Théorie des files d'attente

Hamzeh Alizadeh, Ph.D.

Directeur – Recherches et valorisation des données
ARTM

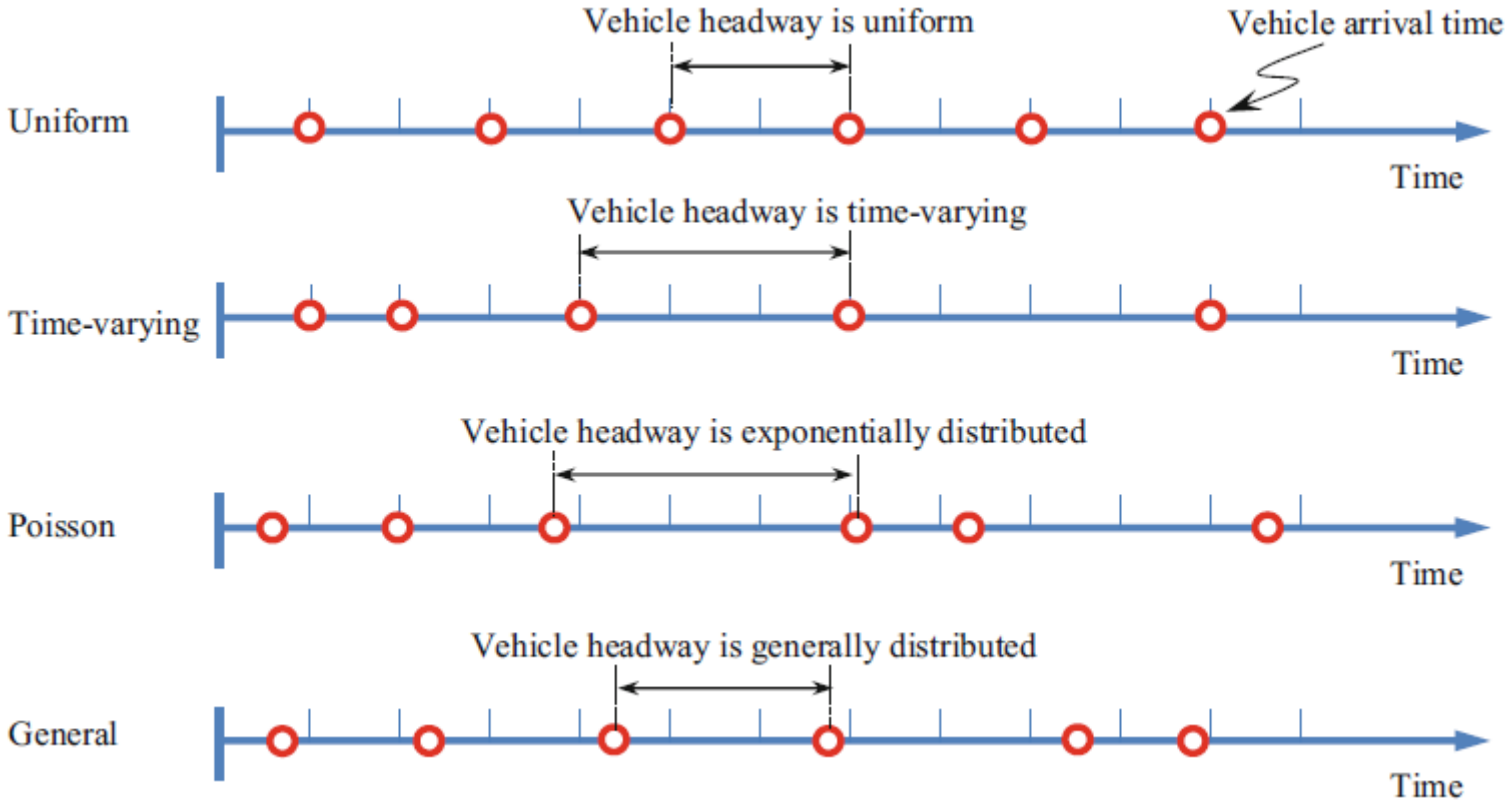
Processus d'arrivée/de départ à une intersection

- Deux grandes catégories de processus d'arrivée :
  - Arrivée déterministe :
    - ✓ Le nombre et l'heure d'arrivée des véhicules peuvent être déterminés avant que les événements n'aient lieu.
    - ✓ Si le processus d'arrivée est répété plusieurs fois, le résultat ne change pas d'une expérience à l'autre.
  - Arrivée aléatoire :
    - ✓ Le nombre et le moment de l'arrivée des véhicules ne peuvent pas être déterminés avant que les événements ne se produisent.
    - ✓ Si le processus d'arrivée est répété plusieurs fois, le résultat peut changer d'une expérience à l'autre.

Le processus d'arrivée de **Poisson** est particulièrement intéressant, car il implique une distribution **Exponentielle** des temps inter-véhiculaires, une caractéristique qui donne lieu à un ensemble de méthodes statistiquement matures pour déterminer le retard.

Processus d'arrivée/de départ à une intersection

- Nous nous concentrons sur quatre processus d'arrivée spécifiques :
  - Uniforme,
  - Variable dans le temps,
  - Poisson,
  - et les arrivées générales.



Processus d'arrivée uniforme

- Suppose que le taux d'arrivée λ est constant.
- Les temps inter-véhiculaires individuels h_i sont uniformes et prennent la même valeur que le temps inter-véhiculaire moyen h :

$$\lambda = \frac{q}{3600} \frac{\text{veh}}{\text{s}}$$

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_i = \cdots = h = \frac{1}{\lambda} \frac{\text{s}}{\text{veh}}$$

Processus d'arrivée uniforme

- ***Exemple***

  Un flux de circulation avec un débit de 900 veh/h arrive à une approche d'intersection à partir de 9h00 am. Si un processus d'arrivée uniforme est supposé, déterminer les heures d'arrivée des premiers véhicules et calculer le temps écoulé entre deux véhicules consécutifs. Combien de véhicules seraient arrivés jusqu'à 9h15 ?

Processus d'arrivée uniforme

- ***Exemple***

  Un flux de circulation avec un débit de 900 veh/h arrive à une approche d'intersection à partir de 9h00 am. Si un processus d'arrivée uniforme est supposé, déterminer les heures d'arrivée des premiers véhicules et calculer le temps écoulé entre deux véhicules consécutifs. Combien de véhicules seraient arrivés jusqu'à 9h15 ?

$$q = 900 \text{ veh/h} \rightarrow \lambda = 1/4 \text{ veh/s} \rightarrow h = 4 \text{ s/veh}$$

Vehicle ID, i	Arrival time, t_i	Headway, h_i (s)
1	9:00:00	Uniform
2	9:00:04	4
3	9:00:08	4
4	9:00:12	4
5	9:00:16	4
...	...	...

$$900 \frac{\text{veh}}{\text{h}} \times 15 \text{ min} = 900 \frac{\text{veh}}{\text{h}} \times \frac{1}{4} \text{ h} = 225 \text{ veh}$$

Processus d'arrivée variable dans le temps

- Suppose que le taux d'arrivée λ change avec le temps t.
- Les temps inter-véhiculaires individuels h_i changent également avec le temps.
- ***Exemple***

  Un flux de trafic arrive à une approche d'intersection à partir de 9h00. Si un processus d'arrivée variable dans le temps est supposé et que le taux d'arrivée dans l'heure suivante est donné comme suit :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{t}{7200} & \text{when } 0 \leq t < 1800\,\text{s} \\ \frac{5}{8} - \frac{t}{7200} & \text{when } 1800 \leq t < 3600\,\text{s} \end{cases}$$

  Déterminez les temps d'arrivée des cinq premiers véhicules et calculez le temps écoulé entre deux véhicules consécutifs. Combien de véhicules seront arrivés jusqu'à 9h15 ?

Processus d'arrivée variable dans le temps

➢ ***Solution***

- Nous n'avons pas de moyen simple et rapide de trouver les heures d'arrivée et les progrès pour un processus d'arrivée variant dans le temps.
- Nous devons déterminer le nombre cumulé de véhicules arrivant à cette approche en fonction du temps.
- Ensuite, recherchez la fonction et déterminez le moment où le 1er, le 2e, . . . véhicule arrive, respectivement.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{t}{7200} & \text{when } 0 \le t < 1800\,\text{s} \\ \frac{5}{8} - \frac{t}{7200} & \text{when } 1800 \le t < 3600\,\text{s} \end{cases} \rightarrow A(\xi) = \begin{cases} \int_0^t \left(\frac{1}{8} + \frac{\xi}{7200}\right) d\xi & \text{when } 0 \le t < 1800\,\text{s} \\ \int_{1800}^t \left(\frac{5}{8} - \frac{\xi}{7200}\right) d\xi & \text{when } 1800 \le t < 3600\,\text{s} \end{cases} \rightarrow A(t) = \begin{cases} \frac{t}{8} + \frac{t^2}{14,400} & \text{when } 0 \le t < 1800\,\text{s} \\ \frac{5t}{8} - \frac{t^2}{14,400} - 900 & \text{when } 1800 \le t < 3600\,\text{s} \end{cases}$$

- 450 véhicules arrivent dans les 30 premières minutes (1800s) – $A(t) = 225 + 225 = 450$
- 450 véhicules arrivent dans les deuxièmes 30 minutes (1800 to 3600s) – $A(t) = 2250 - 900 - 900 = 450$
- 900 véhicules arrivant dans l'heure

$$A(t) = 1 = \frac{t}{8} + \frac{t^2}{14400} \rightarrow t = 7.96\ s$$

$$A(t) = 2 = \frac{t}{8} + \frac{t^2}{14400} \rightarrow t = 15.86\ s$$

$$\rightarrow h = 7.9\ s$$

Vehicle ID, i	Arrival time, t_i	Headway, h_i (s)
1	9:00:00.00	Time-varying
2	9:00:07.96	7.96
3	9:00:15.86	7.90
4	9:00:23.69	7.76
5	9:00:31.45	6.42
...	...	...

