Rendement polytropique

Rendement polytropique

Dans le monde des turbomachines, en plus du rendement isentropique, on utilise le concept de **rendement polytropique**

De manière similaire au processus isentropique, donné par la relation $\boldsymbol{pv^{\gamma} = cnste}$**,** on peut prétendre qu'une transformation réelle, réversible, s'effectue suivant l'équation $\boldsymbol{pv^{n} = cnste}$**.,** avec $\boldsymbol{n}$ un coefficient déterminé par la transformation.

Une telle transformation: $\boldsymbol{pv^{n} = cnste}$**,** est appelée **polytropique**

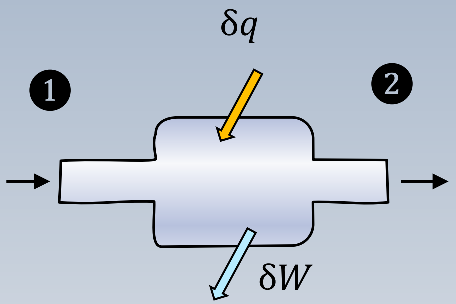
Travail polytropique

Pour définir un rendement polytropique, on regarde **le travail polytropique** référé à une quantité de base.

Pour un système adiabatique, l'utilisation de la relation Tds de Gibbs, avec l'équation de l'énergie, permet de trouver l'équation suivante pour définir le travail pas associé à une expansion

$$W = -\int_{01}^{02} v dp$$

Sachant que $\boldsymbol{pv^n = cnste}$., on trouve facilement $\boldsymbol{W}$ polytropique

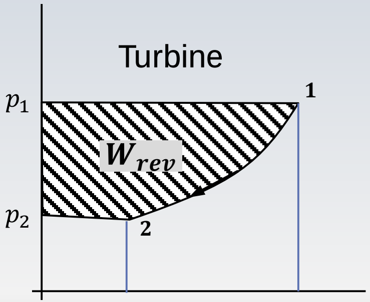


$$\delta q_{rev} - \delta W_{rev} = dh + dek + dep$$ 1ère loi

$$\delta q_{rev} = Tds = dh - vdp$$ Éq. de Gibss

$$\delta W_{rev} = -vdp - dek - dep$$

$$W_{rev} = -\int_1^2 vdp - \Delta ek - \Delta ep$$

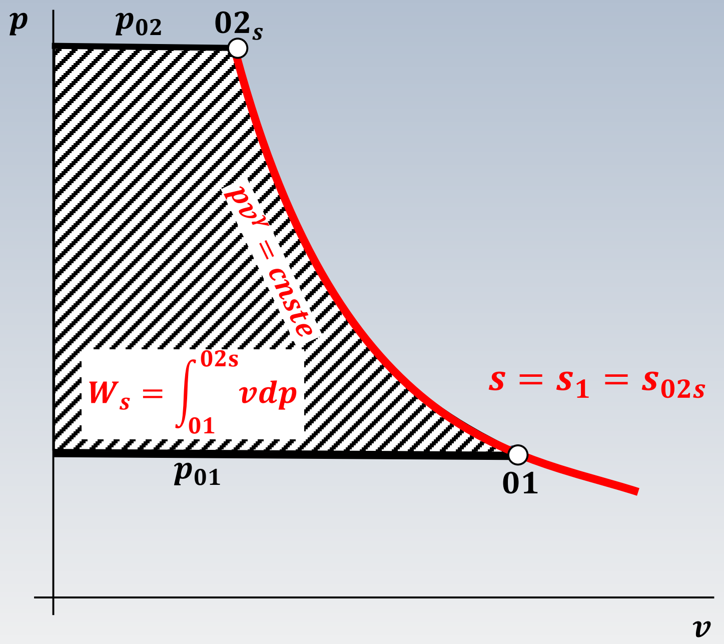


$$W_{rev} = -\int_1^2 vdp$$

$$\Delta ek \approx 0$$
$$\Delta ep \approx 0$$

Turbine

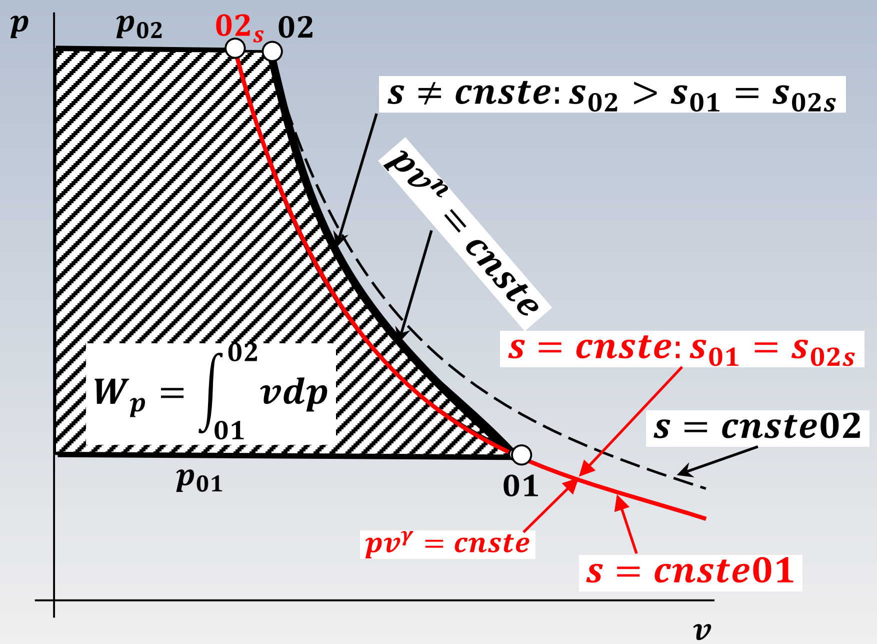
Représentation: $pv^{\gamma} = cnste$



La figure dans le plan $p - v$ $(s = cnste.)$ illustre une **compression**, **isentropique** $(pv^{\gamma} = cnste)$, entre les points **01-02s**.

