## 1- Vecteurs

On peut identifier l'orientation d'un vecteur dans l'espace par deux angles donnant la direction (azimut) et la plongée. Définitions :

**Azimut** : l'angle en degrés par rapport au Nord. L'azimut varie entre [0,360[ et il est mesuré dans le sens horaire. Ainsi l'est correspond à 90°, l'ouest à 270°.

**Plongée** : Un angle positif sous le plan horizontal (surface du sol) qui varie entre [0,90]. Un vecteur à 0° est horizontal et un vecteur à 90° est vertical.

Une autre façon utile d'orienter un vecteur est par ses cosinus directeurs (i.e. on identifie les coordonnées d'un vecteur unitaire parallèle). On utilise habituellement un **<u>système main droite</u>** (i.e. la coordonnée x est croissante vers l'est, la coordonnée y est croissante vers le nord et la coordonnée z est croissante vers le haut). On peut facilement passer des angles azimut et plongée au vecteur unitaire. Ainsi dans un système de coordonnées main droite, on aura avec a : direction (azimut) et b : inclinaison :

$$x = cos(b)sin(a); \quad y = cos(b)cos(a); \quad z = -sin(b)$$

## 2- Plans

Il y a trois façons courantes d'identifier l'orientation d'un plan dans l'espace :

1- Par le pôle du plan dont on donne la direction en azimut et plongée.

2- Par le vecteur pendage du plan dont on donne la direction et la plongée. le vecteur pendage est le vecteur de plus forte pente dans le plan.

3- Par la convention géologique : on donne la direction du plan et son pendage. La direction du plan est obtenue par la règle de la main droite : le vecteur pendage étant à droite, on donne la direction en azimut du vecteur horizontal dans le plan.

On peut facilement passer d'un système à l'autre.

Soit $a_p$ et $b_p$ la direction et la plongée du pôle du plan. Le pôle est orienté vers le bas, de sorte que $b_p$ soit positif. Soit $a_d$ et $b_d$ la direction et la plongée du vecteur pendage (regardant vers le bas) et soit $a_g$ et $b_g$ la direction et le pendage du plan données selon la convention géologique
On a:

$$a_g = a_d - 90; \quad a_p = a_d + 180$$

Peu importe le a, s'il est négatif, prendre 360+a, si a ≥ 360 prendre a-360.

$$b_g = b_d; \quad b_p = 90 - b_d$$

Exemples

| Plan | Pôle | | Vecteur pendage | | Géologique | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_p$ | $b_p$ | $a_d$ | $b_d$ | $a_g$ | $b_g$ |
| 1 | 30 | 30 | 210 | 60 | 120 | 60 |
| 2 | 120 | 40 | 300 | 50 | 210 | 50 |
| 3 | 210 | 20 | 30 | 70 | 300 | 70 |
| 4 | 300 | 10 | 120 | 80 | 30 | 80 |

## 4- Utilité du vecteur cosinus directeurs

### a) Pôle et équation implicite du plan

Soit $(a, b, c)$ le vecteur unitaire décrivant le pôle du plan.
L'équation implicite du plan est alors $ax + by + cz + d = 0$. Connaissant $a, b, c$ et un point du plan on peut trouver $d$ et le plan est alors entièrement spécifié.

### b) Coordonnées sur un stéréonet (demi-sphère inférieure, i.e. 'c' est négatif)

**i) angles égaux ou stéréographique**

$$x = \frac{a}{1-c}; \quad y = \frac{b}{1-c}$$

**ii) aires égales**

$$x = \frac{a}{(1-c)^{0.5}}; \quad y = \frac{b}{(1-c)^{0.5}}$$

Note : pour les deux types de projection, x et y varient entre -1 et 1.

### c) Trouver le vecteur orthogonal au plan défini par deux vecteurs u et v

$w = u \times v$ où $\times$ est le produit vectoriel

Note : utile pour trouver l'orientation d'un plan croisé par un forage. La sonde ou caméra permet d'identifier le vecteur grand axe de l'ellipse. Un premier produit vectoriel du grand axe avec le forage donne le petit axe de l'ellipse. Un second produit vectoriel entre grand et petit axes donne le pôle du plan.

### d) Trouver l'angle A entre deux vecteurs unitaires u et v

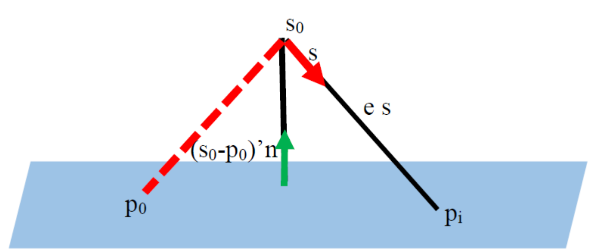
$cos(A) = u \cdot v$ où $\cdot$ est le produit scalaire

Note : utile pour calculer JO entre plan et forage (voir h)

### e) Intersections plan-forage. Trouver la distance entre le collet d'un forage et un plan connu, trouver le point d'intersection forage-plan

Étant donné un plan dont on connaît l'orientation et un point du plan, on peut trouver le point d'intersection et calculer la distance collet-intersection pour un forage donné. On peut aussi déterminer la distance minimale à forer pour croiser le plan.

n : pôle du plan (vecteur unitaire)
$s_0$ : collet du forage
$p_0$ : un point connu du plan
s : vecteur unitaire donnant la direction du forage
$p_i$ : point d'intersection recherché entre forage et plan
e : constante. |e| est la distance entre $s_0$ et $p_i$




On a : $(s_0 - p_0) \cdot n = (s_0 - p_i) \cdot n = -e\,(s \cdot n)$

D'où : $e = \left|\frac{(s_0 - p_0) \cdot n}{(s \cdot n)}\right|$, la distance recherchée

Et le point d'intersection est : $p_i = s_0 + es$

### f) Plongée apparente A d'un vecteur sur une section verticale

$tan(A) = \frac{|c_1|}{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}$ avec $(a_1, b_1, c_1)$ le forage et $(a_2, b_2, c_2)$ un vecteur horizontal dans la section.