Processus d'arrivée de Poisson

- Suppose que la probabilité que des véhicules arrivent pendant un intervalle de temps x suit la distribution de Poisson

$$P(n) = \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!}$$

- Où:
  - $P(n)$ est la probabilité d'avoir n véhicules arrivant pendant l'intervalle de temps x,
  - λ est le taux moyen de véhicules arrivant à cette approche par unité de temps, et

$$\lambda = \frac{q}{60}\frac{\text{veh}}{\text{min}} \quad \text{or} \quad \frac{q}{3600}\frac{\text{veh}}{\text{s}}$$

  - e est la base du logarithme naturel, $e \approx 2.178$.

- Une propriété spéciale de la distribution de Poisson est que sa moyenne et sa variance sont égales à λt.

Processus d'arrivée de Poisson

- ***Exemple***
  Un flux de circulation avec un débit 900 veh/h arrive à une approche d'intersection à partir de 9h00 am. Si le processus d'arrivée de Poisson est supposé et que l'intervalle d'observation est de 20s, trouvez la probabilité d'avoir 0, 1, 2, . . ., 10 et plus de 10 véhicules dans un intervalle d'observation.

Processus d'arrivée de Poisson

- ***Exemple***

  Un flux de circulation avec un débit 900 veh/h arrive à une approche d'intersection à partir de 9h00 am. Si le processus d'arrivée de Poisson est supposé et que l'intervalle d'observation est de 20s, trouvez la probabilité d'avoir 0, 1, 2, . . ., 10 et plus de 10 véhicules dans un intervalle d'observation.

Taux d'arrivée ➜ $\lambda = \frac{900\,\frac{\text{veh}}{\text{h}}}{3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}}} = \frac{1}{4}\,\frac{\text{veh}}{\text{s}}$

➜ $\lambda x = \frac{1}{4} \times 20 = 5\ \text{veh}$ ➜

Number of vehicles observed, n	Probability of having n vehicles, $P(n)$
0	$P(0) = \frac{(5)^0 e^{-5}}{0!} \approx 0.007$
1	$P(1) = \frac{(5)^1 e^{-5}}{1!} \approx 0.034$
2	$P(2) = \frac{(5)^2 e^{-5}}{2!} \approx 0.084$
3	$P(3) = \frac{(5)^3 e^{-5}}{3!} \approx 0.140$
4	$P(4) = \frac{(5)^4 e^{-5}}{4!} \approx 0.175$
5	$P(5) = \frac{(5)^5 e^{-5}}{5!} \approx 0.175$
6	$P(6) = \frac{(5)^6 e^{-5}}{6!} \approx 0.146$
7	$P(7) = \frac{(5)^7 e^{-5}}{7!} \approx 0.104$
8	$P(8) = \frac{(5)^8 e^{-5}}{8!} \approx 0.065$
9	$P(9) = \frac{(5)^9 e^{-5}}{9!} \approx 0.036$
10	$P(10) = \frac{(5)^{10} e^{-5}}{10!} \approx 0.018$
>10	$P(10^+) = 1 - \sum_{n=0}^{5} \frac{(5)^n e^{-5}}{n!} \approx 0.014$

Processus d'arrivée de Poisson

- Le processus d'arrivée de Poisson est d'un intérêt particulier pour l'analyse des files d'attente, car il implique une distribution intéressante des temps inter-véhiculaires.
- Un temps inter-véhiculaire $h > t$ signifie qu'aucun véhicule n'arrive pendant cet intervalle de temps, c'est-à-dire $n = 0$.
- Alors :

$$P(0) = P(h > x) \rightarrow P(0) = \frac{(\lambda x)^0 e^{-\lambda x}}{0!} = e^{-\lambda x}$$

$$P(h > x) = 1 - P(h \leq x) \rightarrow P(h \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Notez que l'équation ci-dessus est la fonction de distribution cumulative de la distribution exponentielle dont la fonction de densité de probabilité est :

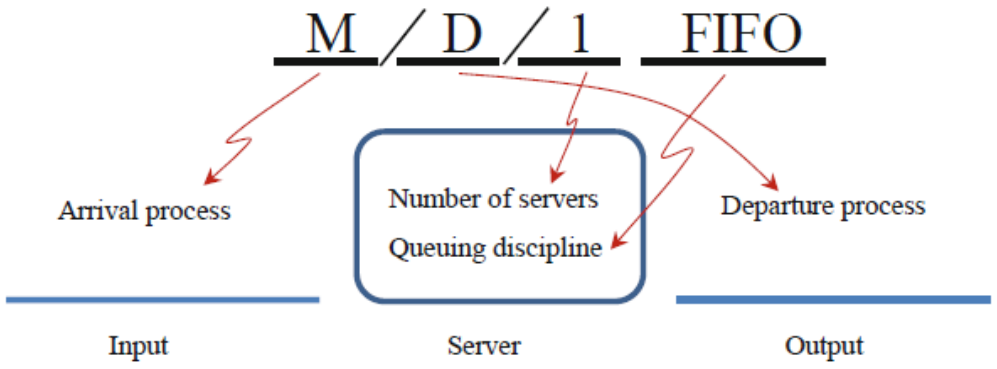
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- Une propriété spéciale de la distribution exponentielle est que sa moyenne est $1/\lambda$ et sa variance est $1/\lambda^2$.

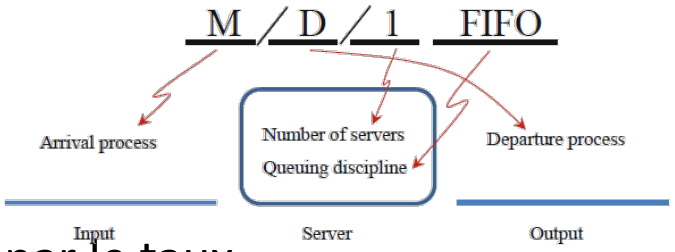
Le processus d'arrivée de Poisson équivaut à une ***distribution exponentielle*** des temps inter-véhiculaires avec un taux d'arrivée $\lambda > 0$.

Bases de la théorie des files d'attente

- Un système de file d'attente se compose de trois composants : une entrée, un serveur et une sortie.
  - L'entrée représente les clients (par exemple, les véhicules) arrivant au système.
  - Les clients reçoivent un service sur le serveur, ce qui prend un certain temps.
  - À la fin du service, les clients quittent le système en sortie.
- Par conséquent, un système de file d'attente peut être résumé par la notation de Kendall comme un code à quatre sections



Bases de la théorie des files d'attente

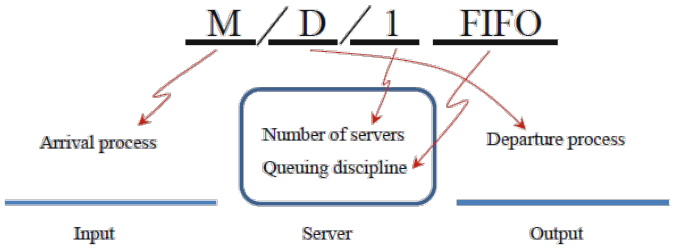


- La première section indique le processus d'arrivée des clients qui est quantifié par le taux d'arrivée λ ou le temps entre les arrivées h, et la deuxième section spécifie le processus de départ avec le taux de μ.

Code	Name	Description
D	Deterministic	Deterministic arrival with actual arrival events predictable in advance. For example, uniform arrival or time-varying arrival.
M	Markovian	Random arrival that follows Poisson distribution or equivalently inter-arrival times (headways) follow exponential distribution
G	General	Random arrival that follows a distribution other than Poisson can be a known type of distribution or an empirical one.

- L'arrivée uniforme a une constante λ ou une constante h, où $h = 1/\lambda$.
- L'arrivée variable dans le temps a $\lambda = \lambda(t)$ ou $h = h(t)$.
- L'arrivée de Poisson a le nombre de véhicules arrivant pendant l'intervalle de temps x, n, suivant la distribution $Poisson$ ou les temps inter-arrivées, h, suivant la distribution $exponential$.
- L'arrivée générale a le nombre de véhicules arrivant pendant l'intervalle de temps x, n, ou les temps entre les arrivées, h, suivant une distribution générale avec la moyenne m et la variance σ^2.

Bases de la théorie des files d'attente



- La troisième section spécifie le nombre de serveurs ou de canaux disponibles pour les clients.
- La dernière section traite la discipline de file d'attente du système
  - Premier entré, premier sorti (FIFO) : les clients sont servis dans l'ordre où ils arrivent au système.
  - Dernier entré, premier sorti (LIFO) : les clients sont servis dans l'ordre inverse de ce qu'ils arrivent au système.
- Pour toutes les files d'attente en lien avec la circulation routière, la discipline FIFO est la plus appropriée.
- Les questions typiques auxquelles il faut répondre dans un système de file d'attente sont :
  - Quel est le temps de dissipation de la file d'attente ?
  - Quelle est la longueur maximale de file d'attente ?
  - Quel est le retard total subi par tous les clients ?
  - Quel est le retard moyen par client ?
  - Quel est le temps d'attente le plus long d'un client ?