Le travail correspond à la surface hachurée comprise entre l'axe p, la courbe **01–02s** et les isobares p_{01} et p_{02}

Représentation: $pv^n = cnste$



Sur cette figure, on illustre une compression **polytropique** définie par $\boldsymbol{pv^n = cnste}$**.**

Dans ce cas $\boldsymbol{s \neq cnste}$. L'entropie passe du niveau $\boldsymbol{s_{01}}$ à un niveau supérieur $\boldsymbol{s_{02}}$

Des transformations isentropiques ($pv^\gamma = cnste$), en traits rouge et pointillé, sont aussi illustrées à fins de comparaison

Alors...

Après quelques étapes, l'intégration de $\boldsymbol{W = \int_{01}^{02} v dp}$, pour des transformations isentropiques et polytropiques mène à:

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)$$

Isentropique

$$W_p = \frac{n}{n - 1}\frac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1\right)$$

Polytropique

Travail effectif

Pour définir le **rendement polytropique**, on utilise comme référence la notion de **travail effectif**. Il s'agit du travail réalisé par un gaz parfait $(c_p = \gamma R/(\gamma - 1))$ entre deux états **01-02** donné par

$$W_{eff} = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p T_{01}\left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)$$

Si par la suite l'on imagine une transformation polytropique, décrite par $T_{02}/T_{01} = (p_{02}/p_{01})^{n-1/n}$ on trouve:

$$\boxed{\boldsymbol{W_{eff} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1\right)}}$$

Rendement polytropique

Avec ces éléments, on peut définir le **rendement polytropique** comme le rapport entre le travail polytropique et le travail effectif. Alors pour une **turbine,** par la relation $\boldsymbol{\eta_p = W_{eff}/W_p}$

$$\eta_p = \frac{\dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\dfrac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\dfrac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1\right)}{\dfrac{n}{n - 1}\dfrac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\dfrac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1\right)}$$

$$\boxed{\eta_p = \frac{(n-1)/n}{(\gamma-1)/\gamma}}$$

Relation entre le rendement et l'exposant de la polytropique

Rendement polytropique

Pour une **turbine**, le résultat $\eta_p = \frac{(n-1)/n}{(\gamma-1)/\gamma}$, permet d'établir une relation entre le rendement isentropique $\eta_s = W_{eff}/W_s$ et le rendement polytropique $\eta_p = W_{eff}/W_p$. Notamment,

$$\frac{\eta_s}{\eta_p} = \frac{\frac{n}{n-1}\frac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1\right)}{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_{01}}{\rho_{01}}\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)} \Rightarrow \boxed{\eta_s = \frac{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{\eta_p(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)}{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)}}$$

$\boxed{\eta_s > \eta_p \text{ Turbine}}$

Rendement polytropique

Pour un **compresseur**, on peut obtenir de manière analogue

$$\eta_p = \frac{(\gamma-1)/\gamma}{(n-1)/n}$$

Trop des formules!

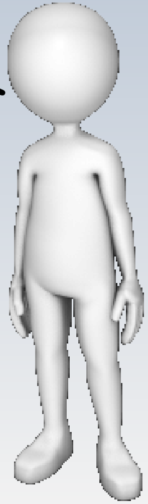
Relation entre le rendement et l'exposant de la polytropique

$$\boldsymbol{\eta_s} = \frac{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)}{\left(\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma\boldsymbol{\eta_p}} - 1\right)}$$

$\boldsymbol{\eta_s < \eta_p}$ **Compresseur**

Deux rendements?

Pourquoi utilise-t-on deux rendements?



Deux rendements?

Pour le cas d'un **compresseur*** l'équation du rendement (isentropique) total-à-total peut s'écrire

$$\eta_{tt} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \Rightarrow \quad \eta_{tt} = T_{01}\left[\frac{T_{02s}/T_{01} - 1}{T_{02} - T_{01}}\right]$$

$$\eta_{tt} = \frac{T_{01}}{T_{02} - T_{01}}\left[(\boldsymbol{p_{02}/p_{01}})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right]$$

* L'analyse est similaire pour une turbine; $c_p = cnste$.

Rapport de pression et η isentropique

L'expression précédente indique que le rendement isentropique (total-à-total) dépend du **rapport de pression**

Alors, la comparaison entre deux machines semblables sur la base du rendement isentropique (total-à-total) est difficile si chacune d'elles opère à un rapport de pression différent.

On note que pour les turbomachines **à étages multiples**, le rendement isentropique changera au fur et à mesure que le nombre d'étages augmente

Rapport de pression et η isentropique

On a constaté que, **la variation du rendement polytropique est beaucoup plus faible que celle d'un rendement isentropique** (au point de design), pour des turbomachines qui opèrent à des rapports de pression différents (ou avec des fluides différents).

Cet indice, moins dépendant du nombre d'étages, est donc favorisé pour définir la qualité d'une machine.

Rendement polytropique II

Étant donné que les turbomachines thermiques modernes possèdent **plusieurs étages**, à la limite on peut imaginer qu'une compression (ou expansion) a lieu suivant une série d'étapes infinitésimales

