

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS  
SÉANCE DE TRAVAUX DIRIGÉS III

**Directives:** Cette séance de travaux dirigés vous permettra de vous préparer pour le contrôle périodique, à l'aide d'exercices qui portent sur l'interpolation polynomiale et les splines cubiques.

1. Soit les trois points  $q_1 = (0, 1)$ ,  $q_2 = (\pi/16, \cos(\pi/16))$  et  $q_3 = (\pi/8, \cos(\pi/8))$  de la fonction  $f(x) = \cos(x)$ .
  - (a) Obtenir à l'aide de la formule de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points et en déduire une approximation de  $\cos(\pi/32)$ .
  - (b) Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction  $f(x) = \cos(x)$  autour de  $x_0 = 0$  et en déduire une approximation de  $\cos(\pi/32)$ .
  - (c) Sachant que  $f'(0) = 0$ , calculer le polynôme de degré 2, passant par les points  $q_1$  et  $q_3$  dont la dérivée en  $x = 0$  est égale à 0 et en déduire une approximation de  $\cos(\pi/32)$ .
  - (d) Des trois approximations  $\cos(\pi/32)$  que vous avez obtenues, laquelle est la plus précise? Pourquoi?

*Référence: Recueil d'exercices, no. 59*

2. La courbe des puissances classées d'un service d'électricité, comme Hydro-Québec, représente la proportion de l'année où la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné. Plus la puissance est grande, plus petite est la proportion de l'année où la demande dépasse cette valeur. **Cette courbe est donc par définition décroissante.**

Pour une année donnée, on dispose des données et de la table de différences divisées suivantes:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0,0	30,0			
1	0,1	29,0	-10,0		
2	0,2	24,0	-50,0	?	
3	0,5	19,0	-16,67	83,33	?
4	0,8	18,0	-3,33	22,22	-87,30
5	0,9	16,0	-20,0	-41,67	-91,27
6	1,0	0,0	-160,0	-700,0	-1316,67

- (a) Compléter la table en indiquant clairement le détail du calcul de chaque coefficient.
- (b) Donner une approximation de  $f(0,3)$  à l'aide du *polynôme d'interpolation de Newton* de degré 3 passant par les 4 premiers points. Est-ce que cette approximation vous semble acceptable? Justifier votre réponse.
- (c) Donner les expressions des polynômes de Lagrange  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ , et  $L_3(x)$  de degré 3 qui permettent de calculer une approximation de  $f(0,3)$ . Cette approximation doit être la plus précise possible. (**Ne pas calculer cette approximation**).
- (d) Donner l'expression du système linéaire de 2 équations à 2 inconnues permettant de calculer la spline cubique passant par les 4 premiers points qui satisfaisant à  $f'_0 = -10$  et à  $f''_3 = 0$ .

Référence: *Recueil d'exercices*, no. 91

3. (a) On interpole la fonction  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  aux 4 points équidistants  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}$  et  $x_3 = 1$  par une spline cubique naturelle  $y(x)$ . Doit-on s'attendre à commettre une erreur d'interpolation lorsque l'on approche  $f(\frac{1}{2})$  par  $y(\frac{1}{2})$ ? Expliquer (ne pas calculer  $y$ ).
- (b) Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x + x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 4 - bx + cx^2 + dx^3 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Déterminer les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  de sorte que  $f(x)$  soit la spline cubique naturelle passant par les points  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  et  $(2, 4)$ .

Référence: *Recueil d'exercices*, no. 86

4. Soient les points d'interpolation de coordonnées  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, 1$  et 2:

$x_i$	$f(x_i)$
1,00	0,765789
1,04	0,822688
1,06	0,847522

Utiliser la spline cubique **naturelle** qui passe par ces 3 points pour calculer une approximation de  $f(1,03)$ .

Référence: *Recueil d'exercices*, no. 81