Système de file d'attente : D/D/1

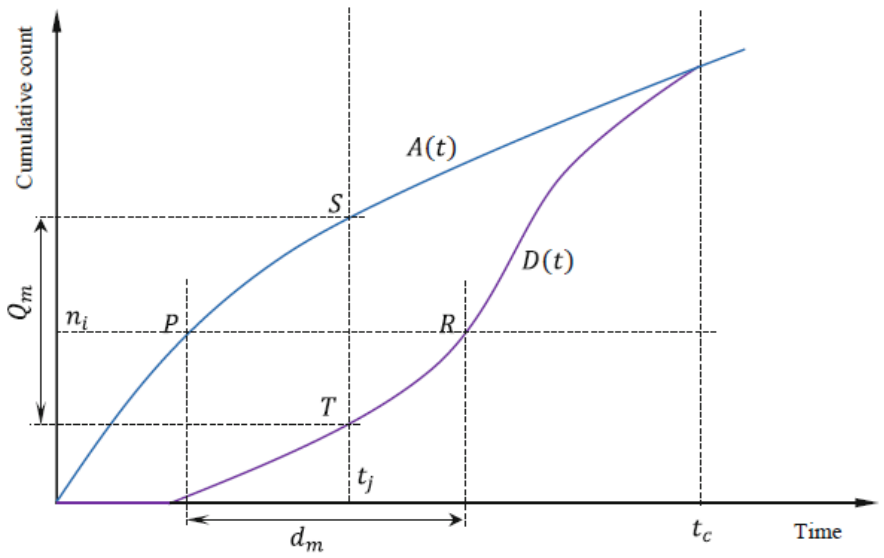
- Si un système de file d'attente a une arrivée déterministe et un départ déterministe avec 1 serveur fonctionnant selon le principe $FIFO$, la meilleure façon de répondre aux questions précédentes est une approche graphique qui construit une courbe d'arrivée cumulée $A(t)$ et une courbe de départ cumulée $D(t)$ pour aider avec l'analyse.
- Supposons que le taux d'arrivée déterministe est $\lambda(t)$ et que le taux de départ déterministe est $\mu(t)$.
- La courbe d'arrivée cumulée $A(t)$ est:

$$A(t) = \int_0^t \lambda(\xi) d\xi$$

- De même, la courbe de départ cumulée $D(t)$ est:

$$D(t) = \int_0^t \mu(\xi) d\xi$$

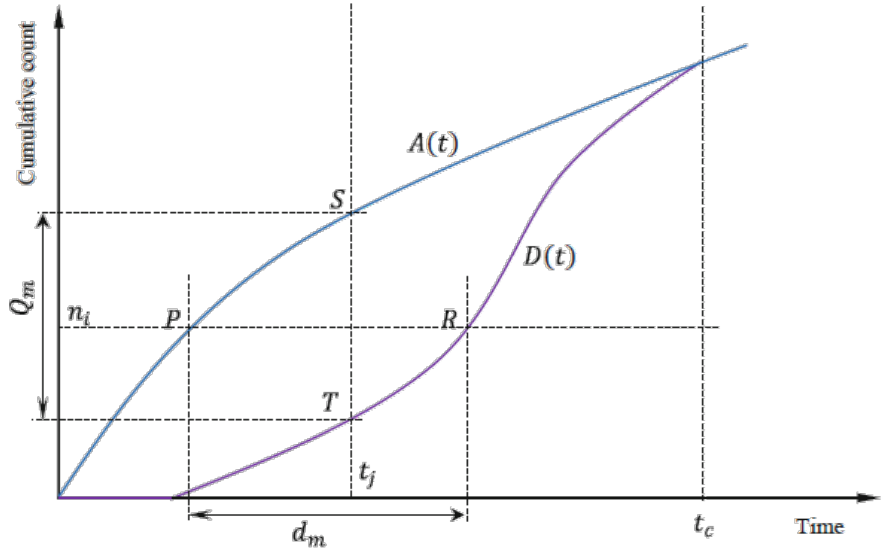
- Une représentation graphique du système peut être construite



Système de file d'attente: D/D/1

- La courbe A représente le nombre cumulé de clients arrivant au système en fonction du temps.
- La courbe D avec un départ différé, représente le nombre cumulé de clients partant du système en fonction du temps.
- La distance horizontale entre la courbe A et la courbe D (PR) représente le retard subi par le véhicule correspondant.
- La distance verticale entre la courbe A et la courbe D (ST) représente la longueur de la file d'attente observée au moment correspondant (t_j).

- La zone délimitée par la courbe A, la courbe D et les deux axes représente le retard total subi par tous les véhicules.
- La courbe D doit toujours être inférieure à la courbe A, ou au plus, rattraper la courbe A.
- Cela signifie que la file d'attente vient de se dissiper (au temps t_c).



Exemple de système de file d'attente : D/D/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à la porte d'un parc avec un taux constant de 10 véhicules par minute à partir de $8h00\ am$. Le parc ouvre à $8h30\ am$ et il faut 4 s à chaque conducteur pour s'enregistrer et franchir la porte. Si un système de file d'attente $D/D/1$ est supposé, trouvez le temps de dégagement de la file d'attente, la longueur de la file d'attente la plus longue, le retard total, le retard moyen et le temps d'attente le plus long.

Exemple de système de file d'attente : D/D/1

➢ ***Solution***

➜ Le taux d'arrivée est donné : $\lambda(t) = 10 \quad \text{for } t \geq 0$ t est la période de temps à partir de $8{:}00\ am$

➜ Le départ est donné : $t(t) = 4 \text{ s/veh} = 15 \text{ veh/min}$

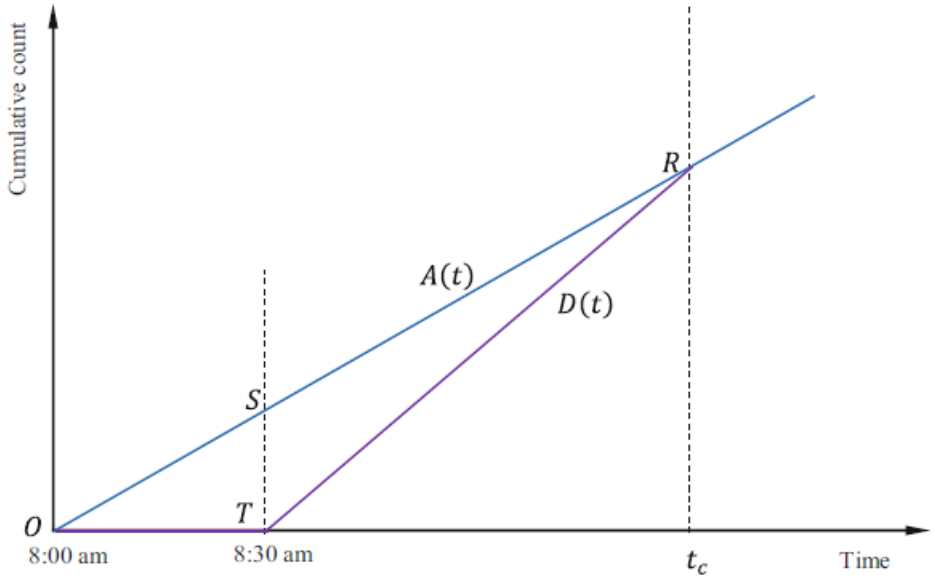
➜ Le parc ouvre 30 min après 8h00 am. Ainsi, le taux de départ est de:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < 30 \\ 15 & \text{for } t \geq 30 \end{cases}$$

➜ Le graphique est construit où les pentes de la courbe A et de la courbe D sont 10 et 15 veh/min

$$A(t) = \int_0^t \lambda(\xi)d\xi = \int_0^t 10d\xi = 10t$$

$$D(t) = \int_0^t \mu(\xi)d\xi = \begin{cases} \int_0^{30} 0d\xi = 0 & \text{for } 0 \leq t < 30 \\ \int_0^{30} 0d\xi + \int_{30}^t 15d\xi = 15(t-30) & \text{for } t \geq 30 \end{cases}$$



Exemple de système de file d'attente : D/D/1

➢ ***Solution (suite)***

➜ **<u>Temps de dissipation de la file d'attente:</u>** $10t_c = 15(t_c - 30), \quad t_c = 90$

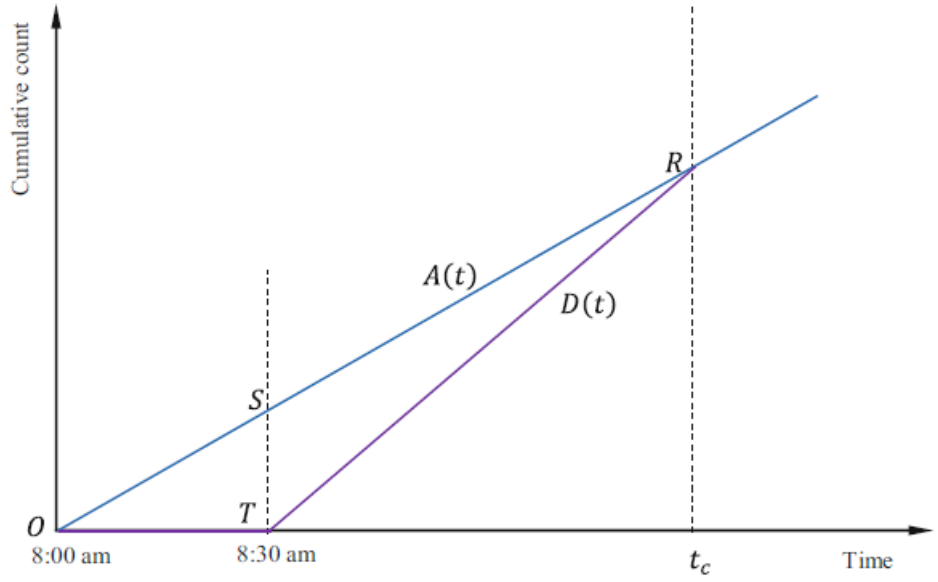
La file d'attente se dissipe 90 min après 8h00 am, soit 9h30 am.

➜ **<u>File d'attente la plus longue:</u>** $\mathrm{ST} = 10 \times 30 = 300 \text{ vehicles}$

la plus longue distance verticale entre la courbe A et la courbe D, qui s'avère être ST, est atteinte à 8:30 am.