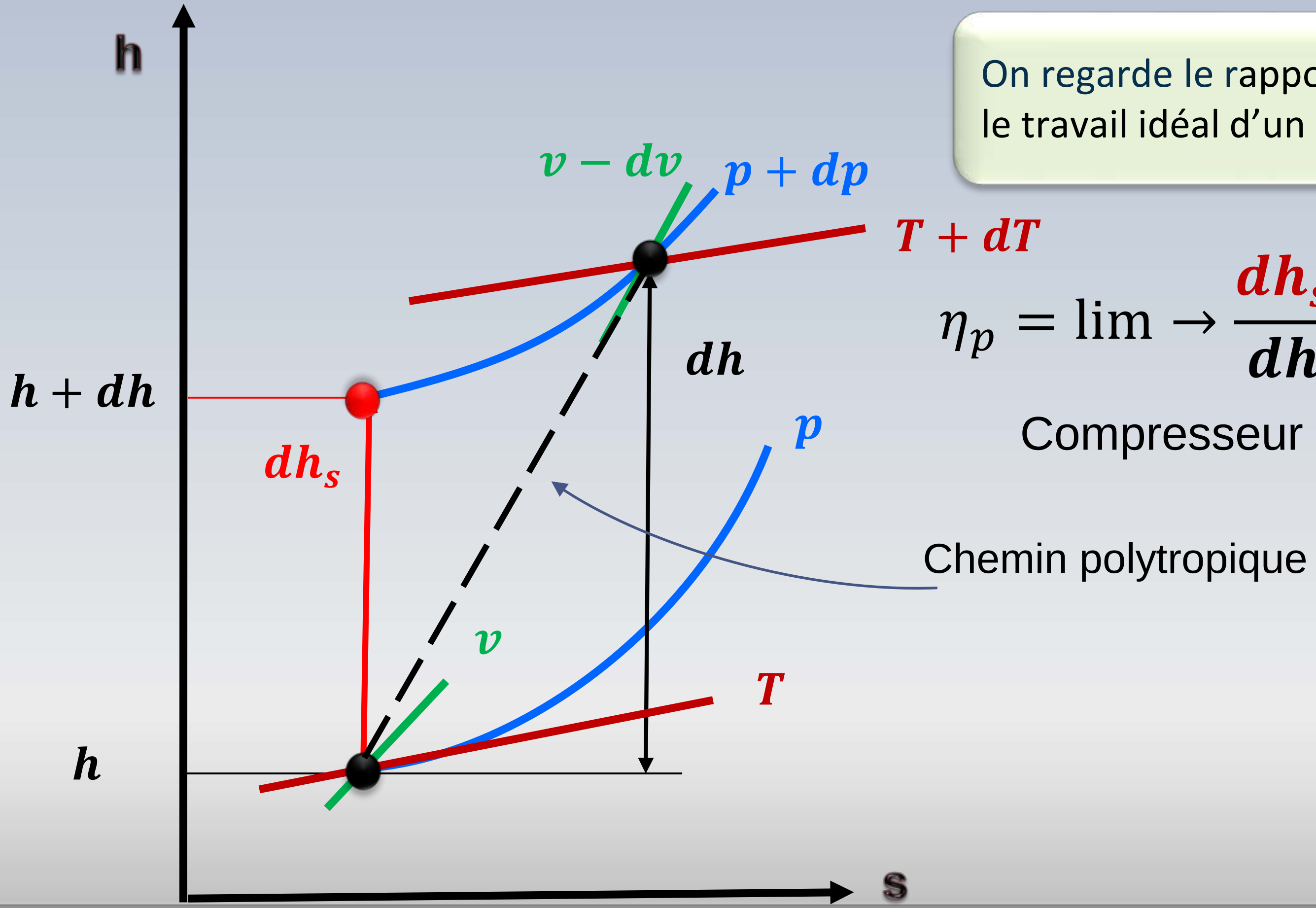
Associé à cette idée, on interprète le rendement polytropique comme **le rendement isentropique d'un étage infinitésimal**

D'après cette analyse, on peut trouver des relations entre des rapports de température et de pression

On verra le cas d'une compression

Rendement Polytropique II

On regarde le rapport entre le travail réel et le travail idéal d'un étage <u>infinitésimal</u>



$$\eta_p = \lim \rightarrow \frac{dh_s}{dh}$$

Compresseur

Relations polytropiques

Compresseur

$$T\,ds = dh - v\,dp$$

Processus isentropique

$$T\,\cancel{ds} = dh_s - v\,dp$$

$$\boldsymbol{dh_s} = v\,dp = \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{p/RT}$$

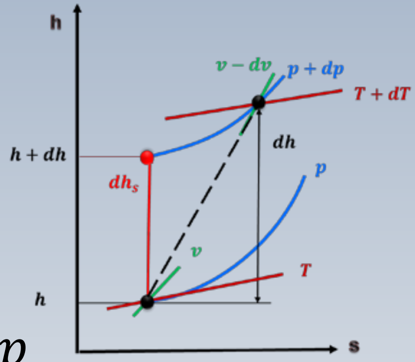
$$\boldsymbol{dh} = c_p\,dT$$

$$\eta_p = \frac{\boldsymbol{dh_s}}{\boldsymbol{dh}} = \frac{\boldsymbol{vdp}}{\boldsymbol{dh}}$$

$$\eta_p = \frac{dp(RT/p)}{c_p\,dT}$$

$$\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p\eta_p}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{T_2}}{\boldsymbol{T_1}} = \left(\frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{p_1}}\right)^{\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{c_p\eta_p}}}}$$



Remarque

Le travail polytropique est donné par : $W_p = \int_{01}^{02} vdp$

de sorte que la relation $Tds = dh - vdp \rightarrow W_p = \Delta h - \int_{01}^{02} Tds$

indique que le travail polytropique (et le rendement associé) tient compte de **l'énergie dégradée** $\boldsymbol{\int_{01}^{02} Tds}$ dans un processus de compression.

