Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE II

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra d'observer les conséquences pratiques reliées à l'utilisation d'un système de représentation binaire et de l'arithmétique flottante en calcul scientifique.*
Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction `publish` *de* MATLAB*. Voir le fichier* `RapportLab2.m`*. Les directives pour la rédaction et la remise des rapports de laboratoires sont disponibles sur le site Moodle.*
Les étudiant.e.s qui ont suivi le cours INF1007D peuvent faire ce laboratoire en langage Python. Cette séance vous permettra de vous mettre à niveau. Vous trouverez sur le site Moodle, le lien pour télécharger le gabarit (notebook Jupyter) à utiliser pour rédiger et présenter vos rapports de laboratoires. Ce gabarit donne aussi les équivalences en langage Python des commandes et fonctions Matlab utilisées dans ce document.

Les effets de l'arithmétique flottante

1. On désire estimer $e \simeq 2{,}718\,28$ à l'aide de la relation

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

   (a) Écrire une fonction dont le seul argument en entrée sera n et qui calculera l'expression $(1+\frac{1}{n})^n$.

   (b) En utilisant la fonction développée en (a), représenter graphiquement, sur deux graphes distincts, la fonction $(1+\frac{1}{n})^n$:
   - en partant de $n = 10^5$ jusqu'à $n = 10^7$, par incréments de 2×10^5 ;
   - en partant de $n = 10^{15}$ jusqu'à $n = 10^{17}$, par incréments de 2×10^{15}.

   Observer les résultats obtenus et expliquer toute anomalie.

   Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction à la question (a). Le programme et les graphes produits par ce programme à la question (b). Finalement les commentaires de la question (b).

2. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{(3-2x^2)\arcsin(x) - 3x\sqrt{1-x^2}}{x^5}.$$

   On désire évaluer l'expression

$$f(\alpha) = \frac{(3-2\alpha^2)\arcsin(\alpha) - 3\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^5} \tag{1}$$

   où $\alpha^2 = 0{,}006\,694\,380\,022\,903\,415\,749\,574\,948\,586$.

   (a) Calculer les valeurs des expressions

$$(3-2\alpha^2)\arcsin(\alpha) \quad \text{et} \quad 3\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$$

   et vérifier que les deux nombres obtenus sont voisins.

(b) En vous servant de l'expression (1), calculer une approximation de $f(\alpha)$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs.
Note : On admettra que $f(\alpha) = 0{,}267\,819\,636\,411\,523\,324\,998\,687\,379\,451$.

(c) En se servant du développement de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$, on peut montrer que

$$f(\alpha) \simeq P_n(\alpha^2) = \frac{4}{15} + \frac{6}{35}(\alpha^2) + \frac{5}{42}(\alpha^2)^2 + \frac{35}{396}(\alpha^2)^3 + \cdots + \frac{(2n+1)!\,(\alpha^2)^n}{(2n+3)(2n+5)(n!)^2\,2^{2n-2}}.$$

Télécharger la fonction `hhorner.m`. Pour une valeur de n (degré du polynôme de Taylor) donnée, cette fonction permet d'évaluer $P_n(\alpha^2)$ à l'aide de l'algorithme de Horner, décrit aux pages 26–27 du manuel du cours.

En vous servant de la fonction `hhorner.m`, écrire un programme qui permet de déterminer numériquement le plus petit degré n nécessaire pour que le polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$ fournisse une approximation de $f(\alpha)$ avec 15 chiffres significatifs.

(d) Expliquer pourquoi l'approximation de $f(\alpha)$ obtenue avec le polynôme de Taylor et l'algorithme de Horner est plus précise que celle obtenue avec l'expression (1).

Le rapport doit contenir : Les valeurs des expressions et la justification de la question (a). L'approximation et le nombre de chiffres significatifs à la question (b), le programme, la valeur de n obtenue à la question (c) et finalement la discussion en (d).

Propagation d'erreurs

3. On définit la suite I_n pour $n = 1, 2, 3, \cdots$ par l'expression :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{10 + x}\,dx.$$

Il est facile de vérifier que chaque terme de la suite est positif et que la suite I_n est décroissante, c.-à-d. $I_n > I_{n+1}$. Enfin en intégrant par parties à deux reprises, cela revient à déterminer I_n par récurrence avec

$$\begin{cases} I_1 &= \ln\left(\frac{11}{10}\right); \\ I_{n+1} &= \frac{1}{n} - 10 I_n. \end{cases}$$

Soient ΔI_n et ΔI_{n+1} les erreurs absolues sur I_n et I_{n+1}. En négligeant l'erreur d'arrondi sur $\frac{1}{n}$, on peut montrer analytiquement que

$$\Delta I_{n+1} \simeq 10 \Delta I_n.$$

(a) Écrire un programme qui calculera les 20 premières valeurs de I_n en partant de $I_1 \simeq 0{,}095310$ (l'arrondi de I_1 à 5 chiffres). Les résultats doivent être présentés dans un tableau comportant deux colonnes : $(n\,,\,I_n)$. Observer les résultats obtenus et expliquer toutes anomalies.

(b) Reprendre la question précédente en utilisant cette fois la valeur de I_1 donnée par MATLAB ou Python. Commenter les résultats obtenus.

Le rapport doit contenir pour les questions (a) et (b) : Le programme , le tableau produit par ce programme et finalement la discussion.