➜ **<u>Temps d'attente le plus long:</u>**

Le temps d'attente le plus long pour tout véhicule est la distance horizontale la plus longue entre la courbe A et la courbe D, qui s'avère être OT est atteint pour le premier véhicule : OT = 30 min



Exemple de système de file d'attente : D/D/1

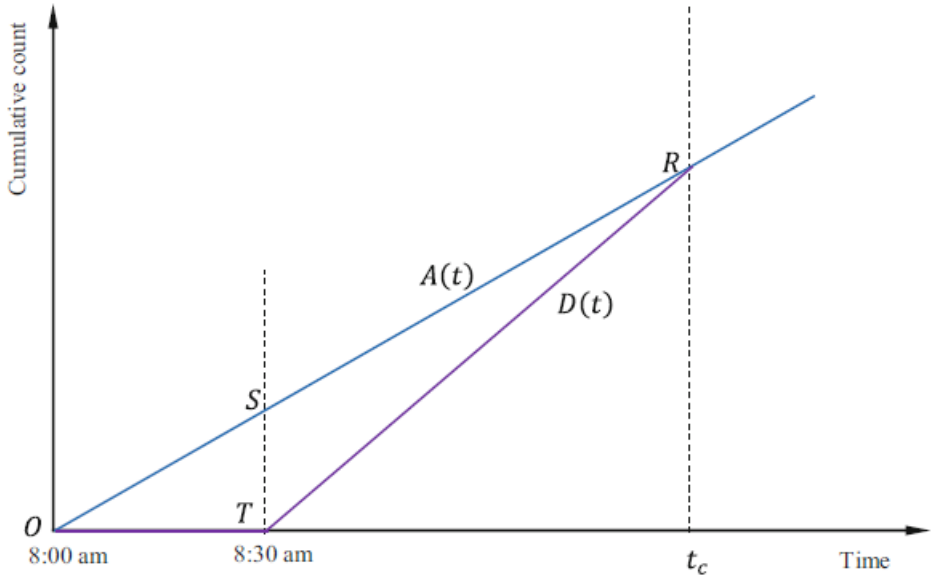
➢ ***Solution (suite)***

➜ **<u>Retard total:</u>** Zone délimitée par la courbe A et la courbe D

$$\Gamma = \int_0^t (A(\xi) - D(\xi))d\xi = \int_0^{30} (10\xi - 0)d\xi + \int_{30}^{90} [10\xi - 15(\xi - 30)]d\xi$$
$$= 4500 + 9000 = 13,500 \quad \text{veh min}$$

Le retard total peut également être déterminé comme l'aire du triangle OTR :

$$\Gamma = S_{\text{OTR}} = \frac{1}{2} \times 30 \times (10 \times 90) = 13,500 \quad \text{veh min}$$



➜ **<u>Délai moyen:</u>**

Il y aura $N = 10 \times 90 = 900$ véhicules arrivés à t_c. Par conséquent, le retard moyen par véhicule, W, est:

$$d = \frac{\Gamma}{N} = \frac{13,500}{900} = 15 \text{ min}$$

Exemple de système de file d'attente : D/D/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à l'entrée d'un parc avec un taux de 10 véhicules par minute à partir de $8h00$. Le parc ouvre à $8h30$ et commence à admettre des visiteurs. Cependant, le responsable du guichet a besoin d'un certain temps pour s'échauffer, après quoi il est capable d'accélérer la gestion de l'admission selon un taux de $0.2x$, où x est le temps écoulé depuis le début de l'admission. Encore une fois, un système de file d'attente $D/D/1$ est supposé. Trouver le temps de dissipation de la file d'attente, la file d'attente la plus longue, le retard total, le retard moyen et le temps d'attente le plus long.

Exemple de système de file d'attente : D/D/1

➢ ***Solution***

➜ Le taux d'arrivée est donné : $\lambda(t) = 10 \quad \text{for } t \geq 0$ t est la période de temps à partir de 8: 00 am

➜ Le taux de départ est donné en fonction du temps :

Le parc ouvre 30 min après 8h00 am.

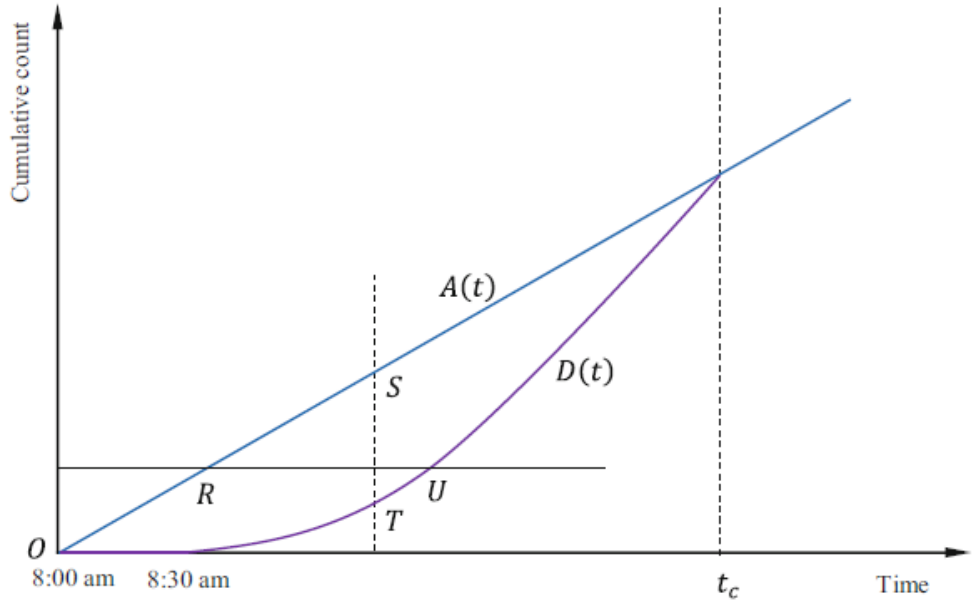
$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t < 30 \\ 0.2(t-30) & \text{for } t \geq 30 \end{cases}$$

➜ La courbe d'arrivée cumulée (A) et la courbe de départ cumulée (D) sont déterminées comme suit :

$$A(t) = \int_0^t \lambda(\xi)d\xi = \int_0^t 10d\xi = 10t$$

$$D(t) = \int_0^t \mu(\xi)d\xi$$

$$= \begin{cases} \int_0^{30} 0d\xi = 0 & \text{for } 0 \leq t < 30 \\ \int_0^{30} 0d\xi + \int_{30}^t 0.2(\xi - 30)d\xi = 0.1t^2 - 6t + 90 & \text{for } t \geq 30 \end{cases}$$



Exemple de système de file d'attente : D/D/1

➢ ***Solution (suite)***

➜ **<u>Temps de dissipation de la file d'attente:</u>** $10t_c = 0.1{t_c}^2 - 6t_c + 90, \quad t_c = 154.16$

La file d'attente se dissipe 154.16 min après 8h00 am (environ 10h34 am)

➜ **<u>File d'attente la plus longue:</u>**

La plus longue distance verticale entre la courbe A et la courbe D.

$$L(t) = \begin{cases} 10t & \text{for} 0 \le t < 30 \\ 10t - (0.1t^2 - 6t + 90) & \text{for} t \ge 30 \end{cases}$$

Première branche : la valeur maximale est atteinte à $t = 30$ min

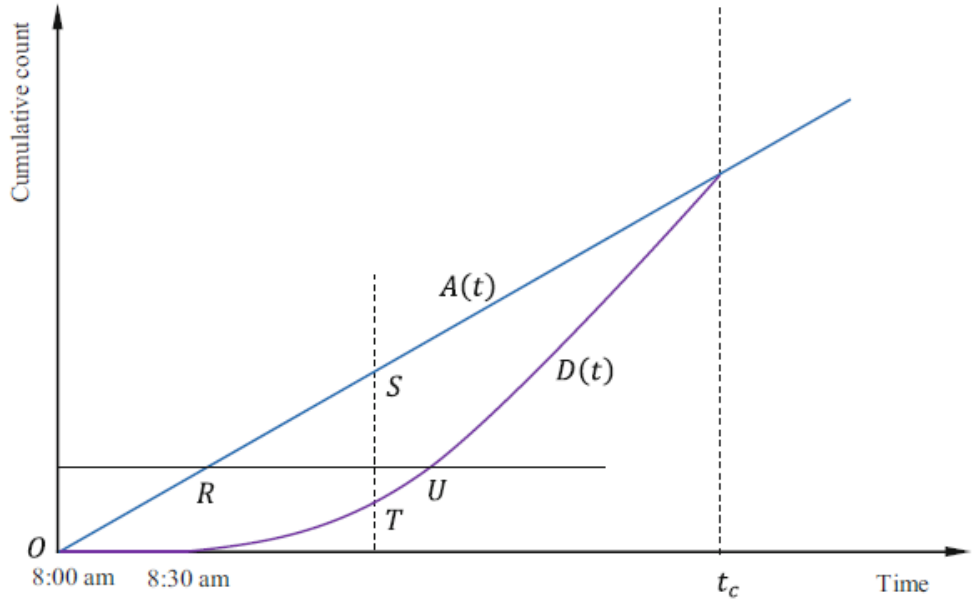
$$L(t)|_{t=30} = 300$$

Deuxième branche : la valeur maximale est atteinte à $t = 80$ min

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(-0.1t^2 + 16t - 90)}{dt} = -0.2t + 16 = 0, \quad t = 80$$

$$L(t)|_{t=80} = 730$$

Par conséquent, la file d'attente atteint sa longueur maximale à t = 80 min, et la longueur maximale de la file d'attente est de 730 véhicules.



Exemple de système de file d'attente : D/D/1

- ***Solution (suite)***

➜ **<u>Temps d'attente le plus long:</u>** *Le temps d'attente est la distance horizontale entre la courbe A et la courbe D qui peut être trouvée en inversant les deux fonctions A(t) et D(t)*

$$W = t_D - t_A = \left(30 + \sqrt{10D}\right) - \frac{A}{10}$$

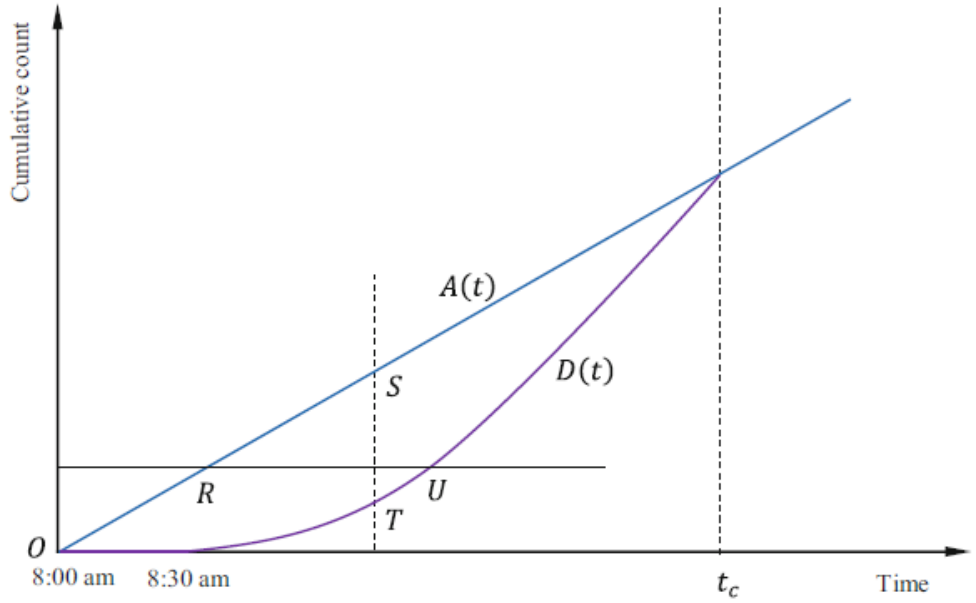
Puisqu'il s'agit du même véhicule : A = D = N :

$$W(N) = \left(30 + \sqrt{10N}\right) - \frac{N}{10}$$

$$\frac{dW}{dN} = \frac{10}{2\sqrt{10N}} - \frac{1}{10} = 0, \quad N = 250$$

$$W(250) = \left(30 + \sqrt{10 \times 250}\right) - \frac{250}{10} = 55$$

Le temps d'attente le plus long est de 55 min, ce qui est subi par le véhicule numéro 250