Cette dégradation est invisible lors d'un processus isentropique

Relations polytropiques

Un développement analogue, mène à cette relation pour les turbines

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R\eta_p}{c_p}}$$

Relations polytropiques

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p\eta_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma\eta_p}$$

Compresseur

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n-1)/n}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R\eta_p/c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\eta_p(\gamma-1)/\gamma}$$

Turbine

$$\eta_p = \frac{(n-1)/n}{(\gamma - 1)/\gamma}$$

Ces relations correspondent à des expansions ou de compressions infinitésimales

Rendements polytropique-isentropique

Compresseur

$\eta_s \leq \eta_p$

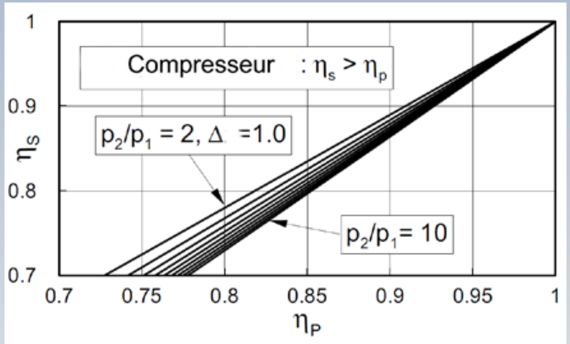
$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma\eta_p} - 1} \right)$$

Turbine

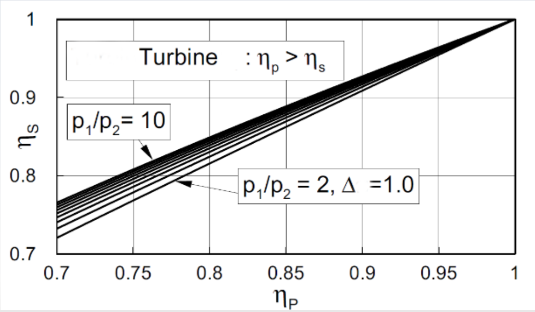
$\eta_s \geq \eta_p$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)\eta_p/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1} \right)$$

Rendements polytropique-isentropique

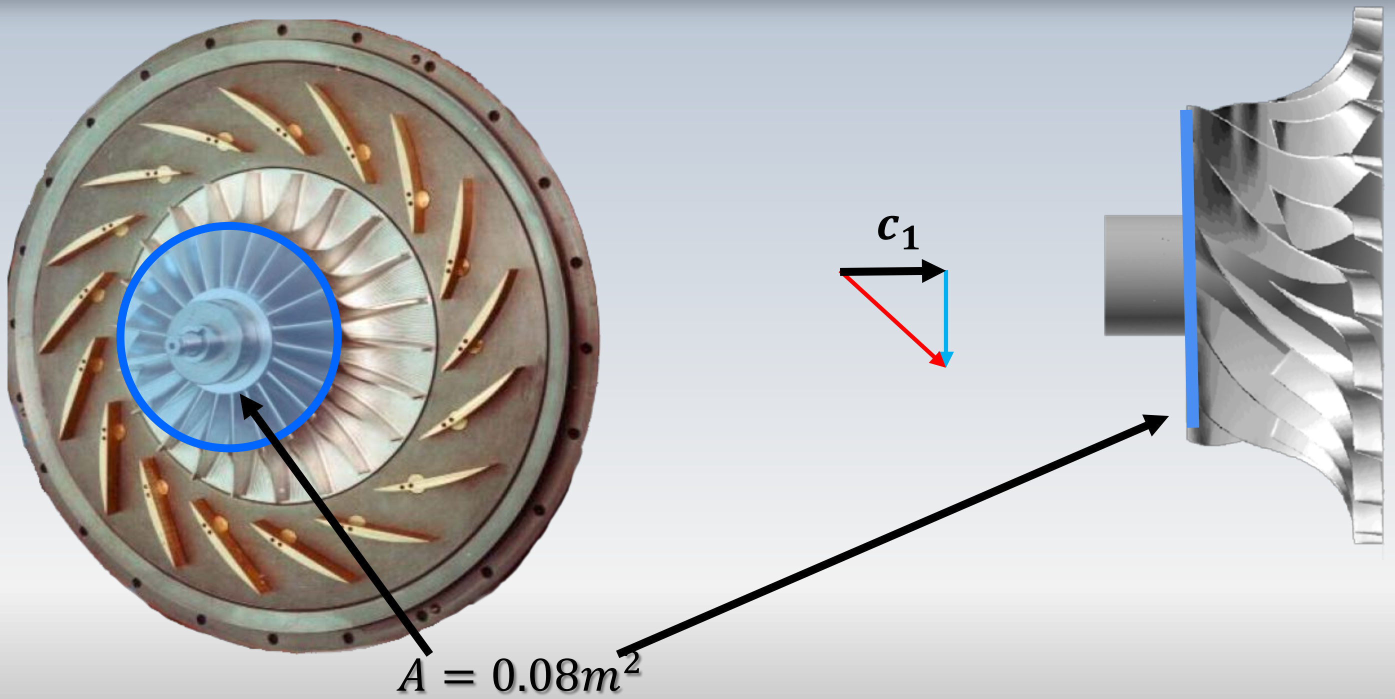


$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma \boldsymbol{\eta_p}} - 1} \right)$$



$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)\boldsymbol{\eta_p}/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1} \right)$$

À l'entré du rotor d'un compresseur la vitesse moyenne est $C_1 = 320\, m/s.$ L'aire de la section de passage est $A = 0.08m^2$. La température et la pression de l'environnement autour du compresseur sont respectivement $T = 300K$ et $p = 100kPa$. La puissance fournie au fluide est $\dot{W} = 300kW.$ Calculez:



1

- Les conditions d'arrêt ou totales: température, pression et masse volumique à l'entrée du compresseur

2

- Le débit massique

3

- La pression de stagnation maximale possible à la sortie

- Considérez un **processus isentropique** entre tout point de l'environnement et l'entrée du compresseur

- Considérez que la vitesse c_1 **est alignée** avec l'axe de l'arbre

- Considérez l'air comme un gaz idéal avec $R = 287(J/kg \cdot K)$ et $c_p = 1010(J/kg \cdot K)$

