Questionnaire

Examen Final

MTH1101

Identification de l'étudiant		
Nom:	**Prénom:**	
Signature:	**Matricule:**	**Groupe:**

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1101 – Calcul I	Tous	A2019

Professeur	Local	Téléphone
Guy Jomphe	A-520.36	5155

Date	Heures	Durée
dimanche 8 décembre 2019	9h30-12h00	2h30

Calculatrices, cellulaires et agendas électronique sont interdits. Seul un aide-mémoire sur une feuille manuscrite $8\frac{1}{2} \times 11$ non photocopiée est autorisé. Cet examen contient 5 questions sur un total de 15 pages, excluant celle-ci. Vous devez répondre sur le questionnaire et le remettre. Justifiez vos réponses.

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.

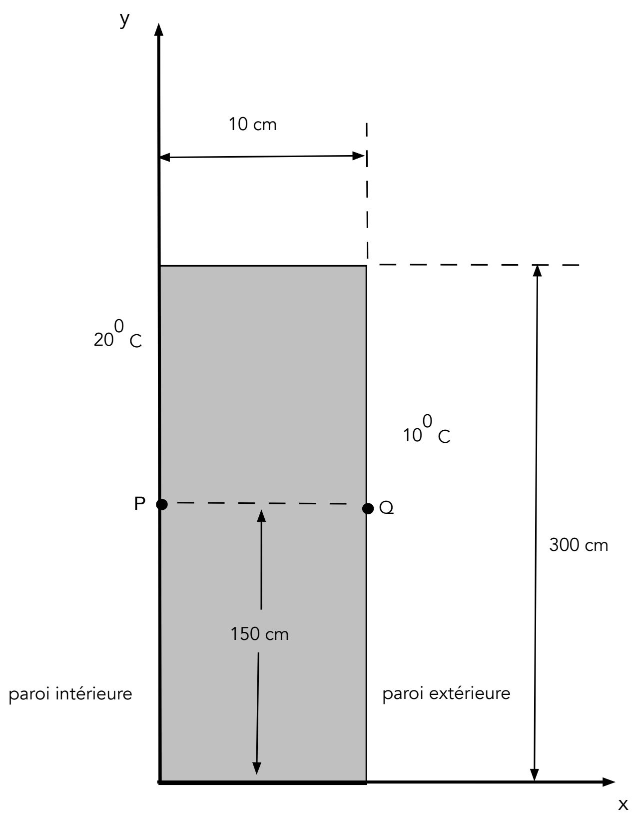
Réservé

1.	/4
2.	/4
3.	/6
4.	/5
5.	/6

Total:	/25

Exercice 1 : [4] points

La température T sur la paroi intérieure d'un mur est maintenue à 20°C et à 10°C sur la paroi extérieure (voir figure ci-dessous). Les points P et Q sont situés à mi-hauteur du mur, où $y = 150$.



(1 pt) a) Estimez $\nabla T(x,y)$ au point P. Rép : $\nabla T(x,y) \simeq -1°C/cm\,\vec{i} + 0\vec{j}$

(1 pt) b) Estimez la dérivée directionnelle de T au point P lorsqu'on se déplace de P vers Q.
Rép : $T_{\vec{u}}(P) \simeq -1°C/cm$

(1 pt) c) Estimez $T_1(x,y)$, le polynôme de Taylor de degré 1 qui approxime T autour de P.
Rép : $T_1(x,y) \simeq 20 - x$

(1 pt) d) En sachant que les dérivées secondes de la fonction satisfont

$$-\frac{1}{1000} \leq \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \leq \frac{1}{2000}, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right| \leq \left|\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|,$$

donnez une borne supérieure sur l'erreur maximale commise, en valeur absolue, lorsqu'on approxime T par T_1 dans la région

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10,\ \ 0 \leq y \leq 300\Big\}.$$