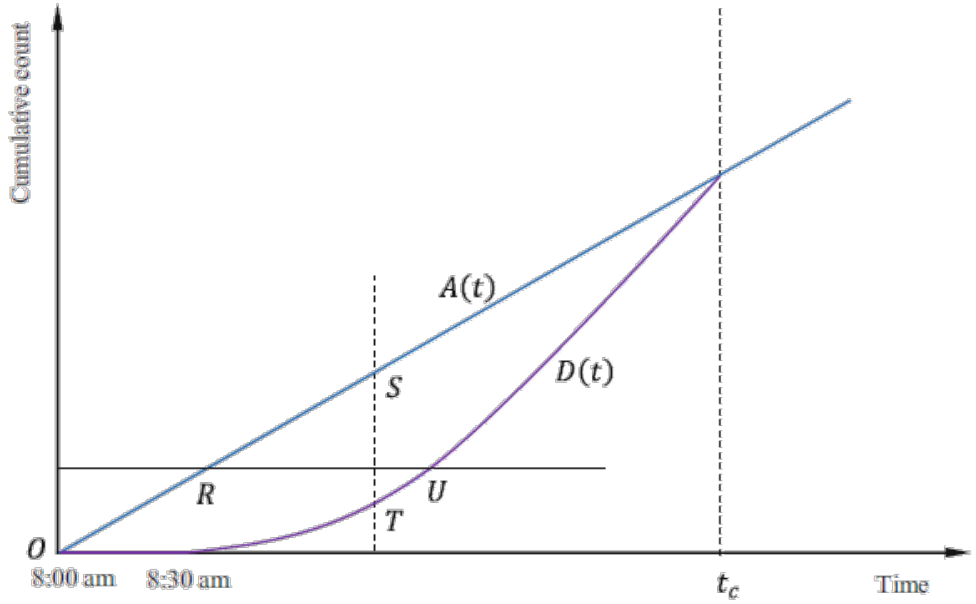
Exemple de système de file d'attente : D/D/1

➢ ***Solution (suite)***

➜ **<u>Retard total:</u>** Zone délimitée par la courbe A et la courbe D

$$\Gamma = \int_0^t (A(\xi) - D(\xi))d\xi = \int_0^{30} (10\xi - 0)d\xi +$$

$$\int_0^{154.16} \left[10\xi - \left(0.1\xi^2 - 6\xi + 90\right)\right]d\xi \approx 4500 + 50,526 = 55,026 \text{ veh min}$$



➜ **<u>Délai moyen:</u>**

Il y aura $N = 10 \times 154.16 = 1541.6$ véhicules arrivés à t_c. Par conséquent, le retard moyen par véhicule, W, est:

$$W = \frac{\Gamma}{N} = \frac{55,026}{1541.6} \approx 35.7 \text{ min}$$

Système de file d'attente : M/D/1

- Si un système de file d'attente a un taux de départ déterministe μ, mais que son taux d'arrivée λ suit une distribution de Poisson ou que les temps entre arrivées h suit une distribution exponentielle, un système de file d'attente $M/D/1$ est obtenu.
- L'approche graphique ne s'applique qu'aux systèmes déterministes.
- Lorsqu'il s'agit d'arrivée aléatoire, une approche statistique doit être recherchée.
- Nous définissons l'intensité du trafic ρ comme le rapport du taux d'arrivée au taux de départ :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  - μ est le taux de départ moyen
  - λ est le taux d'arrivée moyen

- Pour qu'un système de file d'attente soit stable, l'intensité du trafic doit être inférieure à 1

$$0 < \rho < 1$$

Système de file d'attente : M/D/1

- *Nombre moyen de clients dans le système L*

$$L = \frac{(2-\rho)\rho}{2(1-\rho)} \qquad L = L_Q + \rho$$

- *Longueur moyenne de la file d'attente L_Q*

$$L_Q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

- *Retard moyen ou temps passé dans le système W*

$$W = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)} \qquad W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

- *Temps d'attente moyen dans la file d'attente W_Q*

$$W_Q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

Exemple de système de file d'attente : M/D/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à un poste de péage à un taux moyen de 2 véhicules par minute, et il faut 20 s aux conducteurs pour payer le péage. Supposons que le taux d'arrivée suit la distribution de Poisson et que le processus de départ est déterministe. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente, le retard moyen, et le temps d'attente moyen dans la file d'attente.

Exemple de système de file d'attente : M/D/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à un poste de péage à un taux moyen de 2 véhicules par minute, et il faut 20 s aux conducteurs pour payer le péage. Supposons que le taux d'arrivée suit la distribution de Poisson et que le processus de départ est déterministe. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente, le retard moyen, et le temps d'attente moyen dans la file d'attente.
- ***Solution***

M/D/1 : Système de file d'attente

Taux d'arrivée moyen

$$\lambda = 2 \text{ veh/min}$$

Taux de service constant

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ veh/min}$$

Intensité du trafic

$$\rho = \frac{2}{3}$$

Longueur moyenne de la file d'attente

$$L_Q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{(2/3)^2}{2(1-(2/3))} = \frac{2}{3} \text{ vehicle}$$

Retard moyen

$$W = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{2-(2/3)}{2(3)(1-(2/3))} = \frac{2}{3} \text{ min}$$

Temps d'attente moyen dans la file d'attente

$$W_Q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{(2/3)}{2(3)(1-(2/3))} = \frac{1}{3} \text{ min}$$

Notez que, si le système était $D/D/1$, il n'y aurait eu aucun retard puisque le taux de service est plus rapide que le taux d'arrivée.

Système de file d'attente: M/M/1

- Un système de file d'attente avec un taux d'arrivée suivant la distribution de Poisson (ou un temps inter-arrivées suivant une distribution exponentielle) et un taux de départ suivant la distribution de Poisson (ou un temps inter-départs suivant la distribution exponentielle)

- *Nombre moyen de clients dans le système L*

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad L = L_Q + \rho$$

- *Longueur moyenne de la file d'attente L_Q*

$$L_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- *Retard moyen ou temps passé dans le système W*

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

- *Temps d'attente moyen dans la file d'attente W_Q*

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Exemple de système de file d'attente: M/M/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à un poste de péage à un taux moyen de 2 véhicules par minute, et il faut en moyenne 20 s aux conducteurs pour payer le péage. Supposons que le taux d'arrivée suit la distribution de Poisson et que le temps de service est distribué de manière exponentielle. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente, le retard moyen, et le temps d'attente moyen dans la file d'attente.

Exemple de système de file d'attente: M/M/1

- ***Exemple***
  Les véhicules arrivent à un poste de péage à un taux moyen de 2 véhicules par minute, et il faut en moyenne 20 s aux conducteurs pour payer le péage. Supposons que le taux d'arrivée suit la distribution de Poisson et que le temps de service est distribué de manière exponentielle. Déterminer la longueur moyenne de la file d'attente, le retard moyen, et le temps d'attente moyen dans la file d'attente.
- ***Solution***

M/M/1 : Système de file d'attente

Taux d'arrivée moyen

$$\lambda = 2 \text{ veh/min}$$

Taux de départ moyen

$$\mu = \frac{60}{20} = 3 \text{ veh/min}$$

Intensité du trafic

$$\rho = \frac{2}{3}$$

Longueur moyenne de la file d'attente

$$L_Q = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{(2/3)^2}{(1-(2/3))} = \frac{4}{3} \text{ vehicle}$$

Retard moyen

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{(3)(1-(2/3))} = 1 \text{ min}$$

Temps d'attente moyen dans la file d'attente

$$W_Q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{(2/3)}{(3)(1-(2/3))} = \frac{2}{3} \text{ min}$$

Il est clair qu'en passant de D/D/1 à M/D/1 à M/M/1, l'aléatoire du système augmente, ainsi que les files d'attente et les retards.

Système de file d'attente: M/M/N

- Une formulation plus générale de la file d'attente $M/M/1$ est la file d'attente $M/M/N$, où N est le nombre total de canaux de départ.
- La file d'attente $M/M/N$ est une hypothèse raisonnable pour les postes de péage sur les autoroutes ou sur les ponts à péage, où il y a souvent plus d'un canal de départ disponible.
- Un stationnement est un autre exemple, N étant le nombre de places de stationnement dans le parking et le taux de départ, μ avec les durées de stationnement distribuées de manière exponentielle.
- Les files d'attente $M/M/N$ sont également fréquemment rencontrées dans les applications non liées au transport telles que les lignes de caisse dans les magasins de détail, les contrôles de sécurité dans les aéroports, etc.
- Contrairement aux équations pour $M/D/1$ et $M/M/1$, qui exigent que l'intensité du trafic, ρ, soit inférieure à 1, les équations suivantes permettent à ρ d'être supérieur à 1 mais ne s'appliquent que lorsque ρ/N (qui est appelé facteur d'utilisation) est inférieur à 1.

Système de file d'attente: M/M/N

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n_c=0}^{N-1} \frac{\rho^{n_c}}{n_c!} + \frac{\rho^N}{N!(1-\rho/N)}}$$

$$P_n = \frac{\rho^n P_0}{n!} \qquad \text{for } n \le N$$

$$P_n = \frac{\rho^n P_0}{N^{n-N} N!} \qquad \text{for } n \ge N$$

$$P_{n>N} = \frac{P_0 \, \rho^{N+1}}{N! N (1-\rho/N)}$$

where

P_0 = probability of having no vehicles in the system,

P_n = probability of having n vehicles in the system,

$P_{n>N}$ = probability of waiting in a queue (the probability that the number of vehicles in the system is greater than the number of departure channels),

n = number of vehicles in the system,

N = number of departure channels,

n_c = departure channel number, and

ρ = traffic intensity (λ/μ).