Stagnation= Arrêt=Totale

$\boxed{c = 0}$

$T = 300K$

$p = 100kPa$

0

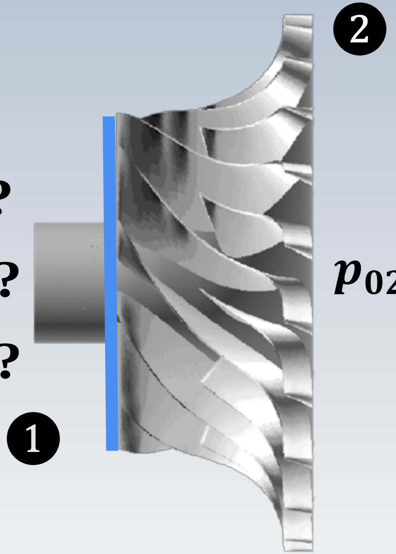
$\dot{m} = ?$

$c_1 = 320m/s$

$T_{01} = ?$

$p_{01} = ?$

$\rho_{01} = ?$



$p_{02}(\max) = ?$

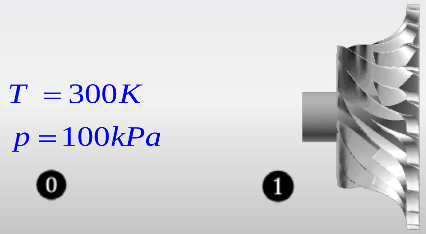
$\dot{W} = 300kW$

• Température, pression et masse volumique à l’entrée du compresseur

Les propriétés statiques au point 0 sont aussi des quantités totales, puisque la vitesse est nulle

L’écoulement d’air entre le point 0 et le point 1, l’entrée du compresseur, peut être estimé comme étant isenthalpique et isentropique. Alors,

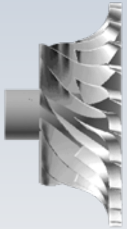
$$T_{01} = 300K,\ p_{01} = 100kPa \qquad \rightarrow \rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = 1.161\,\frac{kg}{m^3}$$



- Débit massique

Le débit massique est fonction de la vitesse de l'air, de l'aire normale à cette vitesse, et de la masse volumique statique

Pour calculer cette dernière, nous utiliserons la pression et la température statique à l'entrée 1 du compresseur



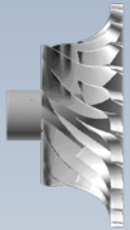
1

Pour la température

$$T_1 = T_{01} - \frac{c_1^2}{2c_p} \qquad \rightarrow 300 - \frac{320^2}{2 \times 1010} \rightarrow T_1 = 249.3K$$

• Débit massique

Pour la pression



1

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(\frac{T_1}{T_{01}}\right)^{\frac{c_p}{R}} \qquad \rightarrow 100\left(\frac{249.3}{300}\right)^{\frac{1010}{287}} \qquad \rightarrow p_1 = 51.90\, kPa$$

La masse volumique est obtenue via l'équation d'état

$$\rho_1 = \left(\frac{p_1}{RT_1}\right) \quad = \left(\frac{51.90}{287 \times 249.3}\right) \quad = 0.726\,\frac{kg}{m^3}$$

- Débit massique

Finalement

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 c_1 = 0.726 \times 0.08 \times 320 = \mathbf{18.57 kg/s}$$

Une voie alternative pour trouver $\dot{m}$, est l'utilisation du nombre de Mach $Ma = c_1/\sqrt{\gamma R T_1}$ et par la suite la relation

$$\boxed{\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

• Pression maximale

La pression maximale théorique $\boldsymbol{p_{02}}$ à la sortie, est celle qui serait atteinte si le processus dans le compresseur était **isentropique**. Dans ce cas, la formule pour l'obtenir est

$$\frac{\boldsymbol{p_{02}}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{c_p}{R}}$$

T_{01}et p_{01} sont connues. Il faut trouver T_{02}. Nous avons $\dot{W}$, alors

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{02} - h_{01} = c_p(\boldsymbol{T_{02}} - T_{01})$$

- Pression maximale

$$\boldsymbol{T_{02}} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{\dot{m} \times c_p} = 315.9K$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{c_p}{R}} \rightarrow \boldsymbol{p_{02} = 119.9\,kPa}$$

$\dot{m} = 18.57 kg / s$

$T_{01} = 300K$

$p_{01} = 100kPa$

$\dot{W} = 300kW$

$p_{02}(\max) = ?$

Un compresseur centrifuge tourne à $n = 20000 rpm$. Le diamètre extérieur est $D = 300 mm$. Les conditions de stagnation à l'entrée sont $T_0 = 15^0 C$ et $p_0 = 100\, kN/m^2$. Le débit massique d'air est $\dot{m} = 0.9\, kg/s$ et la composante périphérique de la vitesse absolue à la sortie est 90% de la vitesse tangentielle U en ce point. Le ***rendement polytropique*** du compresseur est $\eta_p = 80\%$. Le nombre de pales est $Z = 15$

Trouvez:

a) le travail spécifique W_e,

b) la température totale à la sortie T_{02},

c) le rapport: ***P-d'arrêt-sortie/P-d'arrêt-entrée*** dans le rotor

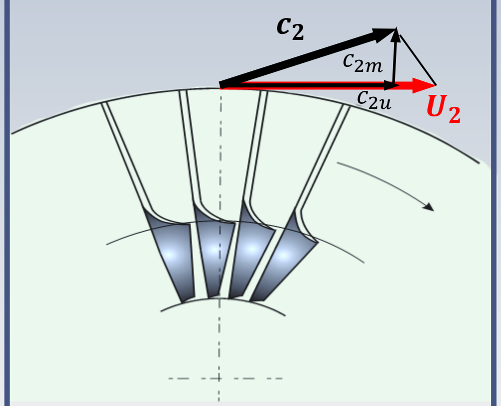
Considérez que la vitesse absolue de l’écoulement **à l’entrée est alignée avec l’axe de l’arbre (sans prérotation)**

