DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
SÉANCE DE TRAVAUX DIRIGÉS I

Directives: *Cette séance de travaux dirigés vous permettra de commencer à vous préparer pour le contrôle périodique à l'aide d'exercices qui portent sur la notation et l'arithmétique flottante ainsi que sur les dévelopements de Taylor*

Arithmétique flottante

1. Questions rapides:
   (a) Il est souvent possible de limiter les erreurs dues à l'arithmétique flottante en exprimant différemment une expression. Pour les expressions suivantes, indiquer la source potentielle d'erreur et suggérer une expression équivalente ou une approximation qui soit numériquement plus stable.
      i. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$;
      ii. $1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots + \dfrac{1}{100\,000^4}$;
      iii. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;
      iv. $x^2 - y^2$.

      Référence: Recueil d'exercices , no. 54

   (b) On considère la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par

   $$x_n = \epsilon 4^n + (1+\epsilon)\,\frac{1}{3^n}.$$

   Pour $\epsilon = 10^{-50}$, le calcul des x_n à l'aide de MATLAB (norme IEEE-754 double précison) montre que $x_n = \frac{1}{3^n}$ pour $n = 1, 2, \ldots, 31$. Expliquer brièvement les résultats obtenus.

   Référence: Recueil d'exercices , no. 33

2. On considère la fonction

   $$f(x) = (8+x)^3 - 512.$$

   (a) Sans modifier la forme algébrique de $f(x)$, calculer $f(0{,}0001)$ en arithmétique flottante à 5 chiffres en utilisant l'arrondi. Comparer la valeur fournie par votre calculatrice lorsque vous utilisez le maximun de chiffres significatifs et commenter les résultats obtenus.

   (b) Trouver une expression de $f(x)$ qui soit algébriquement équivalente à celle proposée plus haut et qui vous permettra de calculer $f(0{,}0001)$ en arithmétique à 5 chiffres avec plus de précision. Verifier.

   Référence: Recueil d'exercices , no. 42

Développement de Taylor et propagation d'erreurs

3. Questions rapides:
   (a) À l'aide d'un développement de Taylor autour de $x_0 = 0$, on a approché la fonction $f(x)$ par le polynôme $p(x)$. Sachant que:
   - $f(0{,}1) = 3{,}156$ et $f(0{,}3) = 3{,}267$;
   - $p(0{,}1) = 3{,}156016$ et $p(0{,}3) = 3{,}165$,

   estimer l'ordre de précision du développement de Taylor utilisé.

   Référence: Recueil d'exercices , no. 6

   (b) Soit $x = 0{,}12345 \times 10^{-4}$ un nombre qui possède 3 chiffres significatifs et le nombre $y = 0{,}67890 \times 10^{2}$ est tel que $\Delta y \leq 0{,}7$. En évaluant l'expression $(x+1)y^2$, combien de chiffres significatifs obtiendrez-vous?

   Référence: Recueil d'exercices , no. 47

4. (a) Obtenir le développement de Taylor d'ordre 6 de la fonction $f(x) = e^x$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré du polynôme obtenu.
   (b) Soit la fonction
   $$g(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2} + t^2 - 1}{t^3}\, dt.$$
   Obtenir les 3 premiers termes non nuls du développement de Taylor de la fonction $g(x)$ autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré et l'ordre du polynôme obtenu.
   (c) Donner une approximation de $g(\frac{1}{2})$ en utilisant le polynôme de Taylor obtenu en (b) et donner le nombre de chiffres significatifs de cette approximation.

5. Nous voulons utiliser le développement de Taylor pour estimer l'intégrale de Fresnel,
   $$C(x) = \int_0^x \cos(\tfrac{\pi t^2}{2})\, dt,$$
   que nous voulons évaluer pour $|x| \leq \frac{1}{2}$:
   (a) Obtenir le développement de Taylor de degré $4n+1$ de la fonction $C(x)$ autour de $x_0 = 0$.
   (b) Donner une borne supérieure de la valeur absolue de l'expression analytique du terme d'erreur du développement de Taylor de degré $4n+1$ de la fonction $C(x)$ pour tout x tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$.
   (c) Déterminer le degré minimal $m = 4n+1$ du polynôme de Taylor de la fonction $C(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$. Quel est son ordre de précision?
   (d) Combien aurons nous de chiffres significatifs si nous utilisons l'approximation obtenue en (c) pour estimer $C(\frac{1}{4})$? Donner une justification *précise*.

   Référence: Recueil d'exercices , no. 26