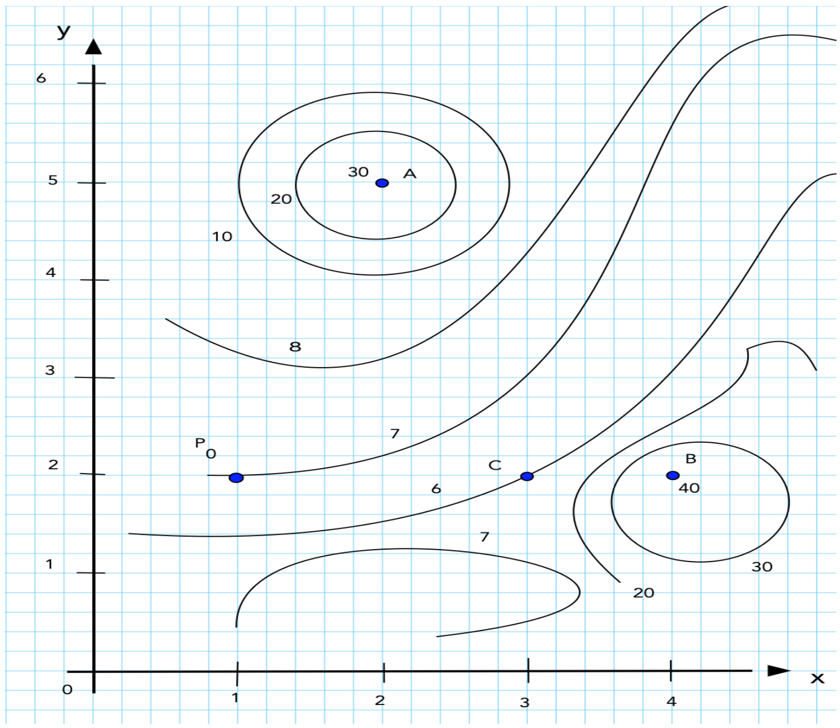
Note : $150^2 = 22500$ et $\sqrt{22600} = 10\sqrt{226}$. De plus,veuillez utiliser selon vos besoins les formules :

$$\begin{aligned} |E_L(x,y)| &\leq M_L \, d^2 \\ |E_Q(x,y)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{3} M_Q \, d^3. \end{aligned}$$

Rép : $|E_L(x,y)| \leq M_L \, d^2 \leq 22.6$

Exercice 2 : [4] points

Considérons certaines courbes de niveau d'une fonction deux fois différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Des maxima locaux se situent aux points $A = (2,5)$ et $B = (4,2)$ (voir figure ci-dessous).



Dans cet exercice, on cherche à **minimiser** la fonction f sans contraintes en appliquant la **méthode du gradient**.

(1 pt) a) À partir du point $P_0 = (1,2)$ et en utilisant le symbole X, situez sur le graphique le prochain point P_1 généré par la méthode du gradient.

Rép : $P_1 = (1,\ 1.4)$

(1 pt) b) Peut-on appliquer la méthode du gradient à partir du point critique initial $C = (3,2)$ afin d'obtenir un maximum de la fonction f? (Justifiez)

Rép : Non

(1 pt) c) En sachant que le point $A = (2,5)$ est un point critique de la fonction f, déterminez l'équation du plan tangent en ce point.

Rép : $z = 30$

(1 pt) d) Votre camarade de classe vous signale avoir obtenu :

$$\nabla^2 f(2,5) \;=\; \begin{bmatrix} f_{xx}(2,5) & f_{yx}(2,5) \\ f_{xy}(2,5) & f_{yy}(2,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que votre camarade a raison ? (justifiez)

Rép : Votre camarade a tort.

Exercice 3 : [6] points

Soit la fonction température $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(x, y) = x^2 - y^2.$$

(1 pt) a) Sans faire l'analyse des points critiques, est-ce que la fonction T possède un minimum global et un maximum global ? Justifiez adéquatement.

Rép : Pas de maximum ni de minimum global;

(4 pts) b) Considérons un fil de forme elliptique d'équation $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, déterminez les coordonnées des points P sur le fil pour lesquels la température T est maximale et minimale. Spécifiez ces températures. Inscrivez vos résultats dans le tableau suivant. Notez que le nombre de lignes du tableau ne correspond pas nécessairement au nombre de points P.

$P = (x, y)$	λ	$T(P)$	Conclusion

Rép :

$P = (x, y)$	λ	$T(P)$	Conclusion
(0,2)	-4	-4	minimum local
(0,-2)	-4	-4	minimum local
(1,0)	1	1	maximum local
(-1,0)	1	1	maximum local

(1 pt) c) Sans faire de lourds calculs supplémentaires, estimez la valeur de la température **minimale** lorsque la courbe elliptique devient $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = \mathbf{1.1}$

Rép : $-\dfrac{44}{10}$

Exercice 4 : [5] points

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(1,2) = 1$ et

$$\nabla f(x,y) = (2x-2)\,\vec{\imath} + (2y-4)\,\vec{\jmath} = (2x-2,\ 2y-4).$$

(1 pt) a) Donnez $Q(x,y)$, le polynôme de Taylor de degré 2 qui approxime f près du point $(1,2)$.