Considérez l’air comme un gaz idéal: $\boldsymbol{R = 287\, J/kg \cdot K}$

Données

Sortie

$$c_{2u} = 0.9U_2$$

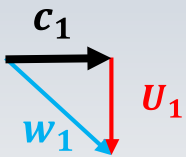


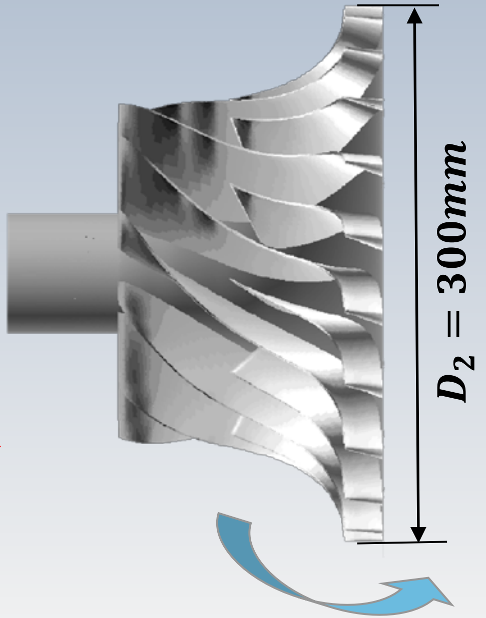
$$\eta_p = 0.8$$

$$\dot{m} = 0.9\,kg/s$$

$$T_0 = 15^0C$$

$$p_0 = 100\,\frac{kN}{m^2}$$





$$n = 20000\,rpm$$

a) le travail spécifique W_e, b) température totale à la sortie T_{02}, c) le rapport de pression d'arrêt dans le rotor

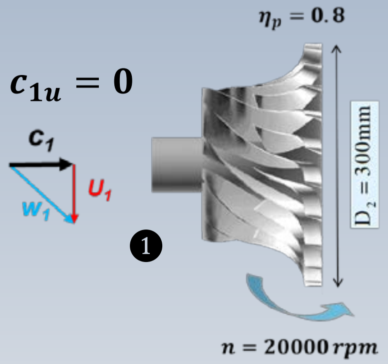
Travail spécifique ?

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - \underbrace{c_{1u}}_{c_{1u}=0}U_1)$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = c_{2u}\ U_2 = 0.9U_2 \times U_2 \qquad \boxed{c_{2u} = 0.9U_2}$$

$$U_2 = \frac{\pi n D_2}{60} = \frac{\pi \times 20000 \times 0.30}{60} = 314.16\frac{m}{s}$$

$$\boldsymbol{W_e} = \frac{\dot{\boldsymbol{W}}}{\dot{\boldsymbol{m}}} = 0.9U_2 \times U_2 = \mathbf{88826}\frac{\boldsymbol{m^2}}{\boldsymbol{s^2}} = h_{02} - h_{01} = c_p(\boldsymbol{T_{02}} - T_{01})$$



$\dot{m} = 0.9\frac{kg}{s}$
$T_{01} = 15^0C$
$p_{01} = 100\frac{kN}{m^2}$
$D_2 = 300mm$
$\eta_p = 0.8$
$n = 20000\,rpm$
$c_{2u} = 0.9U_2$
$c_{1u} = 0$

Température totale T_{02}?

$$T_{02} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{\underset{\substack{\uparrow \\ (288K)}}{c_p}\dot{m}} = 288K + \frac{88826\, m^2/s^2}{1006\, J/kg \cdot K}$$

$$\boldsymbol{T_{02} = 376.29\, K} \qquad \rightarrow c_p \approx 1012\, J/kg \cdot K$$

$$\bar{T} = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} = 332.14\text{K} \qquad \rightarrow c_p \approx 1007.8\, J/kg \cdot K$$

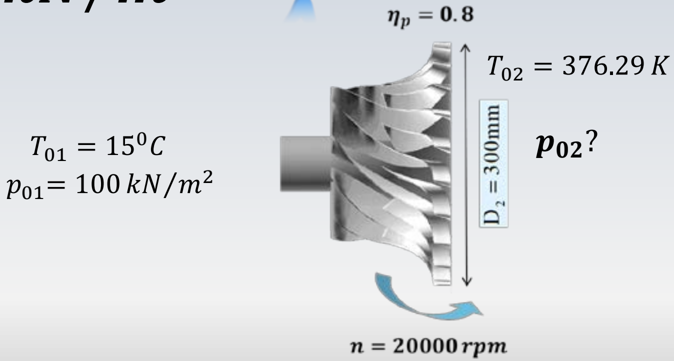
$$\dot{m} = 0.9\, \frac{kg}{s}$$
$$T_{01} = 15^0 C$$
$$p_{01} = 100\, \frac{kN}{m^2}$$
$$D_2 = 300mm$$
$$\eta_p = 0.8$$
$$n = 20000\, rpm$$
$$c_{2u} = 0.9 U_2$$
$$c_{1u} = 0$$
$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}}$$

On a cherché une température moyenne puisque la valeur de $\boldsymbol{c_p}$ dépend de la température

Pression totale p_{02}?

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}} = \left(\frac{375.8}{288}\right)^{\frac{0.8\times1007.8}{287}} = 2.117$$

$$\boldsymbol{p_{02} = 2.117 p_{01} \quad = 211.7\, kN/m^2}$$



$\dot{m} = 0.9\,\frac{kg}{s}$

$T_{01} = 15^0 C$

$p_{01} = 100\,\frac{kN}{m^2}$

$D_2 = 300mm$

$\eta_p = 0.8$

$n = 20000\, rpm$

$c_{2u} = 0.9 U_2$

$c_{1u} = 0$

$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}}$

$R = 287\,\frac{J}{kg\cdot K}$

Polytropique vs isentropique

Un compresseur axial à 4 étages a les caractéristiques suivantes

$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$
$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$
$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$
$rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$

$p_1 = 1.5 bar$

$T_1 = 350\ K$

$p_1 = 1.5\ bar, T_1 = 350K, \gamma = 1.4,$ **Les quantités sont totales (d'arrêt)**

