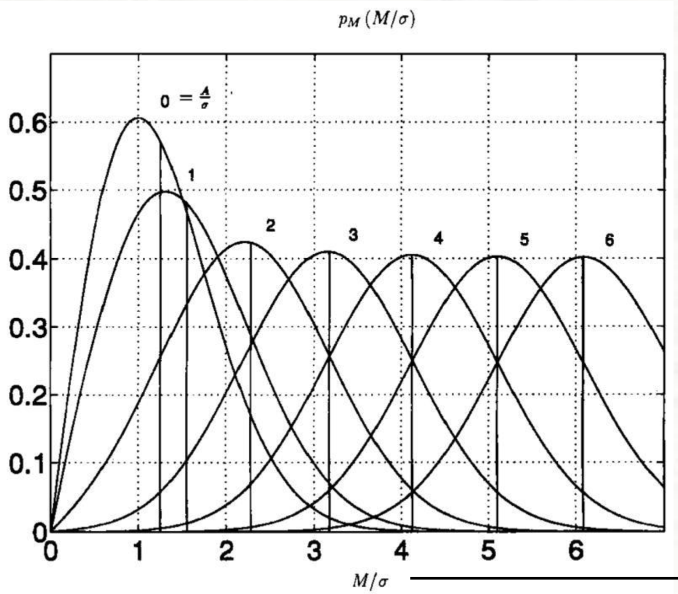
- TCO : modalité permettant la génération d’images a haute résolution de la rétine

- Images bruyants qui nécessite des traitements pour les rendre utiles

- Approche commune : moyennage de plusieurs images
  - Valide pour des signaux qui ont du bruit blanc gaussien additif (BBGA)

Usage d'un estimateur MAP dans la TCO

- **Problème :**
  - Les signaux TCO sont complexes
  - Parties réelles et imaginaires: BBGA
  - On peut seulement mesurer la magnitude qui aura une distribution Ricienne :



Rapport signal/bruit (RSB)

Gudbjartsson, H, and S Patz. "The Rician distribution of noisy MRI data." *Magnetic resonance in medicine* vol. 34,6 (1995): 910-4. doi:10.1002/mrm.1910340618

RSB élevé : distribution ~ Gaussienne
RSB bas : distribution asymétrique

Conséquence: régions avec un RSB faible auront un biais positif

Usage d’un estimateur MAP dans la TCO

Vraisemblance : $$p(a_n|\nu,\sigma^2) = \frac{a_n}{\sigma^2}\exp\left\{\frac{-(a_n^2+\nu^2)}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{a_n\nu}{\sigma^2}\right)$$

Probabilité d’une mesure d’amplitude « a_n », donné une vrai valeur « ν »

Posteriori : $f(a_n|\nu,\sigma^2)p(\nu)$ → On veut trouver le maximum de cette expression, cela sera l’estimé de la vrai valeur de la magnitude du pixel mesuré

priori