Rép : $Q(x,y) = 1 + (x-1)^2 + (y-2)^2$

(1 pt) b) Quelle est l'erreur en valeur absolue, lorsqu'on approxime $f(1,2)$ par $Q(1,2)$?

Rép : Aucune erreur

(1 pt) c) Trouvez tous les points critiques de f et déterminez leur nature.

Rép : Minimum local

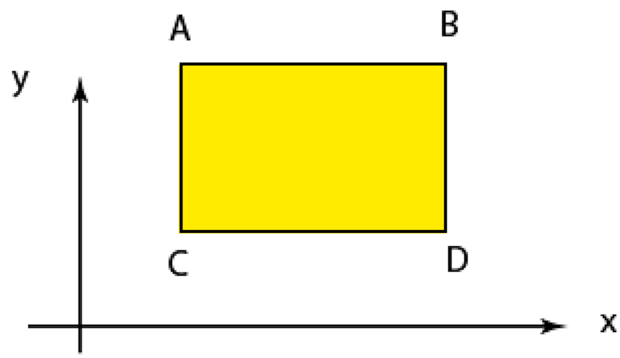
(2 pts) d) Trouvez tous les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la direction de variation maximale de f est un multiple de $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1,1)$.

Rép : $y = x + 1$

Exercice 5 : [6] points

Pour chacune des sous-questions ci-dessous, veuillez choisir une seule réponse parmi celles proposées et **reportez celles-ci dans le tableau** à la fin de la question. Aucune justification n'est requise pour cette question.

(1 pt) 5.1) Considérons la fonction $f(x, y) = y - x$ définie sur le domaine rectangulaire fermé et borné de sommets A, B, C, D, (voir figure).



Alors on peut conclure que f possède :

a) Un maximum global en C et un minimum global en B

b) Un maximum global en D et un minimum global en A

c) Un maximum global en B et un minimum global en C

d) Un maximum global en A et un minimum global en D

e) Aucune de ces réponses

(1 pt) 5.2) La valeur de :

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2 - 2xy}{x^2 - 4y^2} \qquad \text{(attention ici, la limite n'est pas vers (0,0)}$$

est :

a) 0 c) $\frac{1}{2}$ e) aucune de ces réponses

b) la limite n'existe pas d) 1

(1 pt) 5.3) Considérons un point critique P_0 d'une fonction f tel que

$$\nabla^2 f(P_0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

a) P_0 correspond à un minimum local de f

b) P_0 correspond à un maximum local de f

c) P_0 correspond à un point de selle de f

d) $\|\nabla f(P_0)\| \neq 0$.

e) Aucune de ces réponses

(1 pt) 5.4) Les points critiques de la fonction $f(x, y) = -x^2\, y^2$ sont :

a) $(0, 0)$

b) $(0, 1)$

c) $(1, 0)$

d) Il n'y a pas de points critiques

e) Il y a un infinité de points critiques

(1 pt) 5.5) Soit S la surface définie par $F(x, y, z) = 3x^2y - 2(y - z)^2 = 1$. Les équations paramétriques d'une droite normale à S au point $(1, 1, 0)$ sont:

a) $x(t) = 6t,\quad y(t) = -t,\quad z(t) = 4t,\quad t \in \mathbb{R}$

b) $x(t) = 1 + 6t,\quad y(t) = 1 - t,\quad z(t) = 4t,\quad t \in \mathbb{R}$

c) $x(t) = 6t,\quad y(t) = 2 - 2t,\quad z(t) = 8t,\quad t \in \mathbb{R}$

d) $x(t) = 2 + 6t,\quad y(t) = 2 - 2t,\quad z(t) = 8t,\quad t \in \mathbb{R}$

e) Aucune de ces réponses.

(1 pt) 5.6) Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évalué au point $x^0 = (1, 2)$ est $\nabla f(x^0) = (1, 3)$. Considérez la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui retourne la valeur de f à un point situé dans la direction opposée au gradient à partir de x^0:

$$h(t) = f(x(t)) \quad \text{où} \quad x(t) = x^0 - t\nabla f(x^0).$$

Que vaut $\dfrac{dh(0)}{dt}$?

a) $-\sqrt{5}$

b) $-\sqrt{10}$

c) -5

d) -10

e) aucune de ces réponses

Réponses :

Q 5.1)	Q 5.2)	Q 5.3)	Q 5.4)	Q 5.5)	Q 5.6)

Rép : d, c, c, e, b, d