η_{ks} :rendement isentropique de l'étage k

Polytropique vs isentropique

- Pour chaque i-étage (i=1,4), on vous demande de calculer le rapport T_{i+1}/T_i ainsi que le rendement polytropique
- Par la suite, supposez des configurations successives, avec le premier étage seulement, et par après, avec les étages 1-2 , 1-2-3, et 1-2-3-4 couplés
- Obtenez les rapports de température et de pression pour ces 4 configurations
- Finalement, utilisez ces résultats pour calculer les rendements isentropiques et polytropiques correspondants aux quatre agencements

Formules:rappel

$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$
$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$
$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$
$rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma\eta_p} - 1} \right)$$

$i = 1,2,3,4$

$p_1 = 1.5bar$

$T_1 = 350\ K$

$rp_1 \quad rp_2 \quad rp_3 \quad rp_4$

❶ ❷ ❸ ❹ ❺

$\boldsymbol{\eta_p}$

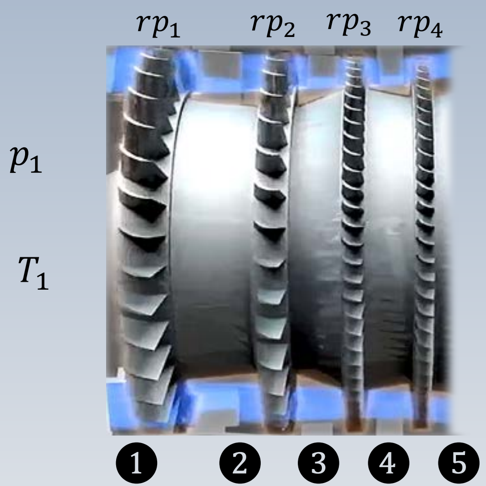
Les quantités sont totales (d'arrêt)

Étage 1: T_2/T_1 ,η_p

- Pour chaque i-étage (i=1,4), on vous demande de calculer le rapport T_{i+1}/T_i ainsi que le rendement polytropique

$$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$
$$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$
$$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$
$$rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1s} = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\boldsymbol{T_2/T_1 - 1}}\right)$$



1

$$T_2/T_1 = \left(\frac{(rp_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\eta_{1s}}\right) + 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_2/T_1 = 1.22}$$

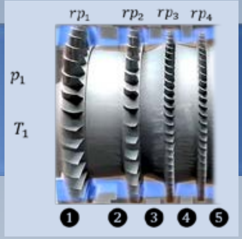
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma\boldsymbol{\eta_p}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta_p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \Big/ ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\boldsymbol{\eta_p = 0.844}$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

Températures

$rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$
$rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$
$rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$
$rp_4 = 2.4 \quad \eta_{4s} = 74\%$



❶ $T_2/T_1 = 1.22$

$\boldsymbol{\eta_{12p} = 0.844}$

❷ $T_3/T_2 = 1.30$

$\boldsymbol{\eta_{32p} = 0.808}$

❸ $T_4/T_3 = 1.34$

$\boldsymbol{\eta_{43p} = 0.813}$

❹ $T_5/T_4 = 1.42$

$\boldsymbol{\eta_{54p} = 0.772}$

❶❷

$$T_3 / T_1 = (T_3/T_2)(T_2/T_1) = 1.3 \times 1.22 = 1.59$$

❶❷❸

$$T_4 / T_1 = \left(T_3 / T_1\right)\left(T_4 / T_3\right) = 1.59 \times 1.34 = 2.14$$

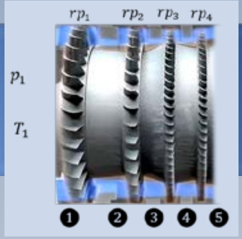
❶❷❸❹

$$T_5 / T_1 = \left(T_4 / T_1\right)\left(T_5 / T_4\right) = 2.14 \times 1.42 = 3.05$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

Rendements

- Par la suite, supposez des configurations successives, avec le premier étage seulement, et par après, avec les étages 1-2 , 1-2-3, et 1-2-3-4 couplés



$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$
$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$
$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$
$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1ip} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} ln\left(\frac{p_i}{p_1}\right) \Big/ ln\left(\frac{T_i}{T_1}\right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

❶ ❷

$$\boldsymbol{p_3/p_1} = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

$$\boldsymbol{\eta_{13p}} = \mathbf{0.819}$$

❶ ❷ ❸

$$\boldsymbol{p_4/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

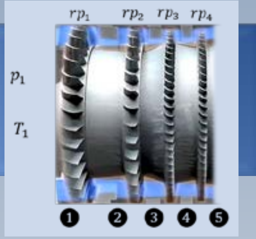
$$\boldsymbol{\eta_{14p}} = \mathbf{0.812}$$

❶ ❷ ❸ ❹

$$\boldsymbol{p_5/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$$\boldsymbol{\eta_{15p}} = \mathbf{0.799}$$

Rendements



❶ ❷

$$\boldsymbol{p_3/p_1} = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

❶ ❷ ❸

$$\boldsymbol{p_4/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

❶ ❷ ❸ ❹

$$\boldsymbol{p_5/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$\eta_{12s} = 0.82$	

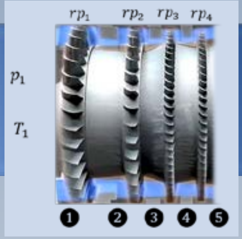
$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$
$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$
$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$
$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1is} = \left(\frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1} \right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropique

Rendements



❶ ❷

$$\boldsymbol{p_3/p_1} = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = 1.8 \times 2.1 = \mathbf{3.78}$$

❶ ❷ ❸

$$\boldsymbol{p_4/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = \mathbf{8.69}$$

❶ ❷ ❸ ❹

$$\boldsymbol{p_5/p_1} = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = \mathbf{22.6}$$

$\eta_{12s} = 0.82$	$\eta_{12p} = 0.844$
$\eta_{13s} = 0.779$	$\eta_{13p} = 0.819$
$\eta_{14s} = 0.745$	$\eta_{14p} = 0.812$
$\eta_{15s} = 0.701$	$\eta_{15p} = 0.799$

