Tableaux annexes

Les tableaux qui suivent reprennent quelques formules élémentaires concernant les transformées de Laplace et en $\mathcal{Z}$. La plupart de ces formules peuvent être retrouvées facilement à partir des définitions des transformées. Il peut cependant être utile de mémoriser les formules les plus fréquentes, surtout celles liées aux transformées inverses. La consultation de ces tableaux sera interdite lors des évaluations (interrogations ou examens).

Propriétés de la transformée de Laplace bilatérale

On considère les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de transformées respectives $X_1(s)$ et $X_2(s)$ et les régions de convergence associées ROC_1 et ROC_2.

Propriété	**Signal** $x(t)$	**Transformée**	**ROC**$_x$
Linéarité	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$ROC_1 \bigcap ROC_2 \subset ROC_x$
Décalage temporel	$x_1(t - t_0)$	$e^{-st_0} X_1(s)$	$ROC_x = ROC_1$
Décalage fréquentiel	$e^{s_0 t} x_1(t)$	$X_1(s - s_0)$	$s \in ROC_x$ si $s - s_0 \in ROC_1$
Changement d'échelle temporelle	$x_1(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X_1\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in ROC_x$ si $\frac{s}{a} \in ROC_1$
Complexe conjugué	$x_1^*(t)$	$X_1^*(s^*)$	$ROC_x = ROC_1$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$ROC_1 \bigcap ROC_2 \subset ROC_x$
Dérivée temporelle	$\frac{d}{dt} x_1(t)$	$sX_1(s)$	$ROC_1 \subset ROC_x$
Dérivée fréquentielle	$-tx_1(t)$	$\frac{d}{ds} X_1(s)$	$ROC_x = ROC_1$
Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X_1(s)$	Éventuellement couper en $\sigma = 0$

Transformées de Laplace bilatérales élémentaires

Signal	Transformée	ROC
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$\mathbf{I}_+(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-\mathbf{I}_+(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_+(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_+(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} < 0$
$e^{-at}\mathbf{I}_+(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re e\{s\} > -a$
$-e^{-at}\mathbf{I}_+(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re e\{s\} < -a$
$\cos(\omega_0 t)\mathbf{I}_+(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t)\mathbf{I}_+(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$

Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale

On considère les signaux $x_1[n]$ et $x_2[n]$ de transformées respectives $X_1(z)$ et $X_2(z)$ et les régions de convergence associées ROC_1 et ROC_2.

Propriété	**Signal** $x[n]$	**Transformée**	**ROC**$_x$
Linéarité	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$ROC_1 \bigcap ROC_2 \subset ROC_x$
Décalage temporel	$x_1[n - n_0]$	$z^{-n_0} X_1(z)$	$ROC_x = ROC_1$ sauf suppression / ajout éventuel de $z = 0$
Changement d'échelle fréquentielle	$z_0^n x_1[n]$	$X_1(\frac{z}{z_0})$	$z \in ROC_x$ si $\frac{z}{z_0} \in ROC_1$
Inversion temporelle	$x_1[-n]$	$X_1(z^{-1})$	$z \in ROC_x$ si $z^{-1} \in ROC_1$
Dilatation temporelle	$x[n] = \begin{cases} x_1[n/k] & \text{si } n/k \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$X_1(z^k)$	$z \in ROC_x$ si $z^k \in ROC_1$
Complexe conjugué	$x_1^*[n]$	$X_1^*(z^*)$	$ROC_x = ROC_1$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$ROC_1 \bigcap ROC_2 \subset ROC_x$
Dérivée fréquentielle	$-nx_1[n]$	$z\frac{d}{dz}X_1(z)$	$ROC_x = ROC_1$
Somme	$\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X_1(z)$	Au moins$\{\lvert z \rvert > 1\} \bigcap ROC_1$

Transformées en $\mathcal{Z}$ bilatérales élémentaires

Signal	Transformée	ROC
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$\mathbf{I}_+[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-\mathbf{I}_+[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	$\mathbb{C}$ sauf 0 si $m > 0$
$a^n\,\mathbf{I}_+[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n\,\mathbf{I}_+[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n\,\mathbf{I}_+[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n\,\mathbf{I}_+[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)\,\mathbf{I}_+[n]$	$\frac{z^2-\cos(\omega_0)z}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)\,\mathbf{I}_+[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z}{z^2-2\cos(\omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$

Propriétés de la transformée de Laplace unilatérale

On considère les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de transformées respectives $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Les régions de convergence associées se situent toujours à droite du pôle le plus à droite. La notation $x(0^-)$ désigne la condition initiale de x comme sa valeur limite à gauche en $t = 0$.

Propriété	Signal $x(t)$	Transformée
Linéarité	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Décalage fréquentiel	$e^{s_0 t}x_1(t)$	$X_1(s - s_0)$
Changement d'échelle temporelle	$x_1(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}X_1\left(\frac{s}{a}\right)$
Complexe conjugué	$x_1^*(t)$	$X_1^*(s^*)$
Convolution (on suppose $x_1(t) = x_2(t) = 0$ pour $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Dérivée temporelle	$\frac{d}{dt}x_1(t)$	$sX_1(s) - x_1(0^-)$
Dérivée fréquentielle	$-tx_1(t)$	$\frac{d}{ds}X_1(s)$
Intégration temporelle	$\int_0^t x_1(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X_1(s)$

Transformées de Laplace unilatérales élémentaires

Les transformées de Laplace unilatérales et bilatérales sont égales pour les signaux qui s'annullent pour $t < 0$. Les signaux non-singuliers en 0 et qui s'annullent pour $t > 0$ ont quant à eux une transformée de Laplace unilatérale nulle. Ces deux cas couvrent tous les signaux élémentaires considérés dans le tableau des transformées de Laplace bilatérales.

Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale

On considère les signaux $x_1[n]$ et $x_2[n]$ de transformées respectives $X_1(z)$ et $X_2(z)$. Les régions de convergence associées sont toujours le complément dans le plan complexe du cercle dont le rayon est égal à la norme du plus grand pôle.

Propriété	**Signal** $x[n]$	**Transformée**
Linéarité	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Retard unitaire	$x_1[n-1]$	$z^{-1}X_1(z) + x_1[-1]$
Avance unitaire	$x_1[n+1]$	$zX_1(z) - zx_1[0]$
Changement d'échelle fréquentielle	$z_0^n x_1[n]$	$X_1(\frac{z}{z_0})$
Dilatation temporelle	$x[n] = \begin{cases} x_1[n/k] & \text{si } n/k \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$X_1(z^k)$
Complexe conjugué	$x_1^*[n]$	$X_1^*(z^*)$
Convolution (on suppose $x_1[n] = x_2[n] = 0$ pour $n < 0$)	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Dérivée fréquentielle	$-nx_1[n]$	$z\frac{d}{dz}X_1(z)$
Somme	$\sum_{k=0}^{n} x_1[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X_1(z)$

Transformées en $\mathcal{Z}$ unilatérales élémentaires

Similairement aux transforées de Laplace, les transformées en $\mathcal{Z}$ unilatérales et bilatérales sont égales pour les signaux qui s'annullent pour $t < 0$. Les signaux qui s'annullent pour $t \geq 0$ ont quant à eux une transformée de Laplace unilatérale nulle. Ces deux cas couvrent tous les signaux élémentaires considérés dans le tableau des transformées en $\mathcal{Z}$ bilatérales.