Système de file d'attente: M/M/N

$$\overline{Q} = \frac{P_0 \, \rho^{N+1}}{N!N} \left[\frac{1}{(1-\rho/N)^2} \right]$$

$$\overline{w} = \frac{\rho + \overline{Q}}{\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$\overline{t} = \frac{\rho + \overline{Q}}{\lambda}$$

where

$\overline{Q}$ = average length of queue (in vehicles),

$\overline{w}$ = average waiting time in the queue, in unit time per vehicle,

$\overline{t}$ = average time spent in the system, in unit time per vehicle, and

Other terms are as defined previously.

Exemple de système de file d'attente: M/M/N

- ***Exemple***
  A l'entrée d'un pont à péage, quatre cabines de péage sont ouvertes. Les véhicules arrivent au pont à un taux moyen de 1200 veh/h, et aux guichets, les conducteurs mettent en moyenne 10 secondes pour payer leurs péages. Les temps inter-véhiculaires à l'arrivée et au départ peuvent être supposés être distribués de manière exponentielle. Comment la longueur moyenne de la file d'attente, le temps passé dans le système et la probabilité d'attente dans une file d'attente changeraient-ils si un cinquième poste de péage était ouvert ?

Exemple de système de file d'attente: M/M/N

- ***Solution***

M/M/N : système de file d'attente

Nous calculons d'abord le cas à quatre cabines

$\mu = 6\ veh/\min$

$\lambda = 20\ veh/\min$

$\rho = 3.333$

$\rho/N = 0.833$

La probabilité de n'avoir aucun véhicule dans le système avec quatre cabines ouvertes

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3.333}{1!} + \frac{3.333^2}{2!} + \frac{3.333^3}{3!} + \frac{3.333^4}{4!(0.1667)}}$$

$$= 0.0213$$

La longueur moyenne de la file d'attente est

$$\overline{Q} = \frac{0.0213(3.333)^5}{4!4}\left[\frac{1}{(0.1667)^2}\right]$$

$$= 3.287 \text{ veh}$$

Le temps moyen passé dans le système est

$$\overline{t} = \frac{3.333 + 3.287}{20}$$

$$= 0.331 \text{ min/veh}$$

Et la probabilité de devoir attendre dans une file d'attente est :

$$P_{n>N} = \frac{0.0213(3.333)^5}{4!4(0.1667)}$$

$$= 0.548$$

Exemple de système de file d'attente: M/M/N

- ***Solution (suite)***

Avec une cinquième cabine ouverte, la probabilité de n'avoir aucun véhicule dans le système est

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3.333}{1!} + \frac{3.333^2}{2!} + \frac{3.333^3}{3!} + \frac{3.333^4}{4!} + \frac{3.333^5}{5!(0.3333)}}$$

$$= 0.0318$$

La longueur moyenne de la file d'attente est

$$\overline{Q} = \frac{0.0318(3.333)^6}{5!5}\left[\frac{1}{(0.3333)^2}\right]$$

$$= 0.654 \text{ veh}$$

Le temps moyen passé dans le système est

$$\overline{t} = \frac{3.333 + 0.654}{20}$$

$$= 0.199 \text{ min/veh}$$

Et la probabilité de devoir attendre dans une file d'attente est :

$$P_{n>N} = \frac{0.0318(3.333)^6}{5!5(0.3333)}$$

$$= 0.218$$

Ainsi, l'ouverture d'une cinquième cabine réduirait la longueur moyenne de la file d'attente de 2,633 veh (3,287 – 0,654), le temps moyen dans le système de 0,132 min/veh (0,331 – 0,199) et la probabilité d'attente dans une file d'attente de 0,330 (0,548 – 0,218).

Exemple de système de file d'attente: M/M/N

- ***Exemple***
  Un dépanneur dispose de quatre places de stationnement disponibles. Le propriétaire prédit que la durée des achats des clients (le temps pendant lequel le véhicule d'un client occupera une place de stationnement) est distribuée de manière exponentielle avec une moyenne de 6 minutes. Le propriétaire sait qu'aux heures les plus chargées, les arrivées de clients sont réparties de manière exponentielle avec un taux d'arrivée moyen de 20 clients par heure. Quelle est la probabilité qu'un client ne trouve pas de place de stationnement libre en arrivant dans le magasin ?

Exemple de système de file d'attente: M/M/N

- ***Solution***

Taux d'arrivée moyenne

$$\lambda = 20\ veh/\min$$

Taux moyen de départ

$$\mu = 10\ veh/\min$$

➜ $\rho = 2.0$ ➜ $\rho/N = 0.5$ *(inférieur à 1)*

La probabilité de n'avoir aucun véhicule dans le système avec quatre places de stationnement disponibles

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!(0.5)}}$$

$$= 0.1304$$

La probabilité de ne pas trouver de place de parking libre à l'arrivée est

$$P_{n>N} = \frac{0.1304(2)^5}{4!4(0.5)}$$

$$= \underline{\underline{0.087}}$$

Goulots d'étranglement sur des autoroutes

- Certains des problèmes de congestion les plus graves se produisent au niveau des goulots d'étranglement des autoroutes, qui sont définis comme une portion d'autoroute ayant une capacité inférieure aux précédentes sections de l'autoroute.
- Il existe deux types généraux de goulots d'étranglement pour la circulation routière:
  - Récurrent
    - ✓ Là où l'autoroute elle-même limite la capacité par une réduction physique du nombre de voies.
    - ✓ Le débit récurrent de la circulation qui dépasse la capacité de véhicules de l'autoroute dans la zone de goulot d'étranglement
  - Causé par des accidents
    - ✓ A la suite de pannes ou d'accidents de véhicules
    - ✓ La capacité peut évoluer dans le temps. Par exemple, un accident peut initialement arrêter complètement la circulation, mais à mesure qu'il est dégagé, une capacité partielle peut être fournie pendant un certain temps avant que la capacité totale ne soit finalement restaurée.
- L'approche la plus courante pour analyser la congestion routière aux goulots d'étranglement consiste à supposer un système de file d'attente $D/D/1$.

D/D/1 : Goulots d'étranglement

- ***Exemple***
  Un incident se produit sur une autoroute qui a une capacité en direction nord, avant l'incident, de 4000 veh/h et un débit constant de 2900 veh/h pendant la période du matin (aucun ajustement du débit de trafic ne résulte de l'incident). A 8h00 $A.M.$ un accident de la circulation ferme complètement l'autoroute. A 8h12 $A.M.$ l'autoroute est partiellement ouverte avec une capacité de 2000 veh/h. Enfin, l'accident est complètement dégagé et l'autoroute est restaurée à pleine capacité (4000 veh/h) à 8h31 $A.M.$ Supposons un système de file d'attente de $D/D/1$ pour déterminer le temps de dissipation de la file d'attente, la longueur de la file d'attente la plus longue, le retard total, le retard moyen par véhicule et l'attente la plus longue de tous les véhicules (en supposant $FIFO$).

D/D/1 : Goulots d'étranglement

➢ ***Solution***

➜ $\mu = \dfrac{4000 \text{ veh/h}}{60 \text{ min/h}} = 66.67 \text{ veh/min}$ μ : Taux de départ à pleine capacité

➜ $\mu_r = \dfrac{2000 \text{ veh/h}}{60 \text{ min/h}} = 33.33 \text{ veh/min}$ μ_r : Taux de départ à capacité réduite

➜ $\lambda = \dfrac{2900 \text{ veh/h}}{60 \text{ min/h}} = 48.33 \text{ veh/min}$

➜ Le taux d'arrivée est constant sur toute la période de temps, et le nombre total de véhicules est égal à λt, où t est le nombre de minutes après 8h00.

➜ Le nombre total de véhicules sortant :

$$\begin{cases} 0 & \text{for } t \le 12 \text{ min} \\ \mu_r (t-12) & \text{for } 12 \text{ min} < t \le 31 \text{ min} \\ 633.33 + \mu(t-31) & \text{for } t > 31 \text{ min} \end{cases}$$

[33⅓ (31 – 12)]

D/D/1 : Goulots d'étranglement

➢ ***Solution (suite)***

➜ *Ces taux d'arrivée et de départ peuvent être représentés graphiquement*

➜ *La file d'attente se dissipera au point d'intersection des courbes d'arrivée et de départ* $\lambda t = 633.33 + \mu(t-31)$ or $t = \underline{78.16 \text{ min}}$ (just after 9:18 A.M.) ↓

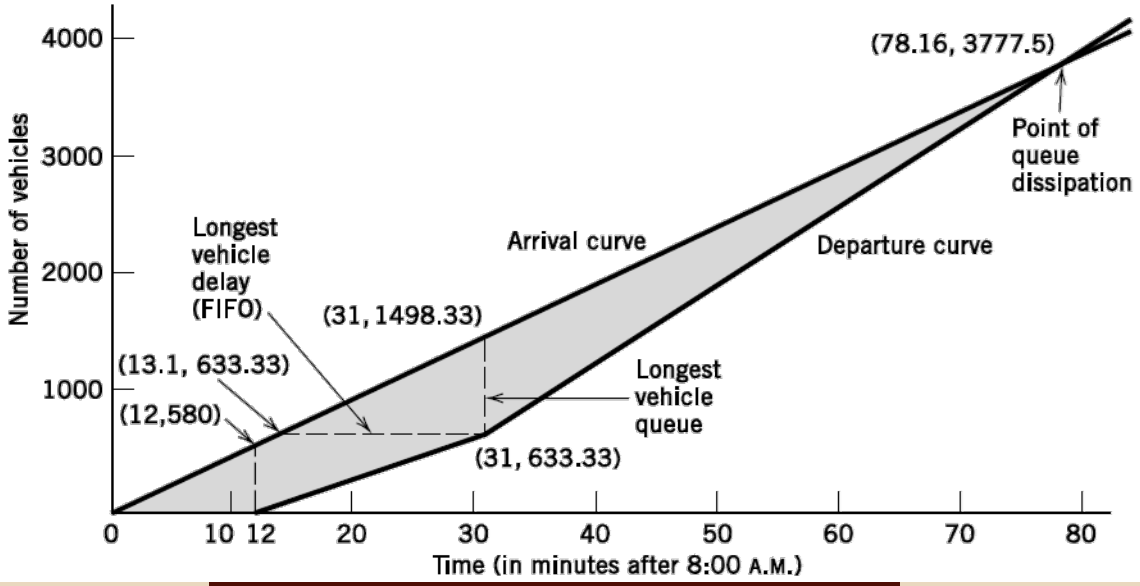
À ce moment, un total de 3777,5 véhicules (48,33 × 78,16) seront arrivés et partis