**g) Pendage apparent A d'un plan sur une section verticale**

$tan(A) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{|c_1|}$ avec $(a_1, b_1, c_1)$ le pôle du plan et $(a_2, b_2, c_2)$ un vecteur horizontal dans la section.

**h) Calcul de JO à partir des orientations du plan et du forage**

Le pendage du plan montre un angle de 90-JO avec le forage.
Donc $sin(JO) \ = \ p \cdot f \rightarrow JO = \sin^{-1}(p \cdot f)$ avec p : le vecteur unitaire représente le pôle et f le vecteur unitaire représentant le forage.

**i) Relations pendage apparent – pendage vrai d'un plan**

Soit $\theta$ le pendage apparent, $\gamma$ le pendage vrai et $\alpha$ l'angle aigu entre la direction du plan et le plan de projection. Alors :

$$\theta = \tan^{-1}(\tan(\gamma)\sin(\alpha));\ \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\theta)}{\sin(\alpha)}\right)$$

**j) Trouver l'épaisseur vraie à partir de JO et de l'épaisseur apparente**

$$E_{vraie} = \sin(JO)\, E_{apparente}$$

**k) Calcul de JO sachant les cosinus directeurs du forage $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ et ceux du pôle au plan $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$**

Il s'agit de la même relation qu'en h.

$$JO = |\sin^{-1}(aA + bB + cC)|$$

**k) Calcul du point d'intersection entre un plan passant par le point $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ et un forage dont le collet est en $(\boldsymbol{x_f}, \boldsymbol{y_f}, \boldsymbol{z_f})$**

Cette stratégie de résolution est une alternative à e.

Soit les cosinus directeurs du forage $(a, b, c)$ et ceux du pôle au plan $(A, B, C)$. L'équation du plan est la suivante : $Ax + By + Cz + D = 0$. Connaissant le point $(x_0, y_0, z_0)$ qui est contenu dans le plan, alors on peut identifier D par substitution. L'équation du forage nous fournit les relations suivantes :

$$x = at + x_f; y = bt + y; z = ct + z_f \ (1)$$

Les relations (1) sont utilisées dans l'équation du plan pour déterminer t, le seul inconnu. Par la suite, on identifie le point d'intersection.

**Méthodes de représentation des forages**

Soit :
$A_1$ et $I_1$ : l'azimut et l'inclinaison du forage au 1er point de mesure (en degrés)
$A_2$ et $I_2$ : l'azimut et l'inclinaison du forage au 2e point de mesure (en degrés)
L : la distance le long du forage entre les deux points de mesure
N : déplacement (calculé) vers le nord du point 1 vers le point 2.
E : déplacement (calculé) vers l'est du point 1 vers le point 2.
D : déplacement (calculé) vers le bas du point 1 vers le point 2.

**1- Tangentielle équilibrée (point milieu)**

On étend la direction et l'inclinaison jusqu'à mi-distance.

$$N = \frac{L}{2}\left[\sin(I_1)\cos(A_1) + \sin(I_2)\cos(A_2)\right]$$
$$E = \frac{L}{2}\left[\sin(I_1)\sin(A_1) + \sin(I_2)\sin(A_2)\right]$$
$$D = \frac{L}{2}\left[\cos(I_1) + \cos(I_2)\right]$$

**2- Rayon de courbure (radius of curvature)**

La méthode suppose que la trajectoire suit un arc de cercle sur une sphère dont les dérivées partielles aux points 1 et 2 correspondent aux mesures d'azimut et d'inclinaison.

$$N = \frac{180^2 L\left[\cos(I_1) - \cos(I_2)\right]\left[\sin(A_2) - \sin(A_1)\right]}{\pi^2 (I_2 - I_1)(A_2 - A_1)}$$
$$E = \frac{180^2 L\left[\cos(I_1) - \cos(I_2)\right]\left[\cos(A_1) - \cos(A_2)\right]}{\pi^2 (I_2 - I_1)(A_2 - A_1)}$$
$$D = \frac{180 L\left[\sin(I_2) - \sin(I_1)\right]}{\pi (I_2 - I_1)}$$

**3- Courbure minimale (minimum curvature)**

La méthode suppose que la trajectoire suit l'arc de cercle le plus lisse possible.

$$\beta = \cos^{-1}\left[\cos(I_2 - I_1) - \sin(I_1)\sin(I_2)(1 - \cos(A_2 - A_1))\right] \text{ en radians}$$
$$F = \frac{2}{\beta}\tan(\beta / 2)$$
$$N = \frac{FL}{2}\left[\sin(I_1)\cos(A_1) + \sin(I_2)\cos(A_2)\right]$$
$$E = \frac{FL}{2}\left[\sin(I_1)\sin(A_1) + \sin(I_2)\sin(A_2)\right]$$
$$D = \frac{FL}{2}\left[\cos(I_1) + \cos(I_2)\right]$$