Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
SÉANCE DE TRAVAUX DIRIGÉS II

Directives: *Cette séance de travaux dirigés porte sur la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires.*

Factorisations matricielles

1. On considère les matrices inversibles suivantes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

   Pour chaque matrice, identifier la factorisation LU appropriée parmi les factorisations suivantes:

   (a) la décomposition de Crout;

   (b) la décomposition de Doolitle;

   (c) la décomposition de Cholesky;

   (d) l'algorithme de Thomas.

   Voir indice: Recueil d'exercices , no. 270

2. Soit B une matrice symétrique inversible, donnée sous la forme:

$$B = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer le déterminant de la matrice B de la façon qui nécessite le moins de calculs possible.

   (b) Soit $\vec{b} = (-6 \quad -7 \quad 1)^T$, **sans calculer la matrice** B, résoudre le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$.

   Référence: Recueil d'exercices , no. 273

Conditionnement matriciel

3. Une factorisation matricielle est utilisée pour résoudre un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est de dimension 2×2, sur un ordinateur pour lequel *la précision machine* est de l'ordre de 10^{-16}. Sachant que $\|A\|_\infty \simeq 10^4$, $\|A^{-1}\|_\infty \simeq 10^6$ et que

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1,234\,567\,890\,123\,456 \\ 0,000\,012\,345\,678\,901 \end{pmatrix},$$

combien de chiffres significatifs pouvons-nous nous attendre à obtenir pour chaque composante de cette approximation?
Référence: Recueil d'exercices , no. 285

4. On considère la matrice inversible

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) On a résolu les systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants:
- si $\vec{b} = (1 \quad 0)^T$, la solution est $\vec{x} = (0,1 \quad -0,04)^T$;
- si $\vec{b} = (0 \quad 1)^T$, la solution est $\vec{x} = (0,05 \quad 0,08)^T$.

En vous servant de ces données, calculer le conditionnement de la matrice A en norme l_1 ($\| \quad \|_1$).

(b) On considère le système linéaire

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

dont la solution exacte est $\vec{x} = (1 \quad 1)^T$.
Si on perturbe le membre de droite du système en le remplaçant par le vecteur

$$\vec{b}^* = \vec{b} - (0,04 \quad 0,06)^T,$$

on obtient la solution $\vec{x}^* = (0,993 \quad 0,9968)^T$.

i. Calculer les quantités $\frac{\|\vec{b}-\vec{b}^*\|_1}{\|\vec{b}\|_1}$ et $\frac{\|\vec{x}-\vec{x}^*\|_1}{\|\vec{x}\|_1}$.

ii. Commenter et expliquer avec preuves à l'appui les résultats obtenus en (i).

5. On considère le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1,0001 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,0000 \\ 6,0005 \end{pmatrix}$$

dont la solution exacte est $\vec{x} = (5 \quad 0,2)^T$.

(a) Calculer les résidus $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ correspondant respectivement aux solutions approximatives $\vec{x}_1 = (5,1 \quad 0,3)^T$ et $\vec{x}_2 = (1 \quad 1)^T$ et en déduire les quantités $\|\vec{r}_1\|_\infty$ et $\|\vec{r}_2\|_\infty$. Commenter les résultats obtenus.

(b) Expliquer les résultats obtenus en (a) en calculant toutes les quantités pertinentes. **Effectuer les calculs en norme $\| \, \|_\infty$.**