➜ *La file d'attente la plus longue se produit à 8h31.*

$$Q_{max} = \lambda t - \mu_r(t-12)$$
$$= 48.33(31) - 33.33(19)$$
$$= \underline{\underline{865 \text{ veh}}}$$

➜ *Le retard total du véhicule est:*

$$D_t = \frac{1}{2}(12)(580) + \frac{1}{2}(580+1498.33)(19) - \frac{1}{2}(19)(633.33)$$
$$+ \frac{1}{2}(1498.33-633.33)(78.16-31)$$
$$= 37,604.2 \text{ veh-min}$$



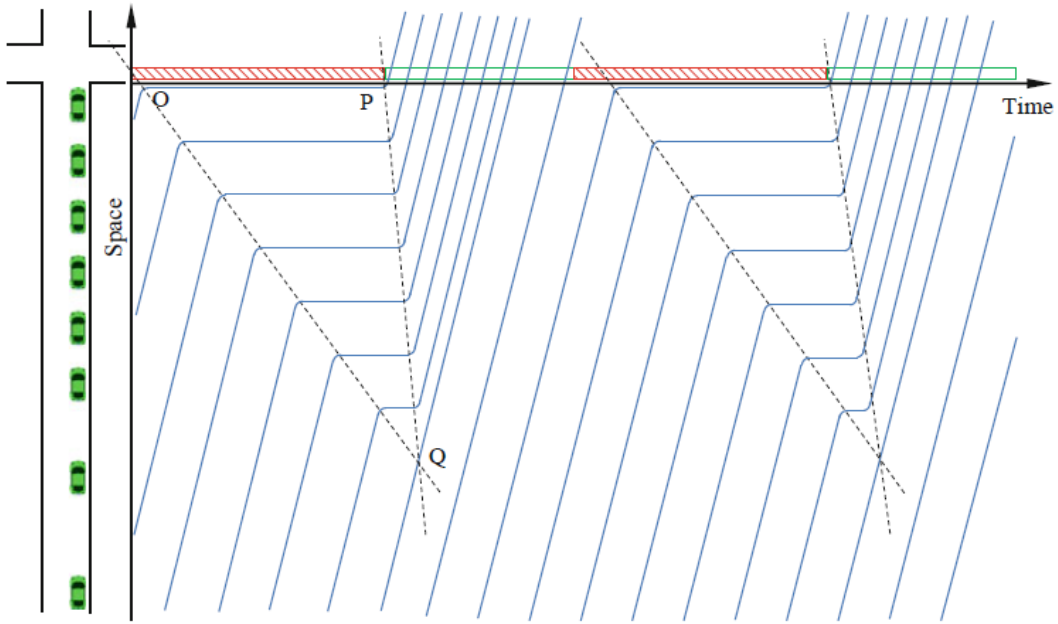
➜ *Le retard moyen par véhicule est de 9,95 min.*

➜ *L'attente la plus longue de tous les véhicules sera vécue par le 633.33e véhicule.*

➜ *Ce véhicule arrivera 13,1 minutes après 8h00. et partira à 8h31, avec un retard total de 17,9 min.*

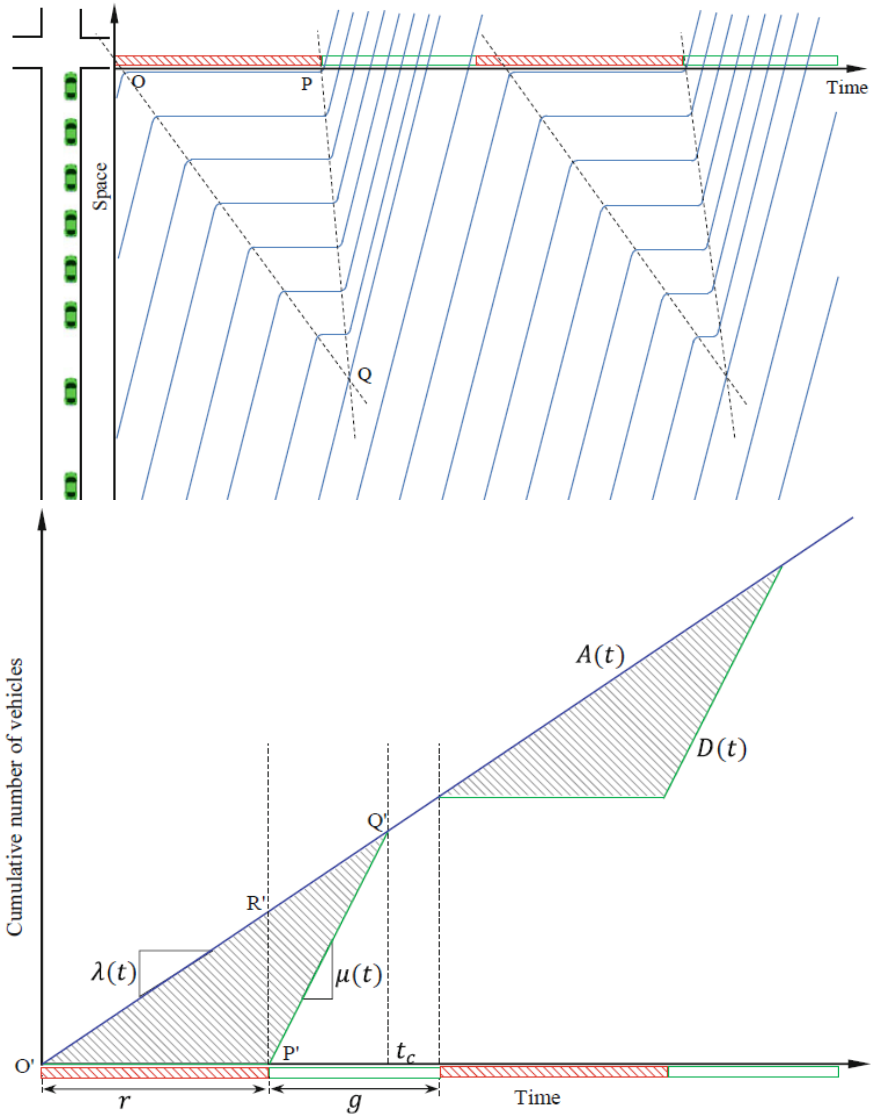
File d'attente aux intersections signalisées

- Diagramme espace-temps pour illustrer le fonctionnement de la circulation à l'approche d'une intersection signalisée.
- Chaque courbe représente une trajectoire de véhicule.
- Le feu de circulation pour cette approche est représenté par une barre composée d'une alternance de rouge effectif et de vert effectif.
- Le véhicule arrivant à cette approche au rouge effectif s'arrêtera et formera une file d'attente.
- Par conséquent, une onde de choc (ligne OQ) est générée indiquant la localisation spatio-temporelle de la queue de la file d'attente.
- Lorsque le vert effectif commence, les véhicules de la file d'attente commencent à se décharger, formant une autre onde de choc (ligne PQ) indiquant l'emplacement spatio-temporel de la tête de la file d'attente.
- Lorsque les deux ondes de choc se rencontrent (au point Q), la file d'attente se dissipe, après quoi les véhicules arrivent et repartent sans s'arrêter.
- Le bon fonctionnement se poursuit jusqu'au prochain rouge effectif, après quoi une autre file d'attente commence à se constituer et les processus ci-dessus se répètent pour un autre cycle.



File d'attente aux intersections signalisées

- Le diagramme espace-temps peut être transformé en un diagramme équivalent temps-nombre cumulé de véhicules.
- Les points O, P et Q correspondent respectivement à O',P', et Q'.
- La ligne $O'Q'$ représente la courbe d'arrivée cumulée $A(t)$ dont la pente est le taux d'arrivée $\lambda(t)$.
- La courbe $O'P'Q'$ représente la courbe de départ cumulée $D(t)$ dont la pente est le taux de départ $\mu(t)$.
- Vert effectif g,
- Rouge effectif r,
- Taux d'arrivée λ,
- Taux de départ μ



File d'attente aux intersections signalisées

- Les conditions de la circulation en un cycle peuvent être analysées comme suit :

Courbe d'arrivée cumulée $A(t)$: $A(t) = \int_0^t \lambda d\xi = \lambda t$

Courbe de départ cumulée $D(t)$:

$$D(t) = \int_0^t \mu(\xi) d\xi = \begin{cases} \int_0^t 0 d\xi = 0 & \text{for } 0 \le t < r \\ \int_0^g 0 d\xi + \int_g^t \mu d\xi = \mu(t-r) & \text{for } r \le t < r+g \end{cases}$$

Temps de dissipation de la file d'attente t_c:

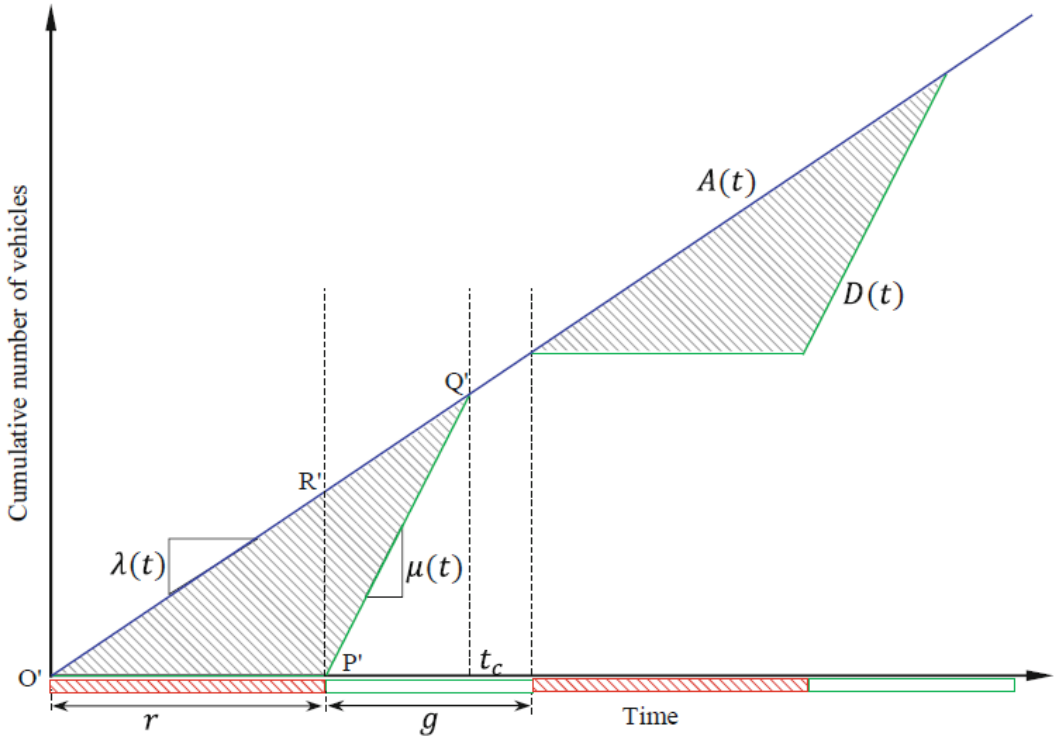
$$\lambda t_c = \mu(t_c - r), \quad t_c = \frac{\mu r}{\mu - \lambda} = \frac{r}{1-\rho}$$

La plus longue file d'attente L_m:

$$L_m = \lambda r$$

Temps d'attente le plus long W_m:

$$W_m = r$$



File d'attente aux intersections signalisées

- Les conditions de la circulation en un cycle peuvent être analysées comme suit (suite):

Retard total Γ: *La zone délimitée par la courbe A et la courbe D*

$$\Gamma = \int_0^t (A(\xi) - D(\xi))d\xi = \int_0^r (\lambda\xi - 0)d\xi + \int_r^{t_c} [\lambda\xi - \mu(\xi - r)]d\xi = \frac{1}{2}\lambda r t_c$$

Délai moyen W: *Le nombre total de véhicules arrivés dans un cycle* $N = \lambda C$

$$W = \frac{\frac{1}{2}\lambda r t_c}{\lambda C} = \frac{r t_c}{2C}$$

Longueur moyenne de la file d'attente *Retard total divisé par la durée du cycle*

$$L = \frac{\frac{1}{2}\lambda r t_c}{C} = \frac{\lambda r t_c}{2C}$$

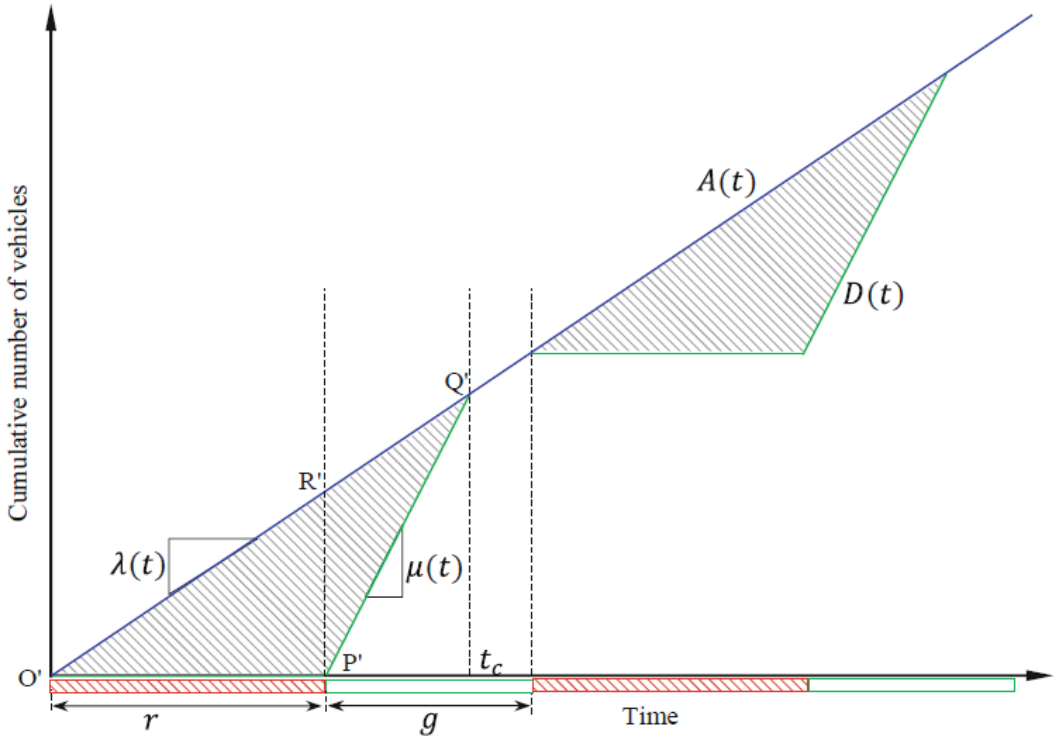
Proportion du cycle avec une file d'attente P_Q:

t_c *sur un cycle* $C = g + r$

$$P_Q = \frac{t_c}{C} = \frac{t_c}{g + r}$$

Proportion de véhicules devant s'arrêter P_S:

Le nombre total de véhicules dans un cycle est de λC*, tandis que le nombre de véhicules arrêtés est de* $\lambda\ tc$ ➜ $P_S = \frac{t_c}{C} = \frac{t_c}{g + r} = P_Q$



File d'attente aux intersections signalisées

- Notez que l'analyse ci-dessus est basée sur deux hypothèses :
  1. Il n'y a pas de file d'attente initiale
  2. La file d'attente se dissipe dans le cycle, c'est-à-dire qu'aucune file d'attente ne déborde sur le cycle suivant.
- Si l'une de ces hypothèses n'est pas satisfaite, les équations ci-dessus ne s'appliquent pas.
- Au lieu de cela, il faut analyser manuellement le système de file d'attente en utilisant les particularités des systèmes de file d'attente $D/D/1$.
- Pour vérifier la seconde hypothèse :
  - Arrivée cumulée $A(t)$ à la fin du premier cycle : $A(t) = \lambda C$
  - Départ cumulé $D(t)$ à la fin du premier cycle en supposant qu'il y a suffisamment de véhicules à décharger : $D(t) = \mu g$
  - La seconde hypothèse est satisfaite lorsque : $D(t) \geq A(t)$ ou $\mu g \geq \lambda C$

File d'attente aux intersections signalisées

- ***Exemple***
  Un flux de circulation avec un débit de 720 veh/h arrive à l'approche d'une intersection signalisée avec un feu préchronométré à deux phases. La longueur du cycle est de 60 s et le vert effectif de l'approche est de 30 s. L'expérience de terrain montre que le temps inter-véhiculaire de saturation sur cette approche est de 2 s par véhicule. Supposons que cette approche fonctionne comme un système de file d'attente D/D/1, analysez le fonctionnement de la circulation selon cette approche et fournissez des statistiques pour le quantifier.

File d'attente aux intersections signalisées

➢ ***Solution***

$\lambda = \frac{720}{3600} = \frac{1}{5}$ veh/s

$\mu = \frac{1}{2}$ veh/s

➜ $\rho = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$

$g = 30$ s $\quad r = C - g = 30$ s

Vérifiez si les deux hypothèses implicites sont satisfaites:

- *Il n'y a pas de file d'attente initiale, donc la première hypothèse implicite est satisfaite;*
- *A la fin du premier cycle :* $A(t) = \lambda C = 1/5(60) = 12$, $D(t) = \mu g = 0.5 * 30 = 15$. $D(t) \geq A(t)$ *est vrai, donc la seconde hypothèse implicite est satisfaite.*

Queue clearance time: $t_c = \frac{r}{1-\rho} = \frac{30}{1-\frac{2}{5}} = 50$ s

Longest queue: $L_m = \lambda r = \frac{1}{5}(30) = 6$ veh

Longest wait time: $W_m = r = 30$ s

Total delay: $\Gamma = \frac{1}{2}\lambda r t_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)(30)(50) = 150$ veh/s

Average delay: $W = \frac{r t_c}{2C} = \frac{30(50)}{2(60)} = 12.5$ s

Average queue length: $L = \frac{\lambda r t_c}{2C} = \frac{\frac{1}{5}(30)(50)}{2(60)} = 2.5$ veh

Proportion of the cycle with a queue: $P_Q = \frac{t_c}{C} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$

Proportion of vehicles having to stop: $P_S = P_Q = \frac{5}{6}$

Références

- May, A. D. (1990). *Traffic flow fundamentals*.
- Gartner, N. H., Messer, C. J., & Rathi, A. (2002). Traffic flow theory-A state-of-the-art report: revised monograph on traffic flow theory.
- Ni, D. (2015). *Traffic flow theory: Characteristics, experimental methods, and numerical techniques*. Butterworth-Heinemann.
- Kessels, F., Kessels, R., & Rauscher. (2019). *Traffic flow modelling*. Springer International Publishing.
- Treiber, M., & Kesting, A. (2013). Traffic flow dynamics. *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- Garber, N. J., & Hoel, L. A. (2014). *Traffic and highway engineering*. Cengage Learning.
- Elefteriadou, L. (2014). *An introduction to traffic flow theory* (Vol. 84). New York: Springer.
- Victor L. Knoop (2017), Introduction to Traffic Flow Theory, Second edition
- https://mtreiber.de/index.html
- Nicolas Saunier, Course notes for “Traffic Flow Theory – CIV6705”
- Mannering, F., Kilareski, W., & Washburn, S. (2007). *Principles of highway engineering and traffic analysis*. John Wiley & Sons.
- Haight, F. A. (1963). *Mathematical theories of traffic flow* (No. 519.1 h3).

Thank
you
ЯСЕНЕВО