$T_2/T_1 = 1.22$ $rp_1 = 1.8$ $\eta_{1s} = 82\%$

$T_3/T_1 = 1.59$ $rp_2 = 2.1$ $\eta_{2s} = 78\%$

$T_4/T_1 = 2.14$ $rp_3 = 2.3$ $\eta_{3s} = 78\%$

$T_5/T_1 = 3.05$ $rp_4 = 2.6$ $\eta_{4s} = 74\%$

$$\eta_{1is} = \left(\frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1}\right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropique

En bref

Dans une étape d’introduction à l’étude des turbomachines nous avons:

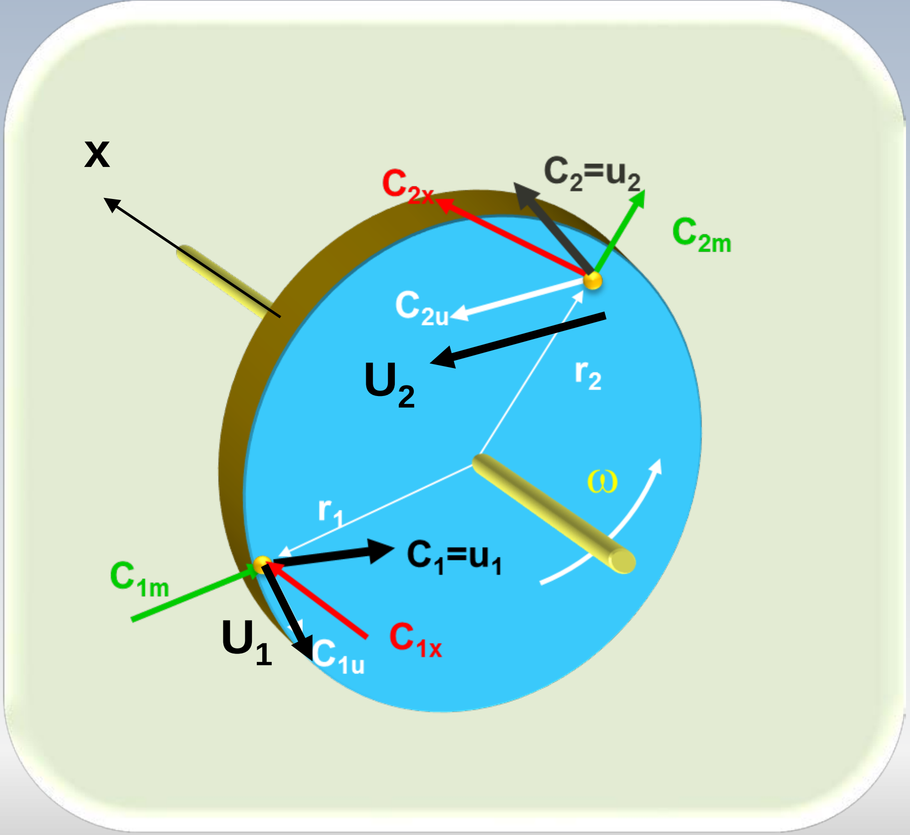
1) Rappelé les lois de conservation,
2) Présenté l’équation d’Euler pour les turbomachines,
3) Rappelé le premier et le second principe de la thermodynamique,
4) Rafraichi quelques notions de la dynamique des gaz,

En bref

5) Évoqué le diagramme h-s (enthalpie-entropie),
6) Présenté des formules pour le calcul des rendements total-à-total et polytropique

Des problèmes utilisant ces notions dans le contexte des turbomachines ont été développés

Équations 1D à l'état stationnaire



$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$$

Dans cette formule, on considère que les aires d'entrée et de sortie sont dans un plan normal à l'axe des x

Synthèse de formules

Compresseur

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p\eta_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma\eta_p}$$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma\boldsymbol{\eta_p}} - 1}\right)$$

$$\eta_s \leq \eta_p \qquad \eta_p = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n-1)/n}$$

Turbine

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R\eta_p/c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\eta_p(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\eta_s = \left(\frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)\boldsymbol{\eta_p}/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}\right)$$

$$\eta_s \geq \eta_p \qquad \eta_p = \frac{(n-1)/n}{(\gamma - 1)/\gamma}$$

Synthèse de formules (reprise)

Rendement Turbine

$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

Débit massique

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Rend. compresseur

$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

Écoulement isentropique

$$\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}Ma^2\right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Température Totale

$$T_0 = \mathrm{T} + \frac{V^2}{2c_p}$$

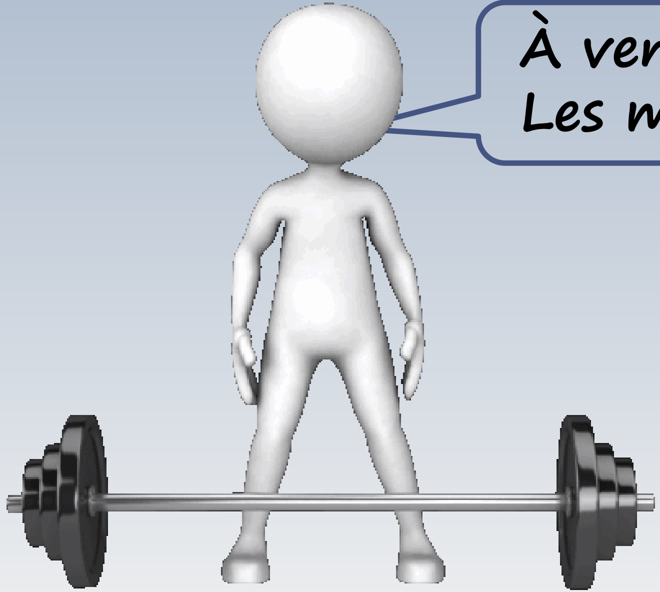
Processus isentropique

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{s=const.} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Gaz parfait

$$p = \rho RT$$

À venir



À venir:
Les machines axiales