MTH2120
Analyse appliquée
Devoir # 0

(Ce devoir est facultatif, il n'est pas à remettre)

Exercice 1 *Soit* $z = e^{2+\pi i/2}$.

a) Exprimez z *sous la forme* $a + b\,i$ — *Rép:* $i\,e^2$

b) Déterminez le module et l'argument de z. — *Rép:* $|z| = e^2, \;\; \arg(z) = \pi/2$

Solution 1

a) Par définition,
$$e^{2+\pi i/2} = e^2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = e^2(0 + i \cdot 1) = i\,e^2.$$

b) Le module de z est
$$|z| = |ie^2| = |i|\,|e^2| = 1 \cdot e^2 = e^2.$$

Notons que z étant un nombre purement imaginaire et que sa partie imaginaire est positive, son argument est $\arg(z) = \pi/2$.

Exercice 2 *Exprimez le nombre complexe*
$$\frac{-i^{2014}(i-1)^{47}}{(1+\sqrt{3}i)^{30}}$$
sous la forme $a + bi$. — *Rép:* $-\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i$

Solution 2

Soit $z = i - 1$ et $w = 1 + \sqrt{3}\,i$. On a

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
\arg(z) &= \arctan(-1/1) = 3\pi/4 \quad \text{car } z \in \text{deuxième quadrant} \\
|w| &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\
\arg(w) &= \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi/3 \quad \text{car } w \in \text{premier quadrant.}
\end{aligned}$$

On a donc $z = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$ et, selon le théorème de De Moivre,

$$z^{47} = (\sqrt{2})^{47}(\cos(47\cdot 3\pi/4) + i\sin(47\cdot 3\pi/4)) = 2^{23}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{23}(1+i).$$

De plus, $w = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$ et

$$w^{30} = 2^{30}(\cos(30\pi/3) + i\sin(30\pi/3)) = 2^{30}(1 + i\cdot 0) = 2^{30}.$$

Enfin,

$$-i^{2014} = -(i^2)^{1007} = -(-1)^{1007} = 1.$$

On a donc

$$\frac{-i^{2014}(i-1)^{47}}{(1+\sqrt{3}i)^{30}} = \frac{(1)(-2^{23}(1+i))}{2^{30}} = -\frac{1}{128} - \frac{1}{128}i.$$

Exercice 3 *Vérifiez que* $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

Solution 3

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + y_2x_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_1x_2 + y_2x_1). \tag{1}$$

D'autre part,

$$\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(-y_1x_2 - y_2x_1) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_1x_2 + y_2x_1). \tag{2}$$

Puisque (1) et (2) sont égaux, on a bien $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

Exercice 4 *Déterminez toutes les solutions de l'équation* $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Rép :}\quad z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & z_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Solution 4

Posons $X = z^2$. L'équation devient $X^2 + X + 1 = 0$, dont les solutions sont

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Si $X = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ alors $|X| = 1$ et $\arg(X) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3 + \pi = 2\pi/3$ donc $X = e^{2\pi i/3}$.
On a alors $z^2 = e^{2\pi i/3} \Rightarrow z = e^{i(2\pi/3 + 2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$.
Ceci donne deux solutions:

$$z_1 = e^{\pi i/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_2 = e^{4\pi i/3} = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Si maintenant $X = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ alors $|X| = 1$ et $\arg(X) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3 + \pi = 4\pi/3$ donc $X = e^{4\pi i/3}$. On a alors $z^2 = e^{4\pi i/3} \Rightarrow z = e^{i(4\pi/3+2k\pi)/2}$, $k = 0, 1$.

Ceci donne deux autres solutions:

$$z_3 = e^{2\pi i/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_4 = e^{5\pi i/3} = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

En conclusion, les quatre solutions de l'équation sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \qquad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Remarquons que lorsque nous avons une racine complexe alors sa conjuguée est aussi une racine.

Exercice 5 *Trouvez toutes les solutions, notées z_k, de l'équation*

$$(z+1)^{2n+1} - 2 = 0 \qquad \text{où} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rép : $z_k = -1 + 2^{\frac{1}{2n+1}}[\cos(\frac{2k\pi}{2n+1}) + i\sin(\frac{2k\pi}{2n+1})]$ *où* $k = 0, 1, \dots 2n.$

Solution 5

Nous avons $(z+1)^{2n+1} - 2 = 0 \iff (z+1)^{2n+1} = 2$ alors

$$(z+1)^{2n+1} = 2e^{i(0+2k\pi)}$$

$$\Rightarrow z_k = -1 + 2^{\frac{1}{2n+1}} e^{i(\frac{2k\pi}{2n+1})} = -1 + 2^{\frac{1}{2n+1}}[\cos(\frac{2k\pi}{2n+1}) + i\sin(\frac{2k\pi}{2n+1})]$$

où $k = 0, 1, \dots 2n$.

Exercice 6 *Donnez le type de la courbe (droite, cercle, ellipse, hyperbole, etc.) décrite par l'équation:*

$$\Big[\frac{Re(z+\bar{z})}{2}\Big]^2 + \Big[\frac{Im(z-\bar{z})}{2i}\Big]^2 = 4.$$

Rép hyperbole: $x^2 - y^2 = 4$

Solution 6

En posant $z = x + iy$, nous avons $\overline{z} = x - iy$. Par conséquent, nous obtenons l'équation d'une hyperbole:

$$x^2 - y^2 = 4$$

Exercice 7 *Donnez les solutions de $|z-1| = |2z-1|$.*

Rép : Les solutions sont tous les $z = x + y\,i$ tels que x et y appartiennent au cercle

$$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = (\frac{1}{3})^2$$

Solution 7

Posons $z = x + yi$. Ainsi

$$\begin{aligned} |z-1| &= |x + yi - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ |2z-1| &= |2(x+y)i - 1| = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} \end{aligned}$$

Donc $|z-1| = |2z-1|$ devient

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = (2x-1)^2 + (2y)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 3y^2 = 0$$

En complétant les carrés, nous avons

$$3[x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}] + 3y^3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = (\frac{1}{3})^2 \qquad \text{(cercle)}$$

En conclusion, les solutions sont tous les $z = x + y\,i$ tels que x et y appartiennent au cercle de rayon $\frac